

Rees algebra の Gorenstein 性について。

名大 理学部 池田 信

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noetherian local rings とする。

$$R(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n, \quad G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

とおき $R(A)$ を A の Rees algebra $G(A)$ を A の associated graded ring という。 $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_r)$ とすると, $R(A)$ は一変数多項式環 $A[X]$ の subring $A[a_1X, \dots, a_rX]$ と同一視することができる。 $\deg X = 1$ とおくことにより $R(A)$ に graded ring の構造が入る。 $M = (a_1, \dots, a_r, a_1X, \dots, a_rX)R(A)$ とおく。

本稿の目的は $R(A)$ が Gorenstein になるための条件を与えることである。 A が Cohen-Macaulay のときには, 後藤氏と下田氏によって得られた次の結果がある。

定理 A を Cohen-Macaulay, $d = \dim A \geq 2$ とすると, $R(A)$ が Gorenstein ring になるための必要十分条件は $G(A)$ が Gorenstein ring であり $a(G(A)) = -2$ となることである, ただし

$$a(G(A)) = \max \{ n \mid H_M^d(G(A))_n \neq 0 \}.$$

“ $R(A)$ が Gorenstein ならば A もそうであるか?” という問題を考えるのは自然であろう。しかしこれは一般には正しくない。実際, 3次元 Buchsbaum, non-Cohen-Macaulay local ring で Rees algebra が Gorenstein になるものがある。したがって上述の定理を一般化する必要がある。本稿の主定理は次のように述べることができる。

定理 1. $d = \dim A \geq 2$, $K_A, K_{G(A)}$ をそれぞれ $A, G(A)$ の canonical module とする。このとき次は同値,

- 1) $R(A)$ は Gorenstein
- 2) a) $R(A)$ は Cohen-Macaulay,
 b) $K_A \cong A$
 c) $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$.

§ 1 準備。

以後, 簡単のため, k は無限体とする。まづ $R(A)$ が Cohen-Macaulay になるための条件を思い出そう。

Proposition 1 $d = \dim A \geq 1$ とすると次は同値。

- 1) $R(A)$ は Cohen-Macaulay.
- 2) a) $a(G(A)) < 0$
 b) $i < d$ に対して

$$H_M^i(G(A))_n = \begin{cases} H_M^i(A) & (n=-1) \\ (0) & (n \neq -1) \end{cases}$$

このとき, $A, G(A)$ は Buchsbaum で $I(A) = I(G)$ 。

次に, 定理 1 を証明するために必要な事実を述べる。

Lemma 2 $l(H_M^i(A)) < \infty, i < \dim A$ とする, ここで $l(E)$ は A -module E の長さを表す。このとき,

$$H_M^{d+1}(R(A))_n = (0), n \geq 0.$$

証明は次元に関する induction で容易にできる。

Lemma 3 $\dim A = d \geq 2$ とする。 $a \in \mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m}$ の minimal reduction の minimal generator の一部になるものとする。

$\bar{R} = R(A)/(a, ax)$ とおくと, $R(A)$ が Gorenstein のとき $H_M^{d-1}(\bar{R}) = (0)$ となる。

(証明) 簡単のため, $R = R(A)$ とおく。 R は Gorenstein だから local duality により, $\text{Ext}_{R/aR}^1(\bar{R}, R/aR) = (0)$ を示せばよい。 $\mathfrak{m} = (a, a_2, \dots, a_r)$ とすると, 次の exact sequence がある。

$$(R/aR)^{r-1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}} R/aR \xrightarrow{ax} R/aR \rightarrow \bar{R} \rightarrow 0$$

よって,

$$\text{Ext}_{R/aR}^1(\bar{R}, R/aR) = \frac{(aR : \mathfrak{m}R)}{(a, ax)R} = \frac{(a, ax)R}{(a, ax)R} = (0).$$

Lemma 4 $R(A)$ が Cohen-Macaulay, $\text{Hom}_{R(A)}(\mathbb{k}, H_M^d(G(A)))_n = 0$ $n \neq -2$ とする, $\text{Hom}_{R(A)}(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R(A)))_n = 0$ $n \neq -1$

(証明) $R = R(A)$, $G = G(A)$ とおく。

$$0 \rightarrow R_+ \rightarrow R \rightarrow A \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

$$0 \rightarrow R_+(1) \rightarrow R \rightarrow G \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

よって

$$0 \rightarrow H_M^d(A) \rightarrow H_M^{d+1}(R_+) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

$$0 \rightarrow H_M^d(G) \rightarrow H_M^{d+1}(R_+)(1) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \rightarrow 0 \text{ (exact)}.$$

Sacle をとると,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^d(A)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R)) \rightarrow \text{Ext}_R^1(\mathbb{k}, H_M^d(A)) \text{ (exact)}.$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^d(G)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+)(1)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R)) \text{ (exact)}.$$

これより, $\text{Ext}_R^1(\mathbb{k}, H_M^d(A))_n = 0$, $n \leq -2$ に注意すると,

$$\text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+))_n \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))_n, \quad n \leq -2,$$

$$\text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+))_n \hookrightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))_{n-1}, \quad n \leq -2.$$

したがって, $\text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))_n = 0$, $n \leq -2$. 結論は Lemma 2 より出る。

§2 定理1の証明。

1) $\Rightarrow$ 2). 次の exact sequence がある。

$$(*) \begin{cases} 0 \rightarrow H_M^{d-1}(\bar{R}) \rightarrow H_M^d(A) \rightarrow H_M^d(R/\alpha R) \rightarrow H_M^d(\bar{R}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H_M^{d-1}(\bar{R}) \rightarrow H_M^d(G)(-1) \rightarrow H_M^d(R/\alpha R) \rightarrow H_M^d(\bar{R}) \rightarrow 0, \end{cases}$$

ただし, α は Lemma 3 のようにとる。Lemma 3 より,

$H_M^{d-1}(\bar{R}) = 0$ 。 Socle をとることにより, 2) の a), c) が
出る。

2) $\Rightarrow$ 1). (*) より $H_M^{d-1}(\bar{R}) = 0$ がわかる。 Lemma 2 より,

$H_M^d(\bar{R})_n = 0, n \geq 0$, c) と Lemma 4 より

$\text{Hom}_R(k, H_M^d(R/\alpha R))_n = 0 \quad n \neq 0$ がわかる。 Socle
をとることにより,

$$k \cong \text{Hom}_R(k, H_M^d(A)) \cong \text{Hom}_R(k, H_M^d(R/\alpha R)).$$

よって, R は Gorenstein。

§3 example.

Example の構成のため, 次の結果を用いる。

Proposition 5 (A, m, k) を 3 次元 Noetherian local ring
 $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, a_3)$ を m の minimal reduction とする。

$$I = (a_1, a_2) : a_3 + (a_2, a_3) : a_1 + (a_1, a_3) : a_2 + m^2 \text{ とおく。}$$

このとき次は同値。

1) $R(A)$ は Cohen-Macaulay

2) a) $m^3 = \mathfrak{q} m^2$

8) $l(I/m^2) = 3(l(A/\mathfrak{q}) - e(A)) + 3$, ただし, $e(A)$ は A の multiplicity.

さて, A を 3次元 local ring で $R(A)$ が Cohen-Macaulay とする。 A の embedding dimension が 6 とする。 A が Cohen-Macaulay ではないとすると,

$$6 \leq l(I/m^2) \leq l(m/m^2) = 6$$

よって, $m = I$ 。 Prop 1 より, A が Buchsbaum であることに注意すると, $m^2 = \mathfrak{q}m$ 。 したがって A は maximal embedding dimension の Buchsbaum ring。 $I(A) = l(A/\mathfrak{q}) - e(A) = 1$ だから, $emb(A) = e(A) + \dim A + I(A) - 1$ より, $e(A) = 3$ 。

Example k を $ch(k) = 2$ の体, $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4$ を不定元とする。

$$A = k[x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4] / \mathcal{O} = k[x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4]$$

$\mathcal{O} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, y_1 y_4, y_2 y_4, y_3 y_4, y_1 y_2 - x_3 y_4, y_2 y_3 - x_1 y_4, y_1 y_3 - x_2 y_4)$ とおくと, A は non-Cohen-Macaulay Buchsbaum ring で $R(A)$ は Gorenstein である。

(証明) 次の exact sequence を考えよう。

$$(\star) 0 \rightarrow A/(0; y_4) \rightarrow A \rightarrow A/y_4 A \rightarrow 0$$

$$A/y_4 A \cong k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, (y_1, y_2, y_3)^2)$$

Prop 5 より $A/y_4 A$ の Rees algebra $R(A/y_4 A)$ は Cohen-Macaulay である。上の注意より $e(A/y_4 A) = 3$ 。一方, $ch(k) = 2$ であることに注意すると,

$$(0; y_4) = (y_1, \dots, y_4)$$

よって, $A/(0; y_4) \cong k[x_1, x_2, x_3]$ とくに $e(A/(0; y_4)) = 1$ 。 $(\star)$ より $e(A) = 4$ 。

$g = (x_1, x_2, x_3)$ とおくと $l(A/g) = 5$ 。簡単な計算により

$l(I/m^3) = 6$ 。 Proposition 5 より, $R(A)$ は Cohen-Macaulay。 Ω は homogeneous polynomial で生成されているので $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$ を示せば十分。 L を Ω の生成元で生成された $k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4]$ の ideal とすると,

$$G(A) \cong k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4]/L = k[x_1, \dots, y_4]。$$

$S = k[x_1, x_2, x_3]$ とおくと, $G(A)$ は有限生成 S -module。

$G(A)$ の canonical module を計算しよう。 S は多項式環と同型で $G(A)$ は S -module として $1, y_1, \dots, y_4$ で生成されていることから次の exact sequence を得る。

$$0 \rightarrow S(-2) \xrightarrow{[0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ 0]} S \oplus S(-1)^4 \xrightarrow{\varphi} G(A) \rightarrow 0,$$

ここで, $S \oplus S(-1)^4$ の base $e_0, \dots, e_4$ は, $\varphi(e_0) = 1, \deg e_0 = 0,$

$\varphi(e_i) = y_i$, $\deg e_i = 1$ ($1 \leq i \leq 4$) とする。よって

$$K_{G(A)} = \text{Hom}_S(G(A), S(-3))$$

$$= \ker(\text{Hom}_S(S \oplus S(-1)^4, S(-3)) \rightarrow \text{Hom}_S(S(-2), S(-3)))$$

したがって, $K_{G(A)}$ は S -module として e_0^* , $x_3 e_2^* - x_2 e_3^*$, $-x_3 e_1^* + x_1 e_3^*$, $x_2 e_1^* - x_1 e_2^*$, e_4^* で生成される, ただし, e_i^* は e_i の dual base として $\deg e_0^* = 3$, $\deg e_i^* = 2$ ($1 \leq i \leq 4$)。 $G(A)$ は $K_{G(A)}$ に,

$$(g \cdot f)(h) = f(gh) \quad f \in \text{Hom}_S(G(A), S(-3)), g, h \in G(A) \text{ と作}$$

用している。 $\text{ch}(K) = 2$ であることに注意すると,

$$y_4 \cdot e_4^* = e_0^*$$

$$y_1 \cdot e_4^* = x_3 e_2^* - x_2 e_3^*$$

$$y_2 \cdot e_4^* = -x_3 e_1^* + x_1 e_3^*$$

$$y_3 \cdot e_4^* = x_2 e_1^* - x_1 e_2^*$$

となることがわかる, これは, $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$ を示している。

Remark. $\dim A = 3$ のとき, $R(A)$ が Gorenstein ならば

$$\dim_{A_m} m/m^2 = 3h + 4, \quad h = \ell(H_m^2(A))$$

となることが知られている。この意味で, 上述の example は最も簡単なものである。

Reference

- [1] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras of Cohen-

Macaulay rings , preprint.

- [2] S. Gato and K. Watanabe, On graded rings. I. J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.
- [3] S. Ikeda, The Cohen-Macaulayness of Rees algebras of local rings, to appear in Nagoya Math. J. 51 (1973), 25-43.