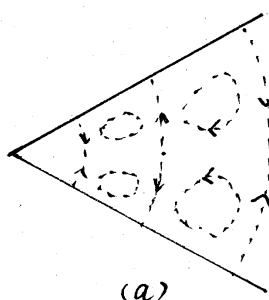


くさび状領域における3次元 Moffatt 渦

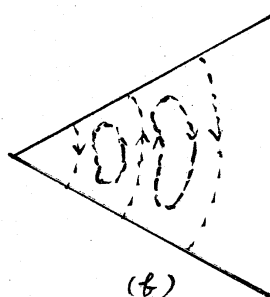
東大 理学部 橋本 英典

§1 はしりき

Moffatt (1964) は2枚の平面壁に挟まれたくさび状の領域において、壁が静止していても、たとえ遠くに攪乱が加えられることに對して、領域内に2次元の流れが生じ、



(a)



(b)

頂点に向って急減少するが無限に湧く渦模様の生じることとを流れからそのときのストークスの方程式にもとづいて示した。すなわち、半頂角を α とするとき $\alpha < 156^\circ$ ならば、二等分面に対して対称な流れ、(a) $\alpha < 146^\circ$ ならばさらに、¹⁾ 反対称な流れ (b) が可能であるという。これはストークスの方程式の固有解であって、このような角状あるいはカスプに近い領域にあらわれる一つの特異的な流れである。²⁻⁸⁾ 本研究会

に於いても次の金、佐野さらに徳田氏の講演で関連して話(3,4)
 2平面間の円柱、球、さらに3次元境界層のストークス域に
 ついて述べられるはずであるが、ここでは純粋な形で、くさび
 状領域の3次元流れについてこのような固有解の存在するこ
 とを示してみたい。

§ 2

粘性流体の内部の運動を支配するストークスの方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad \dots\dots (1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \dots\dots (2)$$

の一般解として、

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \phi_j) - 2 \phi_i, \quad \dots\dots (3)$$

$$p = 2\mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \quad \dots\dots (4)$$

をとろう。⁸⁾ 尤、 x_j は直交座標、 ϕ_j ($j = 1, 2, 3$) は調和関数でラプラスの方程式 $\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \dots\dots (5)$

を満足する。くさびの交線を $x_3 = z$ 軸に、 z 等分面 ($x_1 - x_3$ 面) を $\theta = 0$ とする円柱座標を (ρ, θ, z) とすれば速度成分 (v_ρ, v_θ, v_z) は(3)から、

$$v_r = \frac{\partial \phi_r}{\partial r} - 2\phi_r + z \frac{\partial \phi_3}{\partial r}, \quad \dots (6)$$

$$v_\theta = \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} - 2\phi_\theta + \frac{z}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} = (\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta) \phi_1 + (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta) \phi_2 + \frac{z}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta}, \quad \dots (7)$$

$$v_z = r \frac{\partial \phi_r}{\partial z} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - \phi_3, \quad \dots (8)$$

KKL

$$\phi_r = \phi_1 \cos \theta + \phi_2 \sin \theta, \quad \dots (9)$$

$$\phi_\theta = -\phi_1 \sin \theta + \phi_2 \cos \theta \quad \dots (10)$$

である。

さて渦度の θ 成分 ω_θ は (3), (6), (8) から

$$\omega_\theta = (\text{rot } \mathbf{V})_\theta = -2(\text{rot } \boldsymbol{\phi})_\theta = 2\left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{\partial \phi_\theta}{\partial z}\right) \quad \dots (11)$$

となるが、壁面 $\theta = \pm \alpha$ で $\omega_\theta = 0$, $v_z = 0$ を考慮すれば,

(11), (8) から境界上で

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial z} = \frac{\partial \phi_3}{\partial r}, \quad : \theta = \pm \alpha \quad \dots (12)$$

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial z} = \frac{\phi_3}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial z}$$

を満足しなければならない。これから ϕ_r を消去すれば,

$$r \frac{\partial \phi_3}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \phi_3 \quad : \theta = \pm \alpha \quad \dots (13)$$

となる。 r , z が壁上の変数であることに留意し、これを積

分すれば、

$$\phi_3 = 2g\left(\frac{z}{2}\right) \dots\dots (14)$$

ただし、 g は任意関数である。一般に $g=0$ であれば ϕ は、 z の1次の同次関数であり特殊なもので、その議論は別の機会に譲るとすれば、 $\phi_3=0$ となる。(12)から $\theta=\pm\alpha$ で ϕ_p は z に無関係で、 p だけの関数となるが、そこでは v_p が0なので(6)を用いれば、 $\phi_p = A e^{2p}$ を与える。特別の場合を除けば、 $A=0$ で境界条件としては $\phi_p=0$ をとれる。残る境界条件 $v_0=0$ を考慮すれば、(7)、(9)から ϕ_p に対し、

$$\theta = \pm\alpha \text{ で}$$

$$\begin{cases} \phi_p = \phi_1 \cos \alpha \pm \phi_2 \sin \alpha = 0 \end{cases} \dots\dots (15)$$

$$\begin{cases} (\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \sin \alpha) \phi_1 + (\pm \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \alpha) \phi_2 = 0 \end{cases} \dots\dots (16)$$

$$\begin{cases} \phi_3 = 0 \end{cases} \dots\dots (17)$$

を得る。さて、調和関数 Φ は円柱座標で、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0 \dots\dots (18)$$

を満足するので、変数分解によって解を求めれば、

$$\Phi = e^{i(\nu\theta + kz)} \varphi_\nu = e^{i(\nu\theta + kz)} \begin{cases} I_{\pm\nu}(k|p) \\ K_\nu(k|p) \end{cases} \dots\dots (19)$$

の重畳であることがわかる。ただし、 $I_\nu(\xi)$ 、 $K_\nu(\xi)$ は変形でベッセル関数であり、

$$\varphi_\nu'' + \frac{1}{\xi} \varphi_\nu' - (1 + \frac{\nu^2}{\xi^2}) \varphi_\nu = 0 \quad \dots (20)$$

を満足し.

$$K_\nu(\xi) = K_{-\nu}(\xi) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \pi \nu} [I_\nu(\xi) - I_\nu(\xi)] \dots (21)$$

の関係がある。従って (17) を補足する ϕ_3 の固有解は

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} \varphi_{\nu n} \cos \nu_n \theta \\ \varphi_{\nu m} \sin \nu_m \theta \end{Bmatrix} e^{ikz} \quad \dots (22)$$

で、 $\nu_n \alpha = n\pi$, $\nu_m \alpha = (m + \frac{1}{2})\pi$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) によって定まる普通の形を有するが、 ϕ_1, ϕ_2 に対しては、(15), (16) を連立させる必要がある。i) $\theta = 0$ について対称な流れでは、 ϕ_1 が θ について偶、 ϕ_2 が奇、ii) 反対称なものではその逆が期待されるので、

i) 対称解

ii) 反対称解

$$\begin{cases} \phi_1 = \varphi_\nu \sin \alpha \sin \nu \alpha \cos \nu \theta e^{ikz} \\ \phi_2 = -\varphi_\nu \cos \alpha \cos \nu \alpha \sin \nu \theta e^{ikz} \end{cases}, \begin{cases} \phi_1 = \varphi_\nu \sin \alpha \cos \nu \alpha \sin \nu \theta e^{ikz} \\ \phi_2 = -\varphi_\nu \cos \alpha \sin \nu \alpha \cos \nu \theta e^{ikz} \end{cases} \quad \dots (23)$$

をとれば、(15) は自動的に満足され、(16) も $\theta = \alpha$ だけで満足させればよいことになる。(23) を (16) に代入し、 $\theta = \alpha$ とすれば、 $\varphi_\nu \neq 0$ の ν を決定する固有値方程式

$$\nu \sin 2\alpha = \pm \sin 2\nu\alpha \quad \dots (24)$$

が得られる。これは 2次元の Moffatt の結果と完全に同型であり、臨界角も全く同一であることを示す。臨界角以下では

ν は複素数であり、定数値になるような解の組み合わせが必要なくとも同じ事情にある。 $\xi \rightarrow 0$ で

$$I_{\pm\nu}(\xi) \sim \left(\frac{\xi}{2}\right)^{\pm\nu} (1 + O(\xi^2)) \sim \exp(\pm\nu \log \frac{\xi}{2}) \quad (25)$$

であるので、交代する渦の強さの比も頂角の近くでは全く同一になる。 $\kappa \rightarrow 0$ とすれば二次元の場合が得られる。さらに、異った値について重ね合わせれば、種々の複雑な渦を構成できる。K と之は、 $K_{i\nu}(\kappa|\rho_0)$ (ρ_0 は定数) の重ねに対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa z} K_{i\nu}(\kappa|\rho_0) K_{i\nu}(\kappa|\rho_0) d\kappa = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \frac{1}{c h \pi \nu} P_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho_0^2 + \rho_2^2 + z^2}{2\rho_0\rho_2}\right) \quad (26)$$

K にし、 $P_{-\frac{1}{2}}$ は円錐関数が得られるが、これは $\rho = \rho_0$, $z = 0$ に特異点を持つ流れになっている。このような解が含まれる場合としては、くさび領域に於ける微小物体の運動などが考えられる。⁶⁾

文献

- 1) Moffatt, H.K.: J. Fluid Mech. 18 (1964) 1.
- 2) Schubert, G.: J. Fluid Mech. 27 (1967) 647.
- 3) Tokuda, N.: J. Fluid Mech. 53 (1972) 129.
- 4) Tokuda, N.: J. Phys. Soc. Japan 38 (1975)

1187

5) Wakiya, S. : J. Phys. Soc. Japan 39(1975)

1113

6) Sano, O. & Hasimoto, H: J. Phys. Soc. Japan 40(1976) 884.

7) 阿曾義之 : 数理研 講究録 52(1968)71.

8) 金子幸臣 : 数理研 講究録 187(1973)26.

9) 今井功 : 流体力学(前編) 裳華房
(1973) 313.