

Subequivalent systems of bimodules

河東泰之 (東大・数理)
Yasuyuki Kawahigashi

この仕事の目的は, subparagroup にあたる概念を導入し, subparagroup と中間環の間の「量子 Galois 対応」と確立することである.

そのため, 佐藤 [S] による同値な subfactor/paragroup の定義から出発する. Finite index, finite depth を持つ subfactor $N \subset M$ から生じる N - N bimodule のシステムと M - M bimodule のシステムは「同じ」情報を含んでいると考えられる. この考えに基づき, Ocneanu [O1] は, このようにして生じる 2 つの bimodule のシステムを equivalent と定義した. さらに, 佐藤は, 二つの subfactor が同値な bimodule のシステムを生じる時, これらの subfactor は (あるいは対応する paragroup は) 同値であると定義した. (ここでは, paragroup とは, finite index, finite depth の subfactor から生じるもののこととする. Subfactor に trivial relative commutant の条件は仮定しない.)

次に paragroup π_1 が, A - A , A - B , B - A , B - B の 4 種の bimodule からなるとする. (正確には, 抽象的な paragroup の話なので, bimodule ではなく, fusion rule algebra と quantum $6j$ -symbol で話を進めるべきだが, hyperfinite の場合の話をするので, 簡単のため最初から bimodule で話を進める.) そして, C - C , C - D , D - C , D - D の 4 種の bimodule からなる, paragroup π_2 を別に取り. π_2 の C - C bimodule のシステムが π_1 の A - A bimodule のシステムとサブシステムと同型である時, π_2 は π_1 の subparagroup であると定義する. さらに, 二つの paragroup π_1, π_2 について, π_1 と同値な paragroup π_0 が, π_2 を subparagroup として持つように選べる時, π_2 は π_1 に subequivalent であると定義する.

π_2 が π_1 に subequivalent で, さらに π_3 が π_2 に subequivalent ならば, π_3 は π_1 に subequivalent である. π_1 が π_2 に subequivalent で, さらに π_2 が π_1 に subequivalent ならば, π_1 と π_2 は equivalent である.

一方, $N \subset M$ に対する generalized intermediate subfactor の概念が Ocneanu [O2] によって導入されている. $N \subset P \subset M$ となる P が明らかに intermediate subfactor であるが, このようなものに限らず, 一般化された定義を導入することがここでの目的には必要である. (量子群から生じる subfactor などでは, たいていの場合, 上のような P は trivial なものしかない. しかし, 下に定義する generalized intermediate subfactor はおもしろいものが存在することがしばしばある.)

$N \subset M$ を index 有限の subfactor とする. $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ を Jones tower とし, p を $N' \cap M_k$ の non-zero projection とする. $pN \subset P \subset Q \subset p(M_k)p$ となるような subfactor $P \subset Q$ を $N \subset M$ の generalized intermediate subfactor と定義する.

Ocneanu は, この定義に基づき, E_6, E_8 型の subfactor が, それぞれ A_{11}, A_{29} 型の subfactor の generalized intermediate subfactor として実現できることなどを [O2] で示している.

このとき, 次の定理が成り立つ.

Theorem. $N \subset M$ を *finite index, finite depth* を持つ *hyperfinite II_1 factor* の *inclusion* とし, π を対応する *paragroup* とする. このとき, $N \subset M$ の *generalized intermediate subfactor* の同型類と, π の *subequivalent paragroup* の同型類との間に 1 対 1 対応が存在する.

証明には佐藤 [S] の, commuting square から 2 つの subfactor を作る技術を使う. [S] については詳しくは本研究報告集内の報告を参照のこと.

References

[O1] A. Ocneanu, An invariant coupling between 3-manifolds and subfactors, with connections to topological and conformal quantum field theory. preprint, 1991.

[O2] A. Ocneanu, Paths on Coxeter diagrams: From Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors, in preparation.

[S] N. Sato, Constructing a non-degenerate commuting square from equivalent systems of bimodules, preprint 1997.