

ステファン問題の差分解の一意存在

東大 エ 河原田 秀夫
電通大 名取 亮

§ 1. 序

我々は前にステファン問題に対して処罰法を用いた数値解法を提案した⁽¹⁾。そこでは、微積分方程式系を差分化し、その差分ステファン問題を解く一つのアルゴリズムを示し、具体的計算を行なった結果、かなり良い精度で解を得ることができた。ここでは、前記の差分ステファン問題における処罰関数に若干の修正を加え、差分解の一意存在を証明する。

§ 2. 記号と問題

2. 1 記号

ここで用いる記号は、前論文⁽¹⁾で定義したものと同じであるが、重要と思われるものと新しい記号を以下に列記する。

1° $\lambda = k / h^2$

2° $T = N k$

3° $X = M h$

$$4^\circ \quad C = \max(\max_n f_n, \max_m \varphi_m)$$

$$5^\circ \quad A = \max(C/b, D)$$

$$6^\circ \quad m_n = [S_n/h]$$

$$7^\circ \quad \rho_n = S_n/h - [S_n/h]$$

$$8^\circ \quad \varepsilon_{m,n} = 1 / (1 + hK\chi_{m,n})$$

$$9^\circ \quad \delta u_{m,n} = u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}$$

$$10^\circ \quad Pu_{m,n} = (I + \lambda\delta)u_{m,n}$$

$$11^\circ \quad \|u\|_n = \max_{0 \leq m \leq M} |u_{m,n}|$$

2. 2 問題

以下のような差分ステファン問題を考える。

$$(2.1) \quad \frac{u_{m,n} - u_{m,n-1}}{h} = \frac{1}{h^2} \delta u_{m,n-1} - K\chi_{m,n} u_{m,n}$$

$$(2.2) \quad u_{0,n} = f_n \geq 0$$

$$(2.3) \quad u_{M,n} = 0$$

$$(2.4) \quad u_{m,0} = \varphi_m \geq 0$$

$$(2.5) \quad S_n = \sqrt{F_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u_{m,n}}, \quad 0 \leq n \leq N$$

ただし,

$$F_n = b^2 + 2h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + 2h^2 \sum_{m=1}^{[b/h]} m \varphi_m$$

$$(2.6) \quad \chi_{m,n} = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq m \leq m_n - 1, \quad 0 \leq n \leq N \\ \frac{1 - \rho_n}{1 + \rho_n h K} & , \quad m = m_n, \quad 0 \leq n \leq N \\ 1 & , \quad m_n + 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

2.3 処罰関数 $\chi_{m,n}$

(2.1) 式を書き直すと,

$$(2.7) \quad u_{m,n} = \varepsilon_{m,n} P u_{m,n-1}$$

となる。ここで,

$$(2.8) \quad \varepsilon_{m,n} = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \leq m \leq m_n - 1, \quad 0 \leq n \leq N \\ \frac{1 + p_n r K}{1 + r K} & , \quad m = m_n, \quad 0 \leq n \leq N \\ \frac{1}{1 + r K} & , \quad m_n + 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

である。前論文では, $m = m_n$ における $\varepsilon_{m,n}$ の値は1であったが, ここでは $(1 + p_n r K) / (1 + r K)$ になっている点が異なっている。前の方法では, s_n から $\chi_{m,n}$ をきめるときに, s_n / r の整数部分のみをとっているために, s_n に対する $u_{m,n}$ の連続性が失われてしまう。そこで, 小数部分 p_n を考慮することによって連続性を保持するようにした。すなわち, $m = m_n$ における増幅因子 $\varepsilon_{m,n}$ を

$$(2.9) \quad \varepsilon_{m_n,n} = p_n \cdot 1 + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{1 + r K} = \frac{1 + p_n r K}{1 + r K}$$

と定義する。

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{1}{1 + r K \chi_{m,n}}$$

の関係から, 処罰関数 $\chi_{m,n}$ の $m = m_n$ における値を求めれば

$$\chi_{m,n} = \frac{1 - f_n}{1 + f_n k K}$$

となる。

§3. アルゴリズムと結果

問題(2.1)～(2.6)の解を具体的に求める方法は、前論文と同様に逐次近似を用いる。すなわち、 s_n の0近似を

$$(3.1) \quad s_n^{(0)} = \sqrt{F_n}, \quad 0 \leq n \leq N$$

とし、それに対して定まる $\chi_{m,n}^{(0)}$ を用いて差分熱方程式を解いて $u_{m,n}^{(0)}$ を求める。それを(2.5)に代入して、 s_n の1近似

$$(3.2) \quad s_n^{(1)} = \sqrt{F_n - 2k^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u_{m,n}^{(0)}}, \quad 0 \leq n \leq N$$

を求める。以下同様にして、 $u_{m,n}^{(l)}$, $s_n^{(l)}$ を計算する。

$l \rightarrow \infty$ としたときに、 $u_{m,n}^{(l)}$, $s_n^{(l)}$ が問題(2.1)～(2.6)の一意解に収束することを示せば、差分解の一意存在を証明したことになる。

定理 (i) $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$

(ii) $K = 1/k^2$

(iii) $0 < C_2 < 1$, ただし $C_2 = \frac{X}{\theta} (A + C\lambda k)$

ならば、方程式系(2.1)～(2.6)の解は一意に存在する。

§ 4. 準備

前節で述べた定理を証明するための準備として，いくつかの補題を述べる。

定義 1. $S = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ があって，

$$0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_N \leq X$$

であるとき，" S は性質 (M) をもつ" という。

定義 2. S が与えられたとき，方程式系 (2.1) ~ (2.4) および (2.6) の解を $u_{m,n}$ としたとき， $\Phi(S) = \{\Phi_0(S), \Phi_1(S), \dots, \Phi_N(S)\}$ を以下のように定義する。

$$(4.1) \quad \Phi_n(S) = \sqrt{F_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u_{m,n}}, \quad 0 \leq n \leq N$$

§ 2.3 で述べたことから， Φ は S に関して連続であることがわかる。

(2.5) から，もし S が真の境界ならば，

$$s = \Phi(S) \quad \text{i.e.} \quad s_n = \Phi_n(S), \quad 0 \leq n \leq N$$

が成り立つ。

補題 1. (境界に対する解の単調性)

境界 s', s'' が与えられたとき，方程式系 (2.1) ~ (2.4) および (2.6) の解をそれぞれ $u'_{m,n}, u''_{m,n}$ とする。

$$0 \leq s'_n \leq s''_n \leq X \quad (0 \leq n \leq N)$$

かつ $0 < \lambda \leq 1/2$

であるならば，

$$0 \leq u'_{m,n} \leq u''_{m,n}$$

が成り立つ。

証明. 前の論文とほぼ同様に証明される。

補題 2. (境界の n についての単調性)

S が性質 (M) をもてば, $\Phi(s)$ も性質 (M) をもつ。

証明.

定義により,

$$\begin{aligned} \{\Phi_{n+1}(s)\}^2 &= F_{n+1} - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u_{m,n+1} \\ \{\Phi_n(s)\}^2 &= F_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u_{m,n} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \{\Phi_{n+1}(s)\}^2 - \{\Phi_n(s)\}^2 &= 2kf_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m (\varepsilon_{m,n+1} P - I) u_{m,n} \\ &\geq 2kf_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m (P - I) u_{m,n} \\ &= 2kf_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m \lambda \delta u_{m,n} \\ &= 2k(M-1) u_{M-1,n} \geq 0 \quad (\text{補題 1. より}) \end{aligned}$$

であり, かつ,

$$\begin{aligned} \Phi_0(s) &= \sqrt{F_0 - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m \varphi_m} = b \\ \Phi_N(s) &= \sqrt{F_N - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u_{m,N}} \leq \sqrt{F_N} \leq X \end{aligned}$$

が成立つ。

Q. E. D.

補題 3. ($m_n \leq m \leq M$ における解の評価)

与えられた S が性質 (M) をもち, $K = 1/h^2$ とするとき, 解 $u_{m,n}$ は,

$$(4.2) \quad 0 \leq P u_{m, n-1} \leq C_1 h \quad (m_n \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N)$$

を満す。ただし,

$$C_1 = A + C \lambda h$$

である。

証明.

式(2.7)において, $K \rightarrow \infty$ としたものを $u_{m,n}^{(\infty)}$ と書くと,

$$(4.3) \quad u_{m,n}^{(\infty)} = 0 \quad (m_{n+1} \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N)$$

となる。実際, $K \rightarrow \infty$ としたとき, $\varepsilon_{m,n} \rightarrow 0$ ($m_{n+1} \leq m \leq M$, $0 \leq n \leq N$) となるからである。

まず, $m = m_n$ の場合を考える。

$$(4.4) \quad P u_{m_n, n-1} \leq |P u_{m_n, n-1} - P u_{m_n, n-1}^{(\infty)}| + P u_{m_n, n-1}^{(\infty)}$$

ここで, 右辺の1項を評価しよう。一般に, $u_{m,n}$ と $u_{m,n}^{(\infty)}$ を比較すると, 初期・境界条件から,

$$u_{0,n} = u_{0,n}^{(\infty)}$$

$$u_{m,0} = u_{m,0}^{(\infty)}$$

および, (2.7) と (4.3) から

$$u_{m_{n+1}, n} - u_{m_{n+1}, n}^{(\infty)} \leq \frac{C}{1 + R K}$$

を得る。最大値原理を用いれば, すべての m, n ($1 \leq m \leq m_n$, $0 \leq n \leq N$) に対して,

$$|u_{m,n} - u_{m,n}^{(\infty)}| \leq \frac{C}{1 + R K}$$

が成り立つ。ここにおいて, $m = m_n$, $n = n-1$ とし, 両辺に

P を作用させると,

$$(4.5) \quad |Pu_{m_n, n-1} - Pu_{m_n, n-1}^{(\infty)}| \leq \frac{C}{1+K}$$

を得る。次に, 右辺の2項を評価する。文献(2)における

Lemma 1. の差分表現を用いれば,

$$(4.6) \quad u_{m_n, n}^{(\infty)} \leq A\tau$$

が成り立つことがわかる。したがって性質(M)をもつことを考慮すれば,

$$u_{m_{n+1}, n-1}^{(\infty)} = 0$$

$$u_{m_n, n-1}^{(\infty)} \leq A\tau$$

$$u_{m_{n-1}, n-1}^{(\infty)} \leq 2A\tau$$

であるから,

$$(4.7) \quad Pu_{m_n, n-1}^{(\infty)} \leq A\tau$$

となる。(4.5)と(4.7)から

$$0 \leq Pu_{m_n, n-1} \leq \frac{C}{1+K} + A\tau \leq (A + C\lambda\tau)\tau = C_1\tau$$

が得られる。ここで, $K = 1/\tau^2$ を用いた。

次に, $m_{n+1} \leq m \leq M$ の場合を考える。領域 $m_{n+1} \leq m \leq M$, $0 \leq n \leq N$ の中で $u_{m, n}$ を考えると, 初期・境界条件から,

$$u_{M, n} = 0$$

$$u_{m, 0} = 0$$

および, 上の議論から

$$u_{m,n} = \varepsilon_{m,n} P u_{m,n-1} \leq P u_{m,n-1} \leq C_1 h$$

であるから，最大値原理により，この領域内のすべての m, n に対して

$$0 \leq u_{m,n} \leq C_1 h$$

が成り立つ。ここで， $n=n-1$ とし両辺に P を作用させると，

$$0 \leq P u_{m,n-1} \leq C_1 h \quad (m_n+1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N)$$

となる。

Q. E. D.

補題 4. s', s'' がともに性質 (M) をもつならば，

$$(4.9) \quad \|u' - u''\|_n \leq C_1 \sum_{i=1}^n |s'_i - s''_i|$$

が成り立つ。

証明.

$s'_n \leq s''_n$ としても一般性を失わない。(2.7) 式より.

$$\begin{aligned} u'_{m,n} - u''_{m,n} &= \varepsilon'_{m,n} P u'_{m,n-1} - \varepsilon''_{m,n} P u''_{m,n-1} \\ &= (\varepsilon'_{m,n} - \varepsilon''_{m,n}) P u'_{m,n-1} + \varepsilon''_{m,n} P (u'_{m,n-1} - u''_{m,n-1}) \end{aligned}$$

したがって，

$$\|u' - u''\|_n \leq \max_{0 \leq m \leq M} (\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n}) \max_{m'_n \leq m \leq m''_n} P u'_{m,n-1} + \|u' - u''\|_{n-1}$$

となる。

ここで， $0 \leq m \leq m'_n - 1$ および $m''_n + 1 \leq m \leq M$ に対しては，

$\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n} = 0$ であることを注意しよう。

また，定義により，

$$(4.10) \quad (S_n'' - S_n')/h = m_n'' - m_n' + p_n'' - p_n'$$

である。ここで、次の3つの場合に分けて考える。

i) $m_n'' = m_n'$ のとき

$$\max_m (\varepsilon_{m,n}'' - \varepsilon_{m,n}') = \frac{(p_n'' - p_n')kK}{1+kK} < \frac{S_n'' - S_n'}{h}$$

ii) $m_n'' = m_n' + 1$ のとき

$$\max_m (\varepsilon_{m,n}'' - \varepsilon_{m,n}') = \max \left(\frac{(1-p_n')kK}{1+kK}, \frac{p_n''kK}{1+kK} \right) < \frac{S_n'' - S_n'}{h}$$

実際、

$$(S_n'' - S_n')/h = (1 - p_n') + p_n''$$

$$0 \leq p_n' < 1, \quad 0 \leq p_n'' < 1$$

より明らかである。

iii) $m_n'' \geq m_n' + 2$ のとき

$$m_n'' - m_n' \geq 2, \quad p_n'' - p_n' > -1$$

であるから、

$$(S_n'' - S_n')/h = (m_n'' - m_n') + (p_n'' - p_n') > 1$$

したがって

$$\max_m (\varepsilon_{m,n}'' - \varepsilon_{m,n}') = \frac{kK}{1+kK} < \frac{S_n'' - S_n'}{h}$$

以上の議論および補題3により、

$$(4.11) \quad \|u' - u''\|_n \leq C_1 |S_n' - S_n''| + \|u' - u''\|_{n-1}$$

が得られる。初期条件より、 $\|u' - u''\|_0 = 0$ であるから、

(4.11) の不等式をくりかえし用いることにより、(4.9) が得られる。
Q.E.D.

補題 5. S', S'' がともに性質 (M) をもつならば,

$$(4.12) \quad |\Phi_n(S') - \Phi_n(S'')| \leq C_2 |S'_n - S''_n| + C_1 C_3 \sum_{i=1}^{n-1} |S'_i - S''_i|$$

が成り立つ。ただし,

$$C_2 = \frac{X}{b} C_1 h$$

$$C_3 = \frac{X^2}{2b}$$

である。

証明.

定義により

$$\begin{aligned} (4.13) \quad & \{\Phi_n(S')\}^2 - \{\Phi_n(S'')\}^2 \\ &= 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m (u''_{m,n} - u'_{m,n}) \\ &= 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m (u''_{m,n} - u'''_{m,n}) + 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m (u'''_{m,n} - u'_{m,n}) \end{aligned}$$

ただし,

$$u'''_{m,n} = \varepsilon''_{m,n} P u'_{m,n-1}$$

である。(4.13) 式の右辺第1項は,

$$2h^2 \sum_m m \varepsilon''_{m,n} P (u''_{m,n-1} - u'_{m,n-1}) \leq X^2 \|u'' - u'\|_{n-1}$$

で評価される。次に右辺第2項を考える。 $S'_n \leq S''_n$ としても一般性を失わない。

$$\begin{aligned} & 2h^2 \sum_m m (\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n}) P u'_{m,n-1} \\ & \leq 2h X C_1 h \sum_{m=m'_n}^{m''_n} (\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n}) \quad (\text{補題 3 より}) \\ & \leq 2 X C_1 h^2 \left\{ (1 - \rho'_n) + \sum_{m=m'_n+1}^{m''_n-1} 1 + \rho''_n \right\} \\ & = 2 X C_1 h^2 (m''_n - m'_n + \rho''_n - \rho'_n) \end{aligned}$$

$$= 2X C_1 h (s_n'' - s_n')$$

となる。 $m_n'' = m_n'$ および $m_n' + 1$ の場合にも同じ結果が得られる。従って,

$$(4.14) \quad \{\Phi_n(s')\}^2 - \{\Phi_n(s'')\}^2 \leq 2X C_1 h |s_n' - s_n''| + X^2 \|u'' - u'\|_{n-1}$$

が得られる。補題 2 により,

$$\Phi_n(s') + \Phi_n(s'') \geq 2b \quad (0 \leq n \leq N)$$

であるから,

$$(4.15) \quad |\Phi_n(s') - \Phi_n(s'')| \leq C_2 |s_n' - s_n''| + C_3 \|u'' - u'\|_{n-1}$$

となる。ここで, 補題 4 を用いれば, (4.12) が得られる。

Q. E. D.

§5. 定理の証明

5.1 §3 で定義した $s^{(l)}$ ($l \geq 0$) は性質 (M) をもつ。

実際, 定義により

$$s_n^{(0)} = \sqrt{b^2 + 2h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + 2h^2 \sum_{m=1}^{[b/h]} m g_m}$$

であるから,

$$s_0^{(0)} \geq b$$

であり, $f_n \geq 0$ であるから

$$s_n^{(0)} \geq s_{n-1}^{(0)}$$

$$\text{かつ, } s_N^{(0)} = \sqrt{F_N} \leq X$$

したがって, $s^{(0)}$ は性質 (M) をもつ。次に,

$$s^{(l)} = \Phi(s^{(l-1)})$$

であるから, 補題 2 により $s^{(l)}$ ($l \geq 1$) はすべて性質 (M) をもつことがわかる。

5.2 $s_0^{(l)} = b$ ($l \geq 1$) は, §3 における $s^{(l)}$ の作り方から明らかである。一般に, $n \geq 1$ のときには, 補題 5 により,

$$(5.1) \quad |s_n^{(l+1)} - s_n^{(l)}| \leq C_2 |s_n^{(l)} - s_n^{(l-1)}| + C_1 C_3 \sum_{i=1}^{n-1} |s_i^{(l)} - s_i^{(l-1)}|$$

が成り立つ。ここで,

$$(5.2) \quad |s_n^{(l+1)} - s_n^{(l)}| = Q^{(n)}(l) C_2^l$$

とおくと,

$$(5.3) \quad Q^{(n)}(l) \leq Q^{(n)}(l-1) + \frac{C_1 C_3}{C_2} \sum_{i=1}^{n-1} Q^{(i)}(l-1)$$

が得られる。任意の n に対して,

$$(5.4) \quad Q^{(n)}(0) = |s_n^{(1)} - s_n^{(0)}| \leq X - b$$

であることを用いると, 一般に

$$(5.5) \quad Q^{(n)}(l) \leq (X - b) \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{C_1 C_3}{C_2} \right)^p \binom{n-1}{p} \binom{l}{p}$$

となることがわかる。すなわち, $Q^{(n)}(l)$ は l に関する $(n-1)$ 次多項式で評価される。従って, (5.1) 式から,

$$(5.6) \quad \max_{0 \leq n \leq N} |s_n^{(l+1)} - s_n^{(l)}| \leq \left[\max_{0 \leq n \leq N} Q^{(n)}(l) \right] C_2^l \\ \leq O(l^{N-1}) C_2^l$$

となり, 仮定により $0 < C_2 < 1$ であるから, $l \rightarrow \infty$ とすれば上式の右辺は 0 に収束する。すなわち, $s^{(l)}$ は極限

$\hat{s}$ もつ。この $\hat{s}$ も性質 (M) をもつことは明らかである。

5.3 で述べたアルゴリズムから、

$$s^{(l+1)} = \Phi(s^{(l)})$$

であり、 $l \rightarrow \infty$ とすれば、 Φ の連続性から

$$\hat{s} = \Phi(\hat{s})$$

が成り立つ。すなわち、 $\hat{s}$ は求める境界であり、それに対する解を $\hat{u}_{m,n}$ とすれば、 $(\hat{s}, \hat{u}_{m,n})$ は、方程式系 (2.1) ~ (2.6) の解となる。

5.3 解の一意性

方程式系 (2.1) ~ (2.6) の解が 2 つあったとして、それぞれ $(s', u'_{m,n})$ および $(s'', u''_{m,n})$ とする。

s'_n と s''_n は、 $0 \leq n \leq n_0 - 1$ では等しく、 $n = n_0$ で初めて異なると仮定する。ここで、 $s'_{n_0} < s''_{n_0}$ としても一般性は失われない。補題 1 により

$$u'_{m,n_0} < u''_{m,n_0} \quad (0 \leq m \leq M)$$

となる。(2.5) 式に代入すると、

$$s'_{n_0} = \sqrt{F_{n_0} - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u'_{m,n_0}}$$

および

$$s''_{n_0} = \sqrt{F_{n_0} - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m u''_{m,n_0}}$$

であるから、

$$s'_{n_0} > s''_{n_0}$$

となり矛盾。従って、 $S'_{n_0} = S''_{n_0}$ でなければならぬ。

明らかに、 $S'_0 = S''_0$ であるから、数学的帰納法により、すべての n ($0 \leq n \leq N$) に対して、 $S'_n = S''_n$ となる。同時に、それぞれに対応する解 $u'_{m,n}$ と $u''_{m,n}$ も等しい。

文 献

- (1) H. Kawai and M. Natori, "On Numerical Solutions of Stefan Problem I", *Memoirs of Numerical Mathematics* No.1 (1974) 43-54
- (2) J.R. Cannon and C.D. Hill, "Existence, Uniqueness, Stability, and Monotone Dependence in a Stefan Problem for the Heat Equation", *J. Math. and Mech.* 17 (1967) 1-19