

修士論文 (2002年度)

散逸カオス系における量子-古典対応

早稲田大学大学院 理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
大場・中里研究室 太田 幸宏¹

目次

1	はじめに	594
1.1	カオスと量子力学	594
1.2	散逸カオス系における量子-古典対応	594
2	量子開放系のダイナミックス	595
2.1	量子開放系について	595
2.2	リンドブラッド型マスター方程式	595
2.3	Quantum State Diffusion (QSD)	596
3	ダフィン振動子の初期値鋭敏性に基づく解析	597
3.1	ダフィン振動子	597
3.2	量子化されたダフィン振動子	598
3.3	初期値鋭敏性の導入とそれに基づく量子-古典対応の数値的解析	602
3.4	本節のまとめ	607
4	散逸系における半古典的手法の開発	608
4.1	半古典的手法の開発の動機	608
4.2	散逸系の記述	608
4.3	時間発展を記述する積分核	611
4.4	本節のまとめ	620
5	結論	620
A	式(10)の導出	622
B	リウビル空間について	623
B.1	導入	623
B.2	$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形演算子	624
B.3	式(12)の証明	625

¹E-mail: ota@suou.waseda.jp

1 はじめに

1.1 カオスと量子力学

量子-古典対応は量子論の基礎に関連する非常に重要な問題である。特に古典系がカオス系(もしくはより一般の非可積分系)の場合、議論は難しい。その理由はいくつか考えられる。まず、古典系の非可積分性により、ボーア-ゾンマーフェルトの量子化条件、もしくはアインシュタイン-ブリリアン-ケラーの量子化条件 [1] を適用することができなくなってしまう。なぜなら、これらの量子化条件では保存量である作用変数の存在が前提となっているからである。摂動によりトーラスが破壊されてしまったような非可積分の状況ではこれらの量子化条件が使えなくなってしまうことになる。さらにより一般的な正準量子化や経路積分量子化を考えるとしてもまだ問題は残っている。それは量子系の場合、古典系のカオスに対応する現象がそのダイナミックスの性質から一般には存在し得ないという点である [2, 3, 4].²

したがって、カオス系について量子-古典対応を論ずる際には、量子系における測定量にその対応する古典系の軌道の情報がいかに関連するかが中心の課題となる。これまでこうした立場での研究は主としてハミルトン系に対するものであり、非常にすばらしい成果が数多くあがっている。乱数行列理論に基づく数値解析から、古典系の正則-カオス転移に対応して、量子系のエネルギー準位におけるポアソン-ウィグナー転移がおこることが知られている [2, 3]。また半古典的な解析によるトレース公式では量子系のエネルギースペクトルを古典系の軌道の情報により表現することが可能となっており、特に強いカオス系で威力を発揮している [7]。ハミルトン系の取り扱いについてより詳しくは文献 [2, 3] にある。

1.2 散逸カオス系における量子-古典対応

しかし、量子-古典対応という問題の立場ではハミルトン系だけに議論を限定する必然性はない。特にカオスはハミルトン系特有の現象ではなく、ハミルトニアンが存在しない系、つまり散逸系でも発生しうる。

本研究では量子開放系の一つの応用として散逸カオス系の量子-古典対応を論ずる。³ 量子開放系の枠組みでは、注目系がより大きな閉じた系(したがって、ハミルトニアンが定まっている)の中に埋め込まれており、注目系以外の部分すなわち環境との相互作用を考えることにより、注目系を開放系とみなすことができる。

散逸系における量子カオスの研究には幾つか動機がある。測定による非干渉化と量子系の古典的側面がどのように関連しているかを研究しているものもある [10, 11, 12].

²この点は様々な角度から議論されている。シュレーディンガー方程式の線形性、ユニタリー発展が等長変換であることから帰結される初期値鋭敏性の可能性の排除、計算時間の観点からの考察、エネルギースペクトルの不連続性などである。ただしどのような量をみて量子系におけるカオスを捉えるべきかは議論の余地があるように思われる。こうしたことに関連する研究として、例えば文献 [5, 6] がある。

³散逸と量子力学の関係については、それ自体が非常に興味深い量子論の基礎にかかわる問題である。例えば文献 [8, 9] で論じられている。

また古典系でカオスが情報の消失として捉えることができるという視点から、から量子系においてもエントロピー生成を考えることにより、量子カオスという現象を特徴づけようとする立場 [13] もある。本研究では、明確なハミルトニアンが存在しない古典系、つまり散逸系の量子化とそこでの量子－古典対応の問題に関心がある。この立場で、ダフィン振動子という散逸カオス系のモデルを取り上げ、シュミレーションに基づくダイナミックスの解析をおこなう。またさらに、より一般に解析的な半古典的手法の開発を試みる。特に時間発展を記述するの積分核の経路積分表示に関する考察を中心におこなう。

2 量子開放系のダイナミックス

2.1 量子開放系について

本研究では量子開放系のダイナミックスを、散逸系を量子化するための一手法として捉えている。ここでは量子開放系を考える動機や目的について簡単に触れる。より詳しくは文献 [14, 15, 16, 17] で論じられている。

量子力学の枠組みの中で純粋にある系からの混合化、特に系の熱平衡化といった不可逆過程、そして測定過程による非干渉化を説明するため量子開放系のダイナミックスが考えられている。そこでは注目している系（注目系）がより大きな孤立した系（全体系）の中に埋め込まれており、注目系以外の部分すなわち環境との相互作用を考えて、量子系の記述をおこなう。注目系を表すためには全体系の密度行列から環境に関する情報を平均化することにより得られる縮約された密度行列を用いる [18]。この縮約された密度行列は純粋だけでなく混合にもなりえる。⁴ こうして全体系は閉じた系、つまり量子力学に従い時間反転に対し不変なユニタリー発展をするが、注目系の縮約された密度行列は純粋から混合へと時間発展する可能性がでてくることになる。このような部分系への縮約は系の混合化、非干渉化の有力な説明となっている。

2.2 リンドブラッド型マスター方程式

量子開放系のダイナミックスをミクロなモデルから導出するのは非常に難しい問題である。特に本研究のようにカオスを扱う場合、注目系のポテンシャルが非線形になるなどの難点が存在する。そこでここでは量子開放系の現象論的な記述を採用し、そのダイナミックスのもとで解析をおこなうことにする。

本研究では注目系のダイナミックスをマルコフ的な時間発展に限定する。このような限定の正当性は扱う系により決まるものである。速度の1次に比例する散逸項をもつダフィン振動子についてはマルコフ的な時間発展のもと、期待値方程式の意味で、確かにこの散逸項を記述することができる。この点は3.2節で再び述べる。また注目系に対し環境が電磁場であるような比較的相互作用が弱いような実験状況のもとでは、マルコ

⁴注目系と環境の間に相互作用がある、つまり相関があるためである [19]。

フ的な時間発展による記述は良い近似になっている [2, 20, 21, 22]. このことに関連して非調和振動子を熱浴と相互作用させたときのマルコフ近似の妥当性は文献 [23] で論じられている. マルコフ的な時間発展の仮定のもと, 密度行列を密度行列へ時間発展させる現象論的な方程式の一般形としてリンドブラッド型マスター方程式が知られている [16, 17, 24]:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{j=1}^m \left(\hat{L}_j \hat{\rho} \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \right). \quad (1)$$

ここで $\hat{\rho}$ は密度行列, $\hat{H}$ は自己共役演算子である. また $\hat{L}_j$ はリンドブラッド演算子と呼ばれている. $\hat{H}$ と $\hat{L}_j$ を記述したい現象にあわせて適当に選ぶことにより, 量子開放系の時間発展が記述できることになる. また式 (1) の $\hat{H}$ と $\hat{L}_j$ は時間に陽に依存していないことに注意して欲しい. 式 (1) において $\hat{H}$ に関連する項はユニタリ的な時間発展を表している. そのため以下では単に $\hat{H}$ をハミルトニアンと呼ぶことにする. また式 (1) の $\hat{H}$ に関連する項はマスター方程式のハミルトン部と呼ばれる. $\hat{L}_j$ に関連する項が非ユニタリ的な時間発展を含んでおり, それゆえマスター方程式の散逸部と呼ばれる. 密度行列を密度行列へ時間発展させるという意味は, 式 (1) は密度行列が満たすべき性質である $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ と正值性を保存するダイナミクスになっているということである.⁵ 本研究ではこの式 (1) をもとにして量子開放系のダイナミクスを現象論的に扱う.⁶

2.3 Quantum State Diffusion (QSD)

3節では式 (1) を数値的に解析する. そのための手法として Quantum State Diffusion (略して QSD) を用いている [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]. QSD はリンドブラッド型マスター方程式と同等な定式化であり, 適当な確率過程を導入することで密度行列をベクトルへ “ときほぐす” ことにより得られる. QSD には様々な形式が存在するが, ここでは次式のようなベクトルについて非線形な伊藤型確率微分方程式 [37, 38] で記述されるものを採用する.⁷

$$\begin{aligned} |d\psi\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi\rangle dt + \sum_{j=1}^m \left(\langle \hat{L}_j^\dagger \rangle \hat{L}_j - \frac{1}{2} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j - \frac{1}{2} \langle \hat{L}_j^\dagger \rangle \langle \hat{L}_j \rangle \right) |\psi\rangle dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left(\hat{L}_j - \langle \hat{L}_j \rangle \right) |\psi\rangle d\xi_j. \end{aligned} \quad (2)$$

⁵特にリンドブラッド型マスター方程式は正值性よりもさらに強い完全正值性という性質を備えている [14, 16, 24, 25].

⁶ミクロなモデルからのマスター方程式の導出については文献 [17, 26, 27, 28, 29, 22] などで詳しく論じられている.

⁷ベクトルについて非線形になっているのは $\|\psi\| = 1$ を保つためである. これは数値計算のためのテクニカルな条件である. この条件を破るような QSD も存在し, それはベクトルに関して線形である [39]. この形式は 4.3.1 で用いるので, そこで議論をする. なおどちらの場合も $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ は成立している.

ここで $d\xi_j$ は m 個 (リンドブラッド演算子の数と等しい) の互いに独立な複素ウィナー過程の微小増分であり, $dtM(d\xi_j) = 0$, $M(d\xi_i, d\xi_j) = 0$, $M(d\xi_i^* d\xi_j) = \delta_{ij}dt$ となっている. また $\langle \dots \rangle \equiv \langle \psi | \dots | \psi \rangle$ である. 記号 M を確率過程に対するアンサンブル平均をとることを意味するとすれば, 密度行列 $\hat{\rho}$ と演算子 $\hat{O}$ に対する量子力学的な期待値はそれぞれ

$$\hat{\rho} = M(|\psi\rangle\langle\psi|), \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}) = M(\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle)$$

となる. QSD では密度行列の代わりにベクトルの時間発展で数値計算をおこなうため, 用いる基底の数が多くなるような系, 例えば多自由度系, 古典極限 (相空間の体積は古典的状況になればなるほど大きくなる), 非線形問題などにおいて, 有効な数値計算の道具となる. 特に文献 [35, 40] において開発されたアルゴリズムは極めて優れたものである. 本研究ではこのアルゴリズムを用いている.

QSD には数値計算上の利点もあるが, 本研究の中ではもう一つ重要な役割を果たしている. つまり時間発展の積分核を経路積分表示する際に QSD の経路積分表示を用いている. 詳細は 4.3.1 節で議論する.⁸

3 ダフィン振動子の初期値鋭敏性に基づく解析

本節ではダフィン振動子という散逸カオス系の一例を通じて, 量子-古典対応を議論する. この系を扱う動機は幾つかある. まず, 既に本研究と同じモデルで解析をおこなった文献 [30] では, 古典極限においては非常に興味深い結果を得られているものの, 散逸量子カオスにおける量子-古典対応を議論する上では不十分である点がある. 事実, 本研究において新たに導入した初期値鋭敏性に基づく解析により, 古典から量子へのクロスオーバー現象を明確にできる. また, 散逸量子カオスに関連した実験も提案されている. 文献 [20] とそこに挙げられている論文に詳しく論じられている. 特に文献 [20] では, ダフィン振動子そのものではないが, 実験系に対応した散逸系で量子カオスを議論している. さらに, 量子カオスだけでなく他の様々な量子力学の基礎と関連する問題を含んでいる. 具体的には量子トンネル効果における散逸の影響 [26], 量子確率共鳴現象 [43] などがある. 最後に, 古典系としても非常に興味深い特性をもつ点がある [44]. 本章の主たる結果は上に挙げた第一の動機に関するものである.

3.1 ダフィン振動子

古典力学における散逸カオス系の大きな特徴はカオスが散逸項と周期的な外力の存在により引き起こされる点にある. 運動方程式に含まれるパラメータはこれらの項と関連しており, 適当なパラメータでカオスが発生する. 位置と運動量 (速度) により張ら

⁸QSD のような確率的シュレーディンガー方程式により系を記述する試みは, いわゆる “波束の収縮” をダイナミカルに記述しようとする立場から発展していった. それに関連した文献としては QSD の紹介の際に挙げたもののほかに [41] などがある. また数学的な取り扱いについては [42] などで詳細に議論されている.

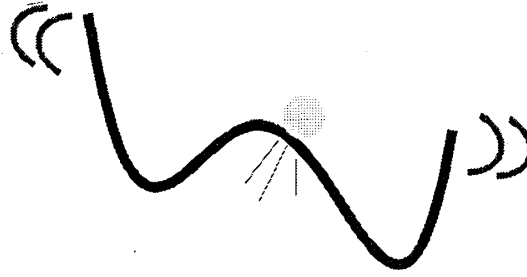


図 1: ダフィン振動子

れる相空間に時間を加えることで構成される拡大相空間を考える. 外力の周期の整数倍ごとにこの拡大相空間を時間軸 t に垂直な平面で切断し, 軌道とこの切断面の交点を一枚の平面に射影することでポアンカレ断面が得られる. そしてカオス的ダイナミックスの存在はポアンカレ断面上に現れるフラクタル次元を持った奇妙なアトラクターで特徴付けられる⁹. 連続的な時系列の中での運動には構造のようなものはみられないが, こうした時間を離散化することで得られる断面上に精密な構造が現れるのである [45].

ダフィン振動子はこうした散逸カオス系の一例である [46, 47, 48, 49]. 運動方程式は次式で与えられる:

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + x^3 - x = g \cos(\Omega t). \quad (3)$$

式 (3) の左辺第 2 項は散逸項を, 左辺第 3 項と第 4 項あわせて二重井戸のポテンシャル力を, 右辺は周期 Ω の外力をそれぞれ表している [図 (1) を参照]. パラメータ $(\Gamma, g, \Omega) = (0.125, 0.3, 1.00)$ のときカオス, つまりポアンカレ断面上に奇妙なアトラクターが出現する. 以下の解析においても同一のパラメータを用いている.

3.2 量子化されたダフィン振動子

3.2.1 ハミルトニアンとリンドブラッド演算子の選択

ダフィン振動子を量子化するためハミルトニアン $\hat{H}$ とリンドブラッド演算子 $\hat{L}$ を次式のように選ぶ.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{4l^2}\hat{x}^4 - \frac{m\omega_0^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{\gamma}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) - gml\omega_0^2 \cos(\omega t)\hat{x}, \quad (4a)$$

$$\hat{L} = \sqrt{\frac{m\omega_0\gamma}{\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{\gamma}{m\omega_0\hbar}} \hat{p}. \quad (4b)$$

ここではリンドブラッド演算子は一つだけ使う. 式 (4a) の右辺第 4 項は注目系と環境との間の相互作用の結合定数の大きさのくりこみに対応している. 実際, 正準変換 $x \rightarrow x$,

⁹アトラクターとは相空間内のほとんど全ての初期条件が時間発展により時刻無限大の極限で引き寄せられるような集合である.

$p \rightarrow p - \gamma m x$ を施すことで次式を得る:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m^2 \omega_0^2}{4l^2} \hat{x}^4 - \frac{m^2 \omega_0^2}{2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \right) \hat{x}^2 - gml\omega_0^2 \cos(\omega t) \hat{x}.$$

さて式 (1) における $\hat{H}$ は陽には時間に依存しない. しかし式 (4a) は陽な時間依存性があるため, 本来の意味でリンドブラッド型のマスター方程式ではない. ここでは外力として形式的に式 (1) のハミルトン部に付け加えた項として理解することにする.

3.2.2 無次元化とスケール因子 β の導入

$\hat{H}_\beta \equiv \hat{H}/\hbar\omega_0$, $\hat{K} \equiv \hat{L}/\sqrt{\omega_0}$, $\hat{Q} \equiv \sqrt{m\omega_0/\hbar} \hat{x}$, $\hat{P} \equiv \sqrt{1/m\omega_0\hbar} \hat{p}$, $\tau \equiv \omega_0 t$, $d\zeta \equiv \sqrt{\omega_0} d\xi$, $\Omega \equiv \omega/\omega_0$, $\Gamma \equiv \gamma/\omega_0$ and $\beta^2 \equiv \hbar/ml^2\omega_0$ といったスケール変換を施し, 式 (4a), 式 (4b) 及び式 (2) を無次元化した形に書き換える:

$$\hat{H}_\beta = \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{\beta^2}{4} \hat{Q}^4 - \frac{1}{2} \hat{Q}^2 + \frac{\Gamma}{2} (\hat{Q} \hat{P} + \hat{P} \hat{Q}) - \frac{g}{\beta} \cos(\Omega \tau) \hat{Q}, \quad (5a)$$

$$\hat{K} = \sqrt{\Gamma} (\hat{Q} + i\hat{P}), \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} |d\psi\rangle &= -i\hat{H}_\beta|\psi\rangle d\tau + \left(\langle \hat{K}^\dagger \rangle \hat{K} - \frac{1}{2} \hat{K}^\dagger \hat{K} - \frac{1}{2} \langle \hat{K}^\dagger \rangle \langle \hat{K} \rangle \right) |\psi\rangle d\tau \\ &\quad + (\hat{K} - \langle \hat{K} \rangle) |\psi\rangle d\zeta, \end{aligned} \quad (5c)$$

$$M(d\zeta) = M(d\zeta d\zeta) = 0, \quad M(d\zeta^* d\zeta) = d\tau. \quad (5d)$$

スケール因子 β^2 は $\hbar$ と注目系の特徴的な作用 $S_{cha} = ml^2\omega_0$ の比である. β を数値計算において変化させることは実質的に $\hbar$ を変化させることに対応し, 系に対してスケール変換を施すことになる. つまり β をゼロに近づけることにより

$$\frac{\Delta Q}{\bar{Q}}, \quad \frac{\Delta P}{\bar{P}}$$

はゼロに近づく. ここで $\hat{O}$ をある線形演算子としたとき,

$$\bar{O} = M[\langle \hat{O} \rangle], \quad \Delta \bar{O} = \sqrt{M[\langle (\hat{O} - \bar{O})^2 \rangle]}$$

である. こうして系は古典的な状況に近づいてゆくという直感的な描像が得られる.

3.2.3 ハミルトニアンとリンドブラッド演算子の選択の妥当性

ここではハミルトニアンとリンドブラッド演算子を式 (4a), (4b) の形に選択した妥当性について述べる. 式 (5a)–(5d) に対して伊藤型確率微分方程式の計算規則に従い, 次式を得る:

$$d\langle\hat{Q}\rangle = \langle\hat{P}\rangle d\tau + \sqrt{\Gamma} \left[\left(\left(V_Q - \frac{1}{2} \right) + iV_{QP} \right) d\zeta + c.c. \right], \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} d\langle\hat{P}\rangle = & \left(-2\Gamma\langle\hat{P}\rangle - \langle\hat{F}\rangle + \frac{g}{\beta} \cos(\Omega\tau) \right) d\tau \\ & + \sqrt{\Gamma} \left[\left(V_{QP} + i \left(V_P - \frac{1}{2} \right) \right) d\zeta + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (6b)$$

ここで $V_Q \equiv \langle\Delta\hat{Q}^2\rangle \equiv \langle\hat{Q}^2\rangle - \langle\hat{Q}\rangle^2$, $V_P \equiv \langle\Delta\hat{P}^2\rangle \equiv \langle\hat{P}^2\rangle - \langle\hat{P}\rangle^2$, $2V_{QP} \equiv \langle\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} + \Delta\hat{P}\Delta\hat{Q}\rangle$ として $\hat{F} \equiv \beta^2\hat{Q}^3 - \hat{Q}$ である. 複素ウィナー過程に関するアンサンブル平均をとれば式 (5d) を使って, 式 (6a), (6b) の $d\zeta$ の 1 次の項は消え, 得られる期待値方程式はポテンシャルの非線形項を除き古典力学におけるダフィン振動子の運動方程式を再現する. 重要なことは速度の 1 次に比例する散逸項が現れている点である. こうしてここで選択したハミルトニアンとリンドブラッド演算子の選択の妥当性が得られる. すなわちポテンシャルが非線形のためエーレンフェストの定理は厳密に成立しないが, ポテンシャルに関連しない項, 特に散逸項は適切に再現できている.

さらに注意すべきことは, もし 2 次及び高次のモーメントを近似的に無視することのできれば, 式 (6a), (6b) を用いて古典的なダフィン振動子の運動方程式を再現できるという点である. なぜなら式 (6a), (6b) における $d\zeta$ の 1 次の項はこの近似のもとではゼロになり, 通常 of 微分方程式になるからである. 2 次及び高次のモーメントを近似的に無視することができるのは, β がゼロに非常に近い段階であるといえる. こうした段階では QSD に基づく数値解析では複素ウィナー過程に対するアンサンブル平均をとらずとも, 適切な結果を得ることができる. このことは大幅な計算時間の短縮につながる [30, 35, 40].

3.2.4 古典的領域における数値解析

3.2.3 節で議論したように β がゼロに近い段階では複素ウィナー過程に関するアンサンブル平均をとらなくても適切な議論ができる. ここではそうした段階での数値計算の結果をあげ, この量子化されたダフィン振動子の振る舞いを調べる. この結果は系に対する直感的な理解に役立つ. ただしこうした解析は $\beta \sim 0$ において意味のあるものであり, 真に量子系としての振る舞いを調べるためには確率過程についてアンサンブル平均をとらなければならない.

以後, 本研究では $\beta = 0.01$ のときを古典的領域と呼ぼう. この段階を古典的という妥当性は数値計算の結果が異なる複素ウィナー過程の実現にほとんどよらない点や得られた結果から支持される.

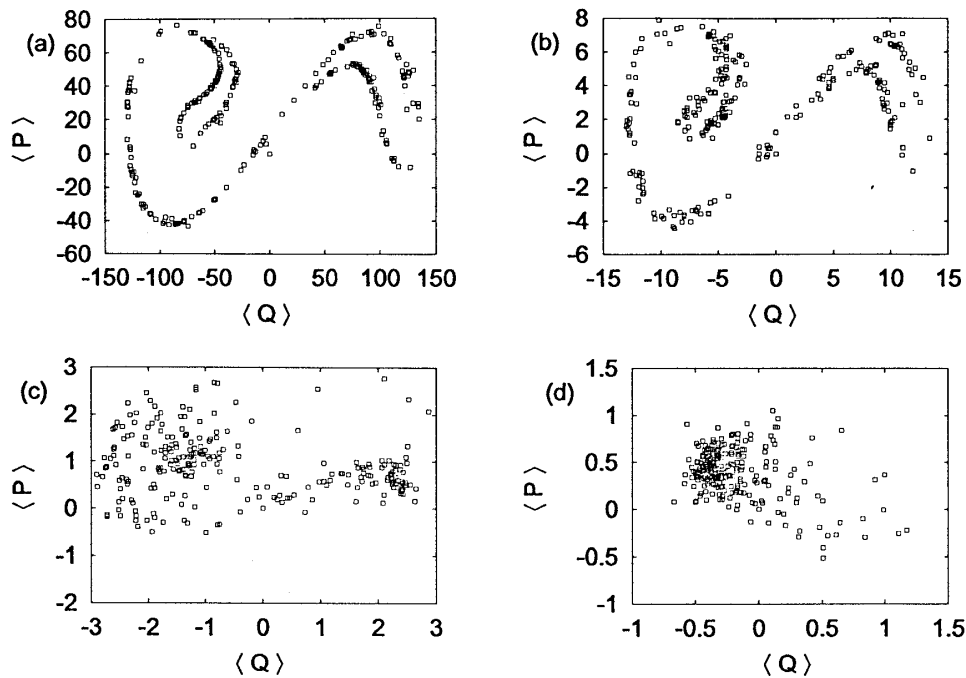


図 2: $(\langle\hat{Q}\rangle, \langle\hat{P}\rangle)$ に対するストロボ図. 外力の周期 $2\pi/\Omega$ の整数倍ごとにデーターをプロットすることにより得られる. いずれの図も確率過程に関する 1 つのサンプルに対する結果である. (a) $\beta = 0.01$, (b) $\beta = 0.10$, (c) $\beta = 0.40$, (d) $\beta = 1.00$.

本節の数値計算の結果の一部は既に文献 [30] においておこなわれており, 本研究でも同じ結果が得られている. したがって新しい結果ではないが, 初期値鋭敏性に基づく解析の動機を説明する意味でも本節の結果は重要であるので, ここに示しておく.

計算したものは外力の周期 $2\pi/\Omega$ 毎に $(\langle\hat{Q}\rangle, \langle\hat{P}\rangle)$ をプロットしたストロボ図 [図 2(a)–(d)] と $(\langle\Delta\hat{Q}^2\rangle, \langle\Delta\hat{P}^2\rangle)$ をプロットしたストロボ図 [図 3(a)–(d)] である. すべての図で複素ウィナー過程に対するアンサンブル平均はとっていない. β の値は 0.01, 0.10, 0.40, 1.00 に関するものである. 特に図 2(a)–(d) は文献 [30] において得られたものと等しい. また初期条件は純粋なコヒーレント状態 $|\alpha = 0\rangle$ ($\alpha = 0$) である. α は複素数でありその実部が $\sqrt{2}\langle\hat{Q}\rangle$ の値, 虚部が $\sqrt{2}\langle\hat{P}\rangle$ の値に対応している.

図 2(a)–(d) は確かに古典的領域においてカオスの振る舞いが現れていて, 一方 $\beta > 0.01$ ではカオスの振る舞いが失われていることを示唆している. これらの結果は少なくとも古典的領域以外ではカオス的な振る舞いが失われていくことを示すには十分である. 図 3(a)–(d) は数値計算の中でベクトルがどのように発展するかを示してくれる. 初期状態は最小波束状態であり, 計算の途中でも β に依存せずほとんど最小波束状態であることがわかる. 図 2(a)–(d) から β の値がゼロに近づくほど系のスケールが大きくなっていることがわかる. これは 3.2.2 節の議論ともよく合う. 一方図 3(a)–(d) から波束は β によらずほぼ最小波束状態だから, 確かに β がゼロに近づくほど $\Delta\bar{Q}/\bar{Q}$, $\Delta\bar{P}/\bar{P}$ はゼロに近づくことが確かめられる.

これらの結果から確かに $\beta = 0.01$ を古典的領域と呼ぶ妥当性は得られたといえる.

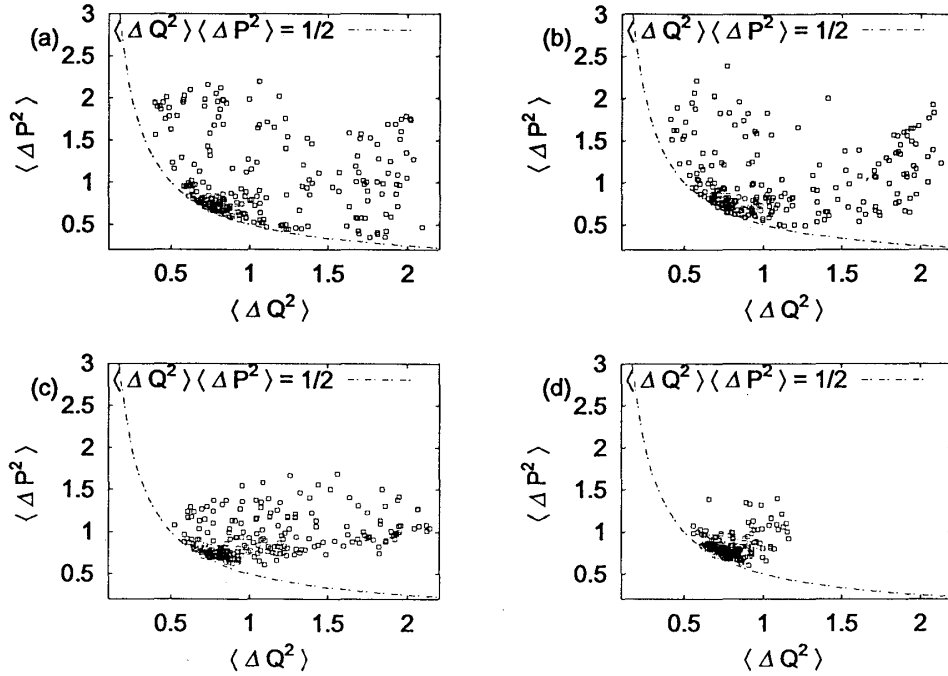


図 3: $(\langle \Delta \hat{Q}^2 \rangle, \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle)$ に対するストロボ図. 外力の周期 $2\pi/\Omega$ の整数倍ごとにデータをプロットすることにより得られる. いずれの図も確率過程に関する 1 つのサンプルに対する結果である. (a) $\beta = 0.01$, (b) $\beta = 0.10$, (c) $\beta = 0.40$, (d) $\beta = 1.00$.

また以後では $\beta = 1.00$ を量子的領域と呼ぼう. 3.3 節の考察では, こうした β 以外のときに系がどの段階にあるかをより詳細に定める.

3.3 初期値鋭敏性の導入とそれに基づく量子-古典対応の数値的解析

3.3.1 動機

3.2.4 節の議論から少なくとも古典的領域 ($\beta = 0.01$) ではこの量子化されたダフィン振動子においてもカオスの振る舞いが存在することが示唆された. しかしこの議論には不満な点が多い. まず古典的領域 (量子的領域) という定義が非常にあいまいな点がある. そして β を 1 に近づけるときの振る舞いについては何もいえない点がある. 文献 [30] においてもこうした点については議論できていない. これらの点を明らかにし, β の変化に対して量子系としてどのような振る舞いが見られるかについて考察する必要がある. このような視点から, 本研究では初期値鋭敏性に基づく解析を導入する. この解析から量子-古典のクロスオーバー現象を詳細に調べることができる.

3.3.2 初期値鋭敏性の指標の導入

初期値鋭敏性は古典力学においてカオス軌道の不安定性を特徴付ける重要な量である [45, 48, 49]. 本研究ではダフィン振動子に対する古典から量子へのクロスオーバー

現象を詳細にしらべるため、この初期値鋭敏性に関連した量子論的な量を導入する。“軌道”の差 $\Delta(\tau)$ を次式により定義する:

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{\{1,2\}} \sqrt{(\bar{q}_1(\tau) - \bar{q}_2(\tau))^2 + (\bar{p}_1(\tau) - \bar{p}_2(\tau))^2}, \quad (7a)$$

$$\bar{q}_i(\tau) = \text{Tr}(\hat{Q}\rho_i(\tau)), \bar{p}_i(\tau) = \text{Tr}(\hat{P}\rho_i(\tau)) \quad (i = 1, 2). \quad (7b)$$

ここで $\rho_1(\tau)$ と $\rho_2(\tau)$ は二つの異なる密度行列 $\rho_1(0)$, $\rho_2(0)$ それぞれ初期条件とするような時刻 τ での密度行列である。 $\rho_1(0)$, $\rho_2(0)$ とともに純粋なコヒーレント状態としてある:

$$\rho_i(0) = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

再び α_i は複素数であり、その実部と虚部がそれぞれ $\hat{Q}$ と $\hat{P}$ の期待値の $\sqrt{2}$ 倍となっている。式 (7a) は $\langle\hat{Q}\rangle - \langle\hat{P}\rangle$ 平面における“距離”である。¹⁰ $\rho_1(0)$ と $\rho_2(0)$ の違いを

$$\epsilon = \sqrt{(\bar{q}_1(0) - \bar{q}_2(0))^2 + (\bar{p}_1(0) - \bar{p}_2(0))^2} \quad (9)$$

により表す。つまり $\langle\hat{Q}\rangle - \langle\hat{P}\rangle$ 平面上の距離 ϵ だけ離れた2つの点の周りにそれぞれ局在した2つの波束として $\rho_1(0)$ と $\rho_2(0)$ を用意できる。式 (7a) において $\{1, 2\}$ は初期条件の選択の仕方に関する和を意味し、 N は選んだ初期条件の数である。古典力学において初期値鋭敏性の指標、つまり最大リヤプノフ指数の正值性がある。この量は時刻無限大の極限において定義される量である。さて本研究で導入した量をこのリヤプノフ指数の計算と対応する量にさせたい。そこで $\langle\hat{Q}\rangle - \langle\hat{P}\rangle$ 平面上での平均操作を通して長時間の振る舞いを反映させるようにしている。これが初期条件に関する平均操作の理由である。実際の初期条件の選び方は3.2.4節にて計算した外力の周期 $2\pi/\Omega$ 毎に $(\langle\hat{Q}\rangle, \langle\hat{P}\rangle)$ をプロットしたストロボ図 [図2(a)-(d)] をもとにしている。この図によりダイナミックスにより $(\langle\hat{Q}\rangle, \langle\hat{P}\rangle)$ が動く領域をおおよそ調べることができるので、この領域内から初期条件を選ぶことにしている。特に古典的領域においては“奇妙なアトラクター”上の点を選択することになる。

この $\Delta(\tau)$ の振る舞いが初期条件に対する鋭敏性を示すことになる。本研究で導入したこの指標が古典的なカオスというダイナミックスの性質が失われるようなクロスオーバー現象を明らかにする。数値計算がこの主張を支持する。詳細は3.3.4節で議論する。

3.3.3 初期条件の選択と有効プランクセル

数値計算の前に ϵ の値として適切なものを選ばなければならない。ここで量子論的な立場では、もし相空間内の2点が同一のプランクセルの中にあるならば、それらを“区別することはできない”，ということに注意しなければならない。プランクセルとはハ

¹⁰通常ユークリッドノルムが採用される。ただしこれは相空間では距離空間の意味での距離ではない [4]。

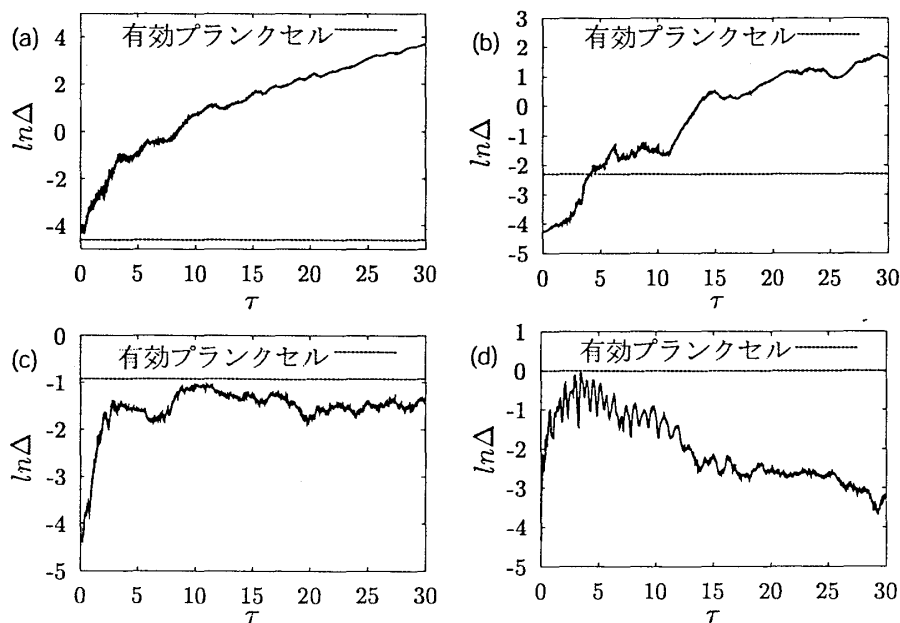


図 4: $\Delta(\tau)$ の時間発展. (a), (b) は各初期条件 (20 サンプル) に対して, 単一の複素ウィナー過程の実現について得られる図である. (c), (d) は各初期条件 (10 サンプル) に対して, 複素ウィナー過程 100 サンプルにわたる平均により得られる図である. (a) $(\beta, \epsilon) = (0.01, 0.01)$. (b) $(\beta, \epsilon) = (0.10, 0.01)$. (c) $(\beta, \epsilon) = (0.40, 0.01)$. (d) $(\beta, \epsilon) = (1.00, 0.01)$

イゼンベルグの不確定性関係により決まる領域である. すなわち ϵ は不確定性関係から制限される領域の大きさよりも少なくとも大きくなければならないことになる. さて系の典型的な作用の値 S_{cha} を固定したとき, より小さな β の値はより小さな $\hbar$ の値に対応しており, 系はより古典的な振る舞いを示すことになる. こうして β の変化に伴いその大きさが変化する有効プランクセルを定義できる. 有効プランクセルの大きさは β となる. なぜならプランクセルの 1 次元的な大きさは $\sqrt{\hbar}$ (プランクセルの面積の大きさが $\hbar$ である) で, β^2 が $\hbar$ に比例するためである.

3.3.4 古典から量子へのクロスオーバー現象

まず ϵ の値を 0.01 に固定した数値計算を示す. このような ϵ の値では初期条件は, $\beta = 0.01$ に対しては有効プランクセルの外側で $\beta \geq 0.1$ の場合に対してはその内側にあることになる. 図 4(a) において $\Delta(\tau)$ の特徴的な振る舞いが現れている. すなわち指数関数的に増大しているのである. これは古典力学における最大リヤプノフ指数が正であるということに対応している. この結果は量子化されたダフィン振動子は $\beta = 0.01$ に対しては依然としてカオス的な振る舞いを保っていることを正当化している. こうして図 4(a) は確かに古典的領域にあり, カオス的な振る舞い, つまり奇妙なアトラクターを示していることになる.

$\beta = 0.10$ [図 4(b)] と $\beta \sim \mathcal{O}(1)$ [図 4(c), (d)] においては, その間で非常に異なった挙

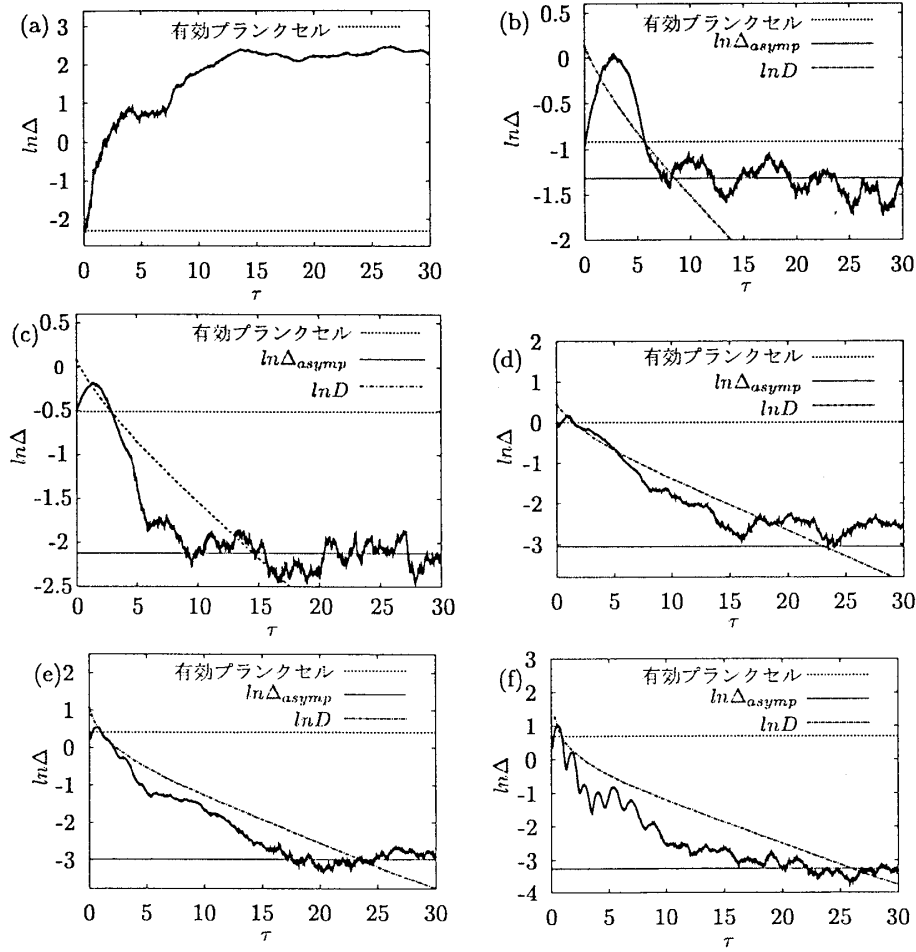


図 5: $\Delta(\tau)$ の時間発展. Δ_{asymp} は $\Delta(\tau)$ が漸近する値である. D は式 (10) の右辺の値である. (a) は各初期条件 (20 サンプル) に対して, 単一の複素ウィナー過程の実現について得られた図である. (b)–(f) は各初期条件 (10 サンプル) に対して, 複素ウィナー過程 100 サンプルにわたる平均により得られた図である. (a) $(\beta, \epsilon) = (0.10, 0.10)$. (b) $(\beta, \epsilon) = (0.40, 0.40)$. (c) $(\beta, \epsilon) = (0.60, 0.60)$. (d) $(\beta, \epsilon) = (1.00, 1.00)$. (e) $(\beta, \epsilon) = (1.50, 1.50)$. (f) $(\beta, \epsilon) = (2.00, 2.00)$.

動を見ることができる. これらの β の値では初期条件に対応する $\langle \hat{Q} \rangle - \langle \hat{P} \rangle$ 平面上の 2 点は各 β に対応する有効プランクセルの内側にある. こうした 2 点は互いに “区別することができない”. それでもなお $\beta = 0.10$ に対する $\Delta(\tau)$ はある時間たつと, 有効プランクセルの大きさよりも大きくなる. これは $\beta = 0.10$ に対しては依然としてカオスのダイナミクスが残っていることを示している. しかし, $\beta = 0.40, 1.00$ に対する $\Delta(\tau)$ は有効プランクセルの大きさよりも大きくなることを示している. すなわちカオスのダイナミクスは完全に失われていることになる. こうした考察は β が 0.01 から 1.00 へ移行するとき, 古典から量子へのクロスオーバー現象に関連したある臨界的な段階の存在を示唆する.

次に, 各 β に対して $\epsilon \sim \beta$ なる初期条件のもとでの計算結果について示そう [図 5(a)–

(f)].

図 5(a) においては依然として指数関数的な増大則を示している. すなわち, 再び $\beta = 0.10$ ではカオスのダイナミックスが残っていることがわかったことになる.

図 5(b)–(f) ではさらに興味深い挙動がみられる. まず他の β でみられたような指数関数的な増大則はない. そして全ての $\Delta(\tau)$ は初期の非常に短い時間間隔のみ有効プランクセルの大きさより大きくなるが, その後有効プランクセルの大きさよりも常に小さくなる.

こうして, 実際は $\beta = 0.10$ 程度までを古典的領域として捉えることができ, $\beta = 0.40$ 付近である臨界的な段階が存在し, $\beta > 0.40$ では古典的側面が失われるという点で, すでに量子的領域であると捉えることができる.

3.3.5 量子的および深量子的領域における考察

本研究では $\beta = 1.00$ を量子的領域と定めた. そして実際には $\beta > 0.40$ ですでに系は量子的領域にあることも確認した. ここでは $\beta > 1.00$ における振る舞いについて考察する. この段階を深量子的領域と呼ぼう. 図 5(b)–(f) から量子的領域と深量子的領域で, $\Delta(\tau)$ はある時間たつと有効プランクセルの大きさより小さいある一定値 Δ_{asymp} に漸近的に近づく傾向がみられる. $\Delta(\tau)$ が常に有効プランクセルの大きさより小さくなるような時刻を τ_0 とする. $\Delta(\tau) = \Delta_{asymp}$ となる時刻を τ_{asymp} とおく. $\tau_0 < \tau < \tau_{asymp}$ での $\Delta(\tau)$ の振る舞いを次式で評価できることを示すことができる.

$$\Delta(\tau - \tau_0) \lesssim \left(\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) e^{2\Gamma(\tau - \tau_0)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

ここで $\Delta(\tau_0 - \tau_0) = \beta$ を用いている. 導出は付録 A でおこなう. 近似として, $\Delta(\tau)$ が有効プランクセルの大きさより常に小さいことに関連するものとハミルトニアンをゼロとしているという 2 点を用いている. 図 5(b)–(f) でこの評価が確かに $\tau_0 < \tau < \tau_{asymp}$ で良いことがわかる. つまり $\tau_0 < \tau < \tau_{asymp}$ では $\Delta(\tau)$ の振る舞いは散逸の影響のみで記述されてしまうことがわかる. 古典系では散逸カオス系は散逸と周期的な外力の影響によりカオスのダイナミックスを発生する. 量子化されたダフィン振動子では, 系の作用が $\hbar$ よりも大きいときに, 古典系と同様にカオスのダイナミックスがみられる. このとき散逸の存在はカオス発生にとって重要な役割を果たす. しかし系の作用が $\hbar$ にくれば小さいとき, 散逸はむしろカオスのダイナミックスの発生を抑制する方向に働くことになってしまうのである.

漸近的な Δ の値 Δ_{asymp} の評価をおこなうと, その値は深量子的領域では β の値に依存しない一定値をとることがわかる [図 6]. さらに τ_{asymp} の値を Δ_{asymp} , τ_0 そして式 (10) を用いて評価することができる. 結果は次のようになる:

$$(\beta, \tau_0, \tau_{asymp}) = (0.40, 5.71, 8.63), (0.60, 2.88, 11.9), (1.00, 1.45, 19.4), \\ (1.50, 1.04, 23.5), (2.00, 0.91, 25.9).$$

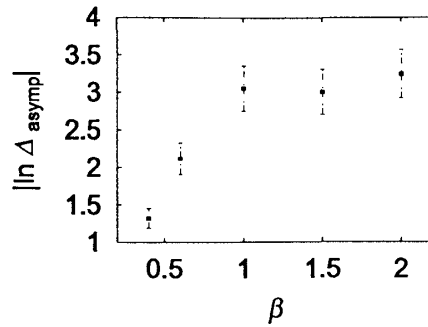
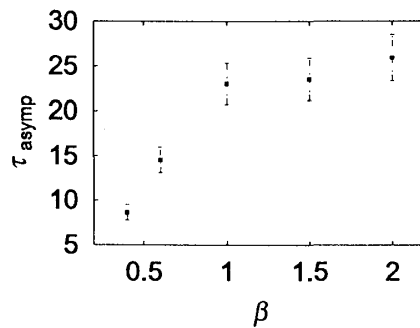
図 6: 各 β に対する Δ の漸近的な値.図 7: 各 β に対する τ_{asymp} の値.

図7に各 β に対して τ_{asymp} の値がプロットされている. 深量子的領域では τ_{asymp} は β に依存しないある一定値をとることがわかる. これは Δ_{asymp} が深量子的領域では β に依存しないことと, 式(10)の β 依存性が $\sqrt{1+\beta^{-2}}$ であることから理解できる. こうした深量子的領域での $\Delta(\tau)$ の振る舞いは, $\Delta(\tau)$ に基づく解析が $\beta > 1.00$ では有効なものではないことを示唆している. こうした領域で系の特徴を捉えるためには他の量, 例えばウィグナー関数の重なり合いなど, を調べる必要があるだろう. しかし, $\Delta(\tau)$ に基づく解析は少なくとも $\beta = 0.40$ 付近のクロスオーバーを調べる上では有効な手段であるといえる.

3.4 本節のまとめ

モデルとしてダフィン振動子を量子化し, そこでの量子－古典対応を議論した. 量子的な取り扱いは, ダイナミクスがリンドブラッド型マスター方程式 [16] に従うとし, マスター方程式におけるハミルトン項 (ユニタリー発展に対応) と散逸項 (非ユニタリー発展に対応) を現象論的に選ぶことで行った. 古典的領域から量子的領域への移行はプランク定数 $\hbar$ と系の特徴的な作用 S_{char} の比 $\beta^2 = \hbar/S_{cha}$ を動かすことで考えることができる. カオスの定義ともいえる初期値鋭敏性に関連した新たな量を導入し, この初期値鋭敏性に基づき, 様々な (β, ϵ) の値に対して系の挙動を調べた. この数値計算により量子－古典領域の移行において, ある臨界的な段階が存在することを示すことができ

た. [30] では古典的領域において奇妙なアトラクターの存在のみが示されていたが, 本研究はその結果を含むだけでなく, 初期値鋭敏性の解析に踏み込むことができた点で, それを超えるものといえる. また初期値鋭敏性の導入により β の各値において古典的か量子的かを詳細に議論することができた. 深量子的領域における考察から量子散逸カオス系に対する新たな知見を得られた. つまり散逸の役割が量子的領域, 深量子的領域ではカオス発生を抑制する方向に働いてしまうことがわかった. 深量子的領域での $\Delta(\tau)$ に基づく解析は, 系を特徴を捉える上では有効なものではないことを示唆している. こうした領域で系の特徴を捉えるためには他の量, 例えば高次のモーメントやウィグナー関数の重なり合いなど, を調べる必要があるだろう. しかし, 初期値鋭敏性に基づく解析は少なくとも $\beta = 0.40$ 付近のクロスオーバー現象を調べる上では有効な手段であるといえる.

量子系でリヤプノフ指数そのものを計算するという非常に興味深い試みも存在する [10]. この文献においては系が十分古典的であれば確かに正のリヤプノフ指数を持つことを示している. しかし β を変化させたときのクロスオーバー現象の解析という視点は他に例をみない.

4 散逸系における半古典的手法の開発

4.1 半古典的手法の開発の動機

3節においてダフィン振動子という特定の散逸系のモデル計算を通じて, 散逸カオス系での量子-古典対応を議論した. 初期値鋭敏性という指標を導入することで, この議論は非常に明確なものになる. しかし, ここで次のような問題点が現れる. 初期値鋭敏性は, 確かに古典系のカオスの定義ともいえる最大リヤプノフ指数が正ということに対応する量である. だが, 散逸カオス系の特徴ともいえる奇妙なアトラクターという古典的な性質がどのように量子系の測定量に反映しているかが全く考慮されていない. そこで半古典的手法の開発を試み, 解析的な視点から散逸量子カオスを調べる必要性があることになる.

4.2 散逸系の記述

量子散逸カオス系について, どのような量を量子-古典対応を議論するため考えるべきかのコンセンサスがあるとはいえない. そこでまずその点について考察する. さらに時間発展を記述する際に写像として捉えることが適切であることを述べる.

4.2.1 散逸系を特徴付ける量

本研究では散逸系を特徴付ける量として時間発展を記述するマスター方程式の推進演算子に関する積分核の固有値に注目する. 他の可能性としてはカオスによる情報の

損失という視点からエントロピー生成の計算が考えられうる。量子系におけるエントロピーとしてフォン・ノイマンエントロピー [4] を採用すれば、量子開放系では系は混合にもなりえるので、この量もまた散逸系を特徴付ける量といえる。この視点からの研究は非常に多くまた興味深い [12, 13, 20].

4.2.1 節のこれ以後では $\hat{\rho}$ や $\hat{H}$ などの線形演算子から $\hat{\cdot}$ をとり、線形演算子に作用する線形演算子に $\hat{\cdot}$ をつけて表す。マスター方程式 $\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\rho$ を考えよう。ここに $\hat{\mathcal{L}}$ が時間発展の推進演算子であり、マスター方程式としてはリンドブラッド型を仮定しているので $\hat{\mathcal{L}}\rho$ は式 (1) の左辺に対応している。 $\hat{\mathcal{L}}$ は密度行列という演算子に作用する演算子のため超演算子ともよばれる。リンドブラッド演算子がない場合は $\hat{\mathcal{L}}$ の固有値は H の固有値の差全体の集合として与えられる。 H はハミルトニアンに対応しているから、これはエネルギーの差、すなわち実数である。一般にはリンドブラッド演算子は存在しているので $\hat{\mathcal{L}}$ の固有値は複素数になりえる。実部は依然としてエネルギーの差という意味が与えられる。¹¹ マスター方程式の形式解を考えると $\hat{\mathcal{L}}$ の固有値の意味はより明確になる。議論を簡単にするためエルミートなリンドブラッド演算子 L が 1 つだけ存在する特別な場合を考えよう。また議論を見やすくするためリウビル空間を導入する [50]。リウビル空間については付録 B にその定義を記してある。今の場合、リウビル空間では式 (1) は次のように表される:

$$\frac{d}{dt}|\rho\rangle = \hat{\mathcal{L}}|\rho\rangle, \quad (11a)$$

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{i}{\hbar}\hat{L}_H - \frac{1}{2}(\hat{L}_L)^2. \quad (11b)$$

ここで $\{|n, m\rangle\} (|n, m\rangle \equiv |n\rangle\langle m|)$ をリウビル空間の正規直交基底とすれば、

$$(n, m|(\hat{L}_L)^2|n, m) \geq 0, \quad (12)$$

であることを示すことができる (付録 B 参照).

$$\hat{\mathcal{L}}|n, m\rangle = l_{nm}|n, m\rangle$$

$$l_{nm} = -\frac{i}{\hbar}\epsilon_{nm} - \frac{1}{2}\gamma_{nm}$$

とおく。 ϵ_{nm} , γ_{nm} はともに実数であり、式 (12) から γ_{nm} は正である。そして式 (11a) の形式解は次式のようになる:

$$(n, m|\rho(t)) = e^{(\frac{i}{\hbar}\epsilon_{nm} - \gamma_{nm})t}(n, m|\rho(0)).$$

よって $\hat{\mathcal{L}}$ の固有値の虚部は散逸率と関連することになる。

文献 [51] ではこの固有値を一般化されたエネルギーとして、ハミルトン系の場合のように対応する古典系の正則-カオス転移に対してこの固有値に関する準位反発の存在を

¹¹ リンドブラッド演算子の存在により一般にはこの値は H の固有値の差だけで記述できるとは限らない。

指摘している。このことは非エルミート行列に対する乱数行列理論の予測とも関連が深い [2, 21, 52]。文献 [53] では散逸のあるキックを受けるコマのモデルでは数値的に解析もおこなわれている。こうして $\hat{L}$ の固有値を求めることは量子散逸カオス系の理解にとって非常に重要であるといえる。

実際にこの固有値をもとめるためには演算子のトレースの情報が重要になる [21, 54]。そこで半古典的に演算子のトレースを評価する公式、トレース公式を計算すればよいことになる。固有値の値そのものよりもその固有値間の相関について調べることも重要である。この点は文献 [21] に詳しく論じられている。

4.2.2 量子散逸写像

散逸カオス系の特徴は常に外から周期的な外力をうける。このため周期の整数倍で時間発展をくり、離散化された時間で、つまり写像として捉えるのが自然である。奇妙なアトラクターもポアンカレ断面上においてみいだせるものなので、このようにすべきである。微分方程式の立場からみても、いわゆるフロッケの定理という形で知られているように、周期性を利用して解を構成することはごく自然な定式化である [55]。ハミルトン系においても周期的な外力を加える場合は、写像として捉える [56, 57]。このとき準エネルギーという量を定義し、改めてヒルベルト空間を構成することができる [58]。他の散逸カオス系を扱った文献においても写像として捉えてる [53, 59]。つまり連続的な時間発展ではなく離散的な時間つまり写像として散逸量子系を捉えることにする。

より具体的なモデルとしては周期的なキックをうける散逸系を考えることになる。

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_F + T f(\hat{x}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (13)$$

ここで $\omega = 2\pi/T$, $f(x)$ は適当な非線形効果を引き起こすポテンシャルである。 $\hat{H}_F$ は可積分もしくは既知の系であればどんなものでも良い。リンドブラッド演算子は扱う散逸系に応じて選ぶことになる。例えば自由ハミルトニアンに散逸の影響が起源のくりこみの項があるモデルを採用する：

$$\hat{H}_F = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\gamma}{2} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}).$$

このとき速度の 1 次 に比例する散逸項を期待値方程式に現れるようにするためには

$$\hat{L} = \sqrt{\frac{\gamma m \omega}{\hbar}} \hat{x} + i \sqrt{\frac{\gamma}{m \omega \hbar}} \hat{p}.$$

とすればよい。このようなモデルは古典系での散逸カオスの研究の際に、例えばダフィソ振動子においてみられる奇妙なアトラクターの局所的な構造に対するモデルとしてよく考えられる [45]。大域的な構造を表すことは出来ないが、非常に有意なモデルといえる。

4.3 時間発展を記述する積分核

4.2節の考察より時間発展を記述する推進演算子の積分核を計算する必要があることがわかる。本研究ではリンドブラッド型マスター方程式による時間発展を考えているため、このことはマスター方程式を積分することに対応する。この目的のためには経路積分を用いるのが便利である。経路積分法は半古典的手法を開発するという視点でも適している。ここでは W. T. Strunz[39] による線形 QSD の経路積分表示を通じてリンドブラッド型マスター方程式に対応する時間発展を記述する積分核を導出する。そして首尾一貫性の確認のため厳密に積分核を計算できる減衰調和振動子について解析をおこなう。

具体的な計算の前に、他の解析的なアプローチについて触れておこう。量子散逸カオスを議論する場合には、マスター方程式を近似的に解かなくてはならない。多くの研究では量子散逸写像として次式で与えられるものをよく解析している [2, 21, 59]:

$$\hat{\rho}(nt) = \hat{F} \hat{D} \hat{\rho} \hat{F}^\dagger. \quad (14)$$

ここで $\hat{F}$ はフロッケ行列とよばれ、式 (11b) のユニタリーの時間発展に対応している。また周期的なキックの影響もこのフロッケ行列の中に含まれている。当然ながら $\hat{F}$ はユニタリー演算子である。 $\hat{D}$ は式 (11b) のうち非ユニタリーの時間発展と関連している。実際には、マスター方程式が式 (11b) の第2項のみからなるとしたときの解から構成される。こうしてマスター方程式のハミルトン部と散逸部とが分離した状況を想定して量子散逸写像を構成していることになる。しかし実際には散逸部からもユニタリー発展に寄与する効果は現れる。式 (5a) などにおける Γ に比例する項はまさにこうした効果に対応したくりこみの項である。そして式 (14) の形を仮定することはダイナミクスに大きな制限を与えることになり、一般的な記述にはなっていないと考えられる。

本研究ではこうした状況を考え、まずリンドブラッド型マスター方程式に関連した時間発展積分核の導出をおこなう。そこでは式 (14) のような仮定はない。

4.3.1 時間発展を表す推進演算子に対する積分核の導出

ここではリンドブラッド型マスター方程式の時間発展を表す推進演算子に対する積分核を導出する。簡単のためリンドブラッド演算子がただ1つのときのみを考える。このときマスター方程式は式 (1) より次式のようになる:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \left(\hat{L} \hat{\rho} \hat{L}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}^\dagger \hat{L} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{L}^\dagger \hat{L} \right). \quad (15)$$

式 (15) は複素ウィナー過程を用いることで“ときほぐす”ことができる。ここではベクトル $|\psi\rangle$ に対して線形な QSD の定式化を採用しよう [39]。このとき式 (15) は次式と同等である:

$$d|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}|\psi\rangle dt - \frac{1}{2} \hat{L}^\dagger \hat{L}|\psi\rangle dt + \hat{L}|\psi\rangle d\xi. \quad (16)$$

ここで再び $d\xi$ は複素ウィナー過程の増分で, $d\xi^* d\xi = dt$, $d\xi dt = 0$ である. 式 (16) では $\|\psi\|$ は保存しない. なぜなら,

$$d\|\psi\|^2 = \text{Re} \left(\langle \psi | \hat{L} | \psi \rangle d\xi \right)$$

となるからである. しかしこのことは $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ には抵触しない. というのも確率過程に対するアンサンブル平均 M をとれば $d\xi$ の 1 次の項はゼロになるからである.

文献 [39] では式 (16) を経路積分表示を導出した:

$$G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_\xi[x, p] \right] \quad (17a)$$

$$S_\xi[x, p] = \int_{t_i}^{t_f} (\dot{x}p - H_{eff}(x, p)) dt - i\hbar \int_{t_i}^{t_f} L(x, p) d\xi(t) \quad (17b)$$

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H} - \frac{i\hbar}{2} \hat{L}^\dagger \hat{L} \quad (17c)$$

なお $\hat{x}\hat{p}$ に関してはワイルの順序付けを採用している [60].¹² また式 (17a) において

$$\int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x \mathcal{D}p$$

は有限の時間間隔 Δt では

$$\int (\Pi_{k=1}^{N-1} dx_k) (\Pi_{k=0}^{N-1} dp_k) (2\pi\hbar)^{-N}$$

である. ただし, $N\Delta t = t_f - t_i$ としている. 式 (17a) は Green 関数であり, ベクトルは

$$\psi_\xi(x_f, t_f) = \int G_\xi(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \quad (18)$$

と表される. ここで初期時刻 $t = t_i$ で系は純粋にあるものとした.¹³ 式 (18) を使って密度行列は

$$\langle x_f | \rho(t_f) | y_f \rangle = \int I(x_f, y_f, t_f; x_i, y_i, t_i) \langle x_i | \rho(t_i) | y_i \rangle dx_i dy_i, \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} I(x_f, y_f, t_f; x_i, y_i, t_i) &= M(G_\xi(x_f, t_f; x_i, x_i) G_\xi^*(y_f, t_f; y_i, t_i)) \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp(\Phi[x, p, y, q]), \end{aligned} \quad (19b)$$

¹²式 (17a) のような経路積分で書くことができるのは複素ウィナー過程を用いているためと考えられる. 一般に $d\xi$ は $\sqrt{dt}$ のオーダーのため $dt \rightarrow 0$ では dt よりも大きくなる. しかし複素ウィナー過程の特性として $d\xi d\xi = 0$, $d\xi dt = 0$ があるために通常の経路積分と同様な議論ができるとみなせる. ただしトロツタ公式の形で適切に定式化されたわけではないことは注意しなければならない.

¹³混合の場合には密度行列が幾つかの純粋な密度行列の和で書くことができることを考慮すればよい.

$$\Phi[x, p, y, q] = \left(\frac{i}{\hbar} (W[x, p] - W^*[y, q]) + \int_{t_i}^{t_f} \delta A(x, p, y, q) dt \right), \quad (19c)$$

$$W[x, p] = \int_{t_i}^{t_f} (\dot{x}p - H_{eff}(x, p)) dt, \quad (19d)$$

$$\delta A(x, p, y, q) = L(x, p)L^*(y, q), \quad (19e)$$

となる。密度行列の混合性つまり散逸効果の起源は δA という項の存在であり、QSD の定式化ではこの項に確率過程をいれることで密度行列をベクトルへ “ときほぐしている” ことになる。

4.3.2 減衰調和振動子に対する計算

厳密に式 (19b) を評価できるモデルとして減衰調和振動子について解析をおこなう。ハミルトニアンとリンドブラッド演算子を次のように選ぶ:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{\gamma}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}),$$

$$\hat{L} = \sqrt{2\gamma}\hat{a} = \sqrt{\frac{\gamma\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{\gamma}{m\omega\hbar}}\hat{p}.$$

このとき式 (19d) は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} I(\Sigma_f, \Delta_f, t_f; \Sigma_i, \Delta_i, t_i) &= \int_{\Sigma(t_i)=\Sigma_i, \Delta(t_i)=\Delta_i}^{\Sigma(t_f)=\Sigma_f, \Delta(t_f)=\Delta_f} \mathcal{D}\Sigma \mathcal{D}\Delta \mathcal{D}P \mathcal{D}K \\ &\times \exp \left(\frac{i}{\hbar} R(\Sigma, \Delta, P, K) + \frac{1}{\hbar} D(\Delta, K) \right), \end{aligned} \quad (20a)$$

$$R(\Sigma, \Delta, P, K) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\dot{\Sigma}K + (\dot{\Delta} - 2\gamma\Delta)P - \frac{1}{m}PK - m\omega^2\Sigma\Delta \right) dt, \quad (20b)$$

$$D(\Sigma, K) = -\frac{\gamma}{2} \int_{t_i}^{t_f} \left(m\omega\Delta^2 + \frac{1}{m\omega}K^2 \right) dt. \quad (20c)$$

ただし

$$\Sigma = \frac{1}{2}(x+y), \quad \Delta = x-y, \quad P = \frac{1}{2}(p+q), \quad K = p-q,$$

である。式 (20a) の指数関数の引数はハミルトン系とは異なり複素数となっている。本研究ではその虚部に対応する式 (20b) を作用関数とみなし、ここから停留条件つまり “古典軌道” を決定することにする。これは文献 [27, 28] になつたものである。変数変換

$$\Sigma = \bar{\Sigma} + \Sigma', \quad \Delta = \bar{\Delta} + \Delta', \quad P = \bar{P} + P', \quad K = \bar{K} + K',$$

を式 (20a) に施す. ここで $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Delta}$, $\bar{P}$, $\bar{K}$ は停留条件:

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma} R = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Delta} R = 0, \quad \frac{\partial}{\partial P} R = 0, \quad \frac{\partial}{\partial K} R = 0,$$

および境界条件

$$\bar{\Sigma}(t_i) = \Sigma_i, \quad \bar{\Sigma}(t_f) = \Sigma_f, \quad \bar{\Delta}(t_i) = \Delta_i, \quad \bar{\Delta}(t_f) = \Delta_f,$$

すなわち

$$\Sigma'(t_i) = \Sigma'(t_f) = 0, \quad \Delta'(t_i) = \Delta'(t_f) = 0$$

により決定される “古典軌道” である. “古典軌道” は次式に従う:

$$\dot{\bar{\Sigma}} - \frac{1}{m} \bar{P} = 0, \quad \dot{\bar{P}} + m\omega^2 \bar{\Sigma} + 2\gamma \bar{P} = 0, \quad \dot{\bar{\Delta}} - \frac{1}{m} \bar{K} - 2\gamma \bar{\Delta} = 0, \quad \dot{\bar{K}} + m\omega^2 \bar{\Delta} = 0.$$

$\bar{P}$, $\bar{K}$ を消去すると次式を得る:

$$\ddot{\bar{\Sigma}} + 2\gamma \dot{\bar{\Sigma}} + \omega^2 \bar{\Sigma} = 0, \quad (21a)$$

$$\ddot{\bar{\Delta}} - 2\gamma \dot{\bar{\Delta}} + \omega^2 \bar{\Delta} = 0. \quad (21b)$$

特に式 (21a) は古典の減衰調和振動子に対する運動方程式である. さらに式 (21a), 式 (21b) はそれぞれ Σ , Δ だけで閉じた式である. 一般に調和振動子以外の非線形ポテンシャルではこのような Σ と Δ の分離はしない. 式 (21b) はちょうど式 (21a) において時間反転したときの式である. $u_1(t)$, $u_2(t)$ をそれぞれ境界条件 $u_1(t_i) = u_2(t_f) = 1$, $u_1(t_f) = u_2(t_i) = 0$ を満たすような式 (21a) の素解とする. また $v_1(t)$, $v_2(t)$ をそれぞれ境界条件 $v_1(t_i) = v_2(t_f) = 1$, $v_1(t_f) = v_2(t_i) = 0$ を満たすような式 (21b) の素解とする. 簡単な計算により, 式 (20a) は次式のようになる:

$$I(\Sigma_f, \Delta_f, t_f; \Sigma_i, \Delta_i, t_i) = \mathcal{N}(\Delta_f, t_f, \Delta_i, t_i) \exp \left(\frac{i}{\hbar} R_{fi} + \frac{1}{\hbar} D_{fi} \right), \quad (22a)$$

$$R_{fi} = \Sigma_f \Delta_f m \dot{u}_2(t_f) - \Sigma_f \Delta_i m \dot{u}_2(t_i) + \Sigma_i \Delta_f m \dot{u}_1(t_f) - \Sigma_i \Delta_i m \dot{u}_1(t_i), \quad (22b)$$

$$D_{fi} = -\frac{\gamma}{2m\omega} (\Delta_f^2 a_{22} + \Delta_i^2 a_{11} + 2\Delta_f \Delta_i a_{21}), \quad (22c)$$

$$a_{11} = \int_{t_i}^{t_f} (m^2 \omega^2 v_1^2 + m^2 (\dot{v}_1 - 2\gamma v_1)^2) dt, \quad (22d)$$

$$a_{22} = \int_{t_i}^{t_f} (m^2 \omega^2 v_2^2 + m^2 (\dot{v}_2 - 2\gamma v_2)^2) dt, \quad (22e)$$

$$a_{21} = \int_{t_i}^{t_f} (m^2 \omega^2 v_2 v_1 + m^2 (\dot{v}_2 - 2\gamma v_2)(\dot{v}_1 - 2\gamma v_1)) dt. \quad (22f)$$

また明らかに $a_{22} \geq 0$, $a_{11} \geq 0$ であり, さらに

$$a_{22}a_{11} - (a_{21})^2 \geq 0, \quad (23)$$

であることも示すことができる. 証明はシュワルツの不等式の証明の方法と同じである. 式 (22c) を行列形式で書くと次式のようになる:

$$D_{fi} = -\frac{\gamma}{2m\omega} \begin{pmatrix} \Delta_i & \Delta_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_i \\ \Delta_f \end{pmatrix} \equiv \Delta^T A \Delta.$$

このとき行列 A は正値行列であることを示すことができる. A は実対称行列なので固有値 z が正であることを確認すればよい. 実際に固有値多項式は

$$z^2 - (\text{Tr } A)z + \det A = 0$$

である. 明らかに $\text{Tr } A \geq 0$ であり, また式 (23) から $\det A \geq 0$ となっているので確かに固有値は正になる [61].

式 (22a) における $\mathcal{N}(\Delta_f, t_f, \Delta_i, t_i)$ は規格化因子である. 実際は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta_f, t_f, \Delta_i, t_i) &= \int_{\Sigma'(t_i)=\Delta'(t_i)=0}^{\Sigma'(t_f)=\Delta'(t_f)=0} \mathcal{D}\Sigma' \mathcal{D}\Delta' \exp \left(\frac{i}{\hbar} R'_{fi} + \frac{1}{\hbar} D'_{fi} + \frac{1}{\hbar} \bar{D}'_{fi} \right), \\ R'_{fi} &= \int_{t_i}^{t_f} \left(m \dot{\Sigma}' \left(\dot{\Delta}' - 2\gamma \Delta' \right) - m\omega^2 \Sigma' \Delta' \right) dt, \\ D'_{fi} &= -\frac{\gamma}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} \left(m^2 \omega^2 \Delta'^2 + m^2 \left(\dot{\Delta}' - 2\gamma \Delta' \right)^2 \right) dt, \\ \bar{D}'_{fi} &= -\frac{\gamma}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} \left(2m\omega^2 \bar{\Delta} \Delta' + 2m^2 \left(\dot{\bar{\Delta}} - 2\gamma \Delta' \right) \left(\dot{\Delta}' - 2\gamma \Delta' \right) \right) dt. \end{aligned}$$

ただし P' と K' についてはすでに積分してある. またこのときの経路積分は有限時間 Δt 間隔では

$$\int \left(\prod_{k=1}^{N-1} d\Sigma'_k \right) \left(\prod_{k=1}^{N-1} d\Delta'_k \right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t} \right)^N$$

である. ただし, $N\Delta t = t_f - t_i$ である. Σ_f, Σ_i には依存しないことに注意しよう. これは式 (20c) に Σ 依存性がないことによる. 規格化条件 $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ より次式が成立しなければならない:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x_f | \hat{\rho}(t_f) | x_f \rangle dx_f = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_i | \hat{\rho}(t_i) | x_i \rangle dx_i = 1.$$

式 (19a) を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x_f, x_f, t_f, x_i, y_i, t_i) dx_f = \delta(x_i - y_i),$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\Sigma_f, \Delta_f = 0, t_f; \Sigma_i, \Delta_i, t_i) d\Sigma_f = \delta(\Delta_i),$$

となることがわかる。そして,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} I(\Sigma_f, \Delta_f = 0, t_f; \Sigma_i, \Delta_i, t_i) d\Sigma_f \\ &= \mathcal{N}(\Delta_f = 0, t_f, \Delta_i, t_i) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(-\Sigma_f \Delta_i m \dot{u}_2(t_i) - \Sigma_i \Delta_i m \dot{u}_1(t_i)) - \frac{\gamma}{2m\omega} \Delta_i^2 a_{11}\right) d\Sigma_f \\ &= \mathcal{N}(\Delta_f = 0, t_f, \Delta_i, t_i) \\ & \times (2\pi\hbar) \left| \frac{1}{-m\dot{u}_2(t_i)} \right| \delta(\Delta_i) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Sigma_i \Delta_i m \dot{u}_1(t_i) - \frac{\gamma}{2m\omega} \Delta_i^2 a_{11}\right) \\ &= \mathcal{N}(\Delta_f = 0, t_f, \Delta_i = 0, t_i) (2\pi\hbar) \left| \frac{1}{-m\dot{u}_2(t_i)} \right| \delta(\Delta_i) \end{aligned}$$

となるので,

$$\mathcal{N}(\Delta_f = 0, t_f, \Delta_i = 0, t_i) = \frac{1}{2\pi\hbar} | -m\dot{u}_2(t_i) | \quad (24)$$

であることがわかる。ここで $\mathcal{N}$ は Δ_f, Δ_i に依存しないと仮定しよう。この仮定の正当性はマスター方程式を導出し、それが満たすべきリンドブラッド型マスター方程式に一致することで確かめることができる。次式の積分核から出発する:

$$I(\Sigma_f, \Delta_f, t_f; \Sigma_i, \Delta_i, t_i) = \mathcal{N}(t_f, t_i) \exp\left(\frac{i}{\hbar} R_{fi} + \frac{1}{\hbar} D_{fi}\right). \quad (25)$$

式(25)において $\mathcal{N}(t_f, t_i)$ は式(24)で与えられるものと仮定しよう。また R_{fi}, D_{fi} は各々式(22b), 式(22c)である。計算の詳細は省略するが、式(25)から導出したマスター方程式は次式のようになる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_f} \rho(\Sigma_f, \Delta_f, t_f) &= \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial \Sigma_f \partial \Delta_f} \rho(\Sigma_f, \Delta_f, t_f) - \frac{i}{\hbar} m\omega^2 \Sigma_f \Delta_f \rho(\Sigma_f, \Delta_f, t_f) \\ & - 2\gamma \Delta_f \frac{\partial}{\partial \Delta_f} \rho(\Sigma_f, \Delta_f, t_f) + \frac{\hbar\gamma}{2m\omega} \frac{\partial^2}{\partial \Sigma_f^2} \rho(\Sigma_f, \Delta_f, t_f) \\ & - \frac{\gamma m\omega}{2\hbar} \Delta_f^2 \rho(\Sigma_f, \Delta_f, t_f). \end{aligned}$$

そしてこれがリンドブラッド型であることが確認できる。

4.3.3 量子散逸写像の構成

4.3.1節で導出した積分核を用いて、量子散逸写像を構成する。ハミルトニアンとしては周期的なキックを受けるモデル式(13)を採用する。

$$t_k = kT, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$x(t_k) \equiv x_k.$$

とおく. 式 (19a) より時刻 $t_k - 0$ から時刻 $t_{k+1} - 0$ への密度行列の時間発展は次式に従うことがわかる:

$$\begin{aligned} \langle x_{k+1} | \rho(t_{k+1} - 0) | y_{k+1} \rangle &= \int I(x_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+1} - 0; x_k, y_k, t_k - 0) \\ &\quad \times \langle x_k | \rho(t_k - 0) | y_k \rangle dx_k dy_k. \end{aligned}$$

ここで $I(x_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+1} - 0; x_k, y_k, t_k - 0)$ は式 (19b) で与えられる. さて, 周期的なキックを受けるモデルでは式 (19d) は次式のようになる:

$$\begin{aligned} W[x, p] &= \int_{t_k - 0}^{t_{k+1} - 0} (\dot{x}p - H_{eff}(x, p) - T f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n)) dt, \\ \hat{H}_{eff} &= \hat{H}_F - \frac{i\hbar}{2} \hat{L}^\dagger \hat{L}. \end{aligned}$$

ここで時間に関する積分を

$$\int_{t_k - \epsilon}^{t_{k+1} - \epsilon} = \int_{t_k + \epsilon}^{t_{k+1} - \epsilon} + \int_{t_k - \epsilon}^{t_k + \epsilon}, \quad \epsilon > 0,$$

と分割し, 極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとると,

$$W[x, p] = \int_{t_k - 0}^{t_{k+1} - 0} (\dot{x}p - H_{eff}(x, p)) dt - T f(x_k),$$

となる. つまりキックに対応する項が分割される [2]. こうして次式が成立する:

$$\begin{aligned} &I(x_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+1} - 0; x_k, y_k, t_k - 0) \\ &= I_F(x_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+1} - 0; x_k, y_k, t_k - 0) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} T f(x_k) + \frac{i}{\hbar} T f(y_k) \right). \end{aligned}$$

I_F は式 (19c) においてハミルトニアンを式 (13) の第一項にしたとき得られるものである. 以後は簡単のために

$$I(x_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+1} - 0; x_k, y_k, t_k - 0) = I_{k+1, k},$$

$$\langle x_k | \rho(t_k - 0) | y_k \rangle = \rho_k,$$

と書くことにする. こうして時刻 t_0 から t_n への密度行列に関する写像は次式で与えられることになる:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \int dx_{n-1} dy_{n-1} I_{n, n-1} \int dx_{n-2} dy_{n-2} I_{n-1, n-2} \dots \\ &\quad \times \dots \int dx_1 dy_1 I_{2, 1} \int dx_0 dy_0 I_{1, 0} \rho_0 \\ &= \int dx_{n-1} dy_{n-1} \dots dx_1 dy_1 dx_0 dy_0 I_{n, 0}^n, \end{aligned} \tag{26a}$$

$$I_{n,0}^n \equiv I_{n,n-1} I_{n-1,n-2} \times \dots \times I_{1,0}. \quad (26b)$$

この導出ではリンドブラッド型マスター方程式の推進演算子におけるハミルトン部と散逸部の分離という仮定は使われていないことに注目すべきである。式(14)をみよ。この意味で本研究で得られた式(26a)はより一般的なものといえる。

さらに $\hat{H}_F$ としてくりこみ項付きの自由ハミルトニアンを採用した場合について考察する。この場合、古典系でカオス発生の起源は周期的なキックの効果である。¹⁴ $\hat{H}_F$ および $\hat{L}$ として次式のようなモデルを考えよう：

$$\hat{H}_F = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\gamma}{2} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}).$$

$$\hat{L} = \sqrt{\frac{\gamma m \omega}{\hbar}} \hat{x} + i \sqrt{\frac{\gamma}{m \omega \hbar}} \hat{p}.$$

このとき $I_{k+1,k}$ は 4.3.2 節の結果を利用してすぐに計算できる：

$$I_{k+1,k} = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\left| \frac{\partial^2 R_{k+1,k}}{\partial \Sigma_{k+1} \partial \Delta_k} \right|^2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} R_{k+1,k} + \frac{1}{\hbar} D_{k+1,k} \right), \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} R_{k+1,k} = & \frac{m}{\tau} \left(\Sigma_{k+1} \Delta_{k+1} - \frac{1}{J} \Sigma_{k+1} \Delta_k - \Sigma_k \Delta_{k+1} + \frac{1}{J} \Sigma_k \Delta_k \right) \\ & - T \left(f \left(\Sigma_k + \frac{1}{2} \Delta_k \right) - f \left(\Sigma_k - \frac{1}{2} \Delta_k \right) \right), \end{aligned} \quad (27b)$$

$$D_{k+1,k} = -\frac{\gamma}{2m\omega} (a_{22}(T) \Delta_{k+1}^2 + a_{11}(T) \Delta_k^2 + 2a_{21}(T) \Delta_{k+1} \Delta_k). \quad (27c)$$

ここで

$$J = e^{-2\gamma T}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\gamma J}{1-J}$$

である。また $a_{11}(T)$, $a_{22}(T)$, $a_{21}(T)$ はそれぞれ式(22d), (22e), (22f) で与えられる量である。なおこのモデルでは

$$v_1(t) = \frac{1}{2\gamma\tau J} (1 - J e^{2\gamma t}), \quad v_2(t) = \frac{1}{2\gamma\tau} (e^{2\gamma t} - 1)$$

である。この結果は厳密なものである。したがって、1ステップの時間発展は厳密に評価されたことになる。また古典系との対応という視点から式(27a)を捉えることができる。式(27b)を古典的作用関数とみなし、

$$P_{k+1} = \frac{\partial R_{k+1,k}}{\partial \Delta_{k+1}}, \quad P_k = -\frac{\partial R_{k+1,k}}{\partial \Delta_k}, \quad K_{k+1} = \frac{\partial R_{k+1,k}}{\partial \Sigma_{k+1}}, \quad K_k = -\frac{\partial R_{k+1,k}}{\partial \Sigma_k},$$

¹⁴ここでの考察は位置の全空間に関するものである。もし空間を有限にして量子化する場合では、その際に考慮する周期境界条件もカオス発生の要因となりえる。

とおくと、次式を得ることができる:

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k + \frac{\tau}{m} P_k, \quad (28a)$$

$$P_{k+1} = J \left(P_k - T \frac{\partial}{\partial \Delta_k} G_k \right), \quad (28b)$$

$$\Delta_{k+1} = \Delta + 2\gamma\tau\Delta_k + \frac{\tau}{m} K_{k+1}, \quad (28c)$$

$$K_{k+1} = K_k - T \frac{\partial}{\partial \Sigma_k} G_k. \quad (28d)$$

ここで,

$$G_k = f \left(\Sigma_k + \frac{1}{2} \Delta_k \right) - f \left(\Sigma_k - \frac{1}{2} \Delta_k \right)$$

である. 一方, 次のような古典系を考えよう [45]:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -ay + kg(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

この連立微分方程式についても離散的時間 $t_n = nT$ により記述される写像を考えることができる. これはポアンカレ写像とも呼ばれる. 結果は次式のようになる:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k + \tau y_k \\ J(y_k - kg(x_k)) \end{pmatrix}.$$

ただし,

$$J = e^{-aT}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{aJ}{1-J}$$

である. J は写像のヤコビアンであり, $a > 0$ のとき明らかに 1 より小さい. すなわち散逸系であることを示唆している. τ は写像の有効基本周期と呼ばれ, $J \sim 1$ のとき $\tau \sim T$ となる. こうして τ, J は古典系を特徴付ける量であることがわかる. また式 (28a), (28b) はこの古典系のポアンカレ写像とよく対応するものといえる.

4.3.4 半古典的手法の開発にむけて

古典系の情報が量子系にどのように反映するかを調べるためには, 任意の時刻への量子散逸写像を構成する必要がある. つまり式 (26a) の評価をしなければならない. キックとして加える f が調和振動子を除く関数の場合, 評価のためには近似的手段をとらねばならない. まずおこなうべきは, 定常位相の方法を用い, $\hbar \rightarrow 0$ のときの漸近的な挙動を評価することである. こうして半古典的描像を得ることが期待される.

例として2ステップの時間発展を評価してみよう. つまり次式を評価することになる:

$$\rho_2 = \int dx_1 dy_1 dx_0 dy_0 I_{2,0}^2 \rho_0.$$

さて $I_{2,0}^2$ は式 (27a) を用いて次式のようになる:

$$\begin{aligned} I_{2,0}^2 = & \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \sqrt{\left| \frac{\partial^2 R_{2,1}}{\partial \Sigma_2 \partial \Delta_1} \right|^2} \sqrt{\left| \frac{\partial^2 R_{1,0}}{\partial \Sigma_1 \partial \Delta_0} \right|^2} \\ & \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} (R_{2,1} + R_{1,0}) + \frac{1}{\hbar} (D_{2,1} + D_{1,0}) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

定常位相の方法を使うためには式 (29) に含まれる作用関数

$$\frac{i}{\hbar} (R_{2,1} + R_{1,0}) + \frac{1}{\hbar} (D_{2,1} + D_{1,0}),$$

を $\hbar \rightarrow 0$ で最も積分に寄与するように評価しなければならない. 作用関数が複素数の場合でも停留位相の手法を使うことはできる [21, 62, 63]. 本研究ではその評価を具体的には実行できていない. 困難は作用関数の複素化と, “重心座標” Σ と “相対座標” Δ とがうまく分離しないことなどが挙げられる. 密度行列ではなく QSD の経路積分表示に基づけば, 後者の困難は回避できるが, その場合は作用関数のなかに伊藤確率積分が含まれるという困難が発生する. こうした点の解決は今後の課題である.

4.4 本節のまとめ

本節では, 量子散逸カオス系を解析的に取り扱う準備として, 系の時間発展を写像として記述することをおこなった. まずリンドブラッド型マスター方程式を記述する時間発展を表す積分核を経路積分表示であらわした. そして減衰調和振動子による解析をし, 自己無矛盾性の確認をおこなった. 量子散逸写像の導出については周期的なキックを系が受ける点と系の時間発展がリンドブラッド型マスター方程式に従うという点のみを用いている. これはしばしばおこなわれるハミルトン部と散逸部の分離という仮定 [2, 21, 59] より一般的なものとなっている.

この時間発展をもとに任意の時刻に関する写像を構築しなければならない. そして, この情報をもとにして時間発展の推進演算子の固有値の計算をする必要がある. このために必要となる手法がまさに半古典的手法である. 数学的にはこれは定常位相の手法を作用関数が複素数の場合に拡張することを意味している. 文献 [21, 62, 63] に詳しく議論されているが, まだその点については解析ができていない.

5 結論

本研究ではハミルトン系以外における量子-古典対応をカオス現象を通じて調べた.

時間発展としてはマルコフ的なものに議論を限定した。このとき量子開放系のダイナミックスは一般にリンドブラッド型マスター方程式により記述される。こうして現象論的に開放系を量子化できることになる。

まずダフィン振動子という特定のモデルに関する数値解析をおこなった。数値解析にはリンドブラッド型マスター方程式と等価な QSD によりおこなった。古典的領域から量子的領域への移行をプランク定数 $\hbar$ と系の特徴的な作用 S_{char} の比 $\beta^2 = \hbar/S_{cha}$ を動かすことで考えた。そしてカオスの定義ともいえる初期値鋭敏性に関連した新たな量を導入し、この初期値鋭敏性に基づき、様々な (β, ϵ) の値に対して系の挙動を調べた。この数値計算により量子-古典領域の移行において、ある臨界的な段階が存在することを示すことができた。また初期値鋭敏性の導入により β の各値において古典的か量子的かを詳細に議論することができた。深量子的領域における考察から量子散逸カオス系に対する新たな知見を得られた。つまり散逸の役割が量子的領域、深量子的領域ではカオス発生を抑制する方向に働いてしまうことがわかった。

ダフィン振動子の数値解析では散逸系を特徴付ける量を調べているとはいえない。また対応する古典系の情報がどのように量子系に反映されるかが全くわかっていない。こうした問題意識から半古典的手法の開発を試みた。まずリンドブラッド型マスター方程式を形式的に積分し、それを経路積分表示で表した。散逸系の時間発展を調べる上では時間を離散的に区切り、写像として捉えることが適切である。そこでもとめた時間発展の積分核を使い量子散逸写像の構成をおこなった。この際、周期的なキックを受ける系という限定をただけで、このほかに特に仮定は用いていない。こうしてハミルトン部と散逸部を分離して扱う手法より、一般的な量子散逸写像を構成することができた。この写像の具体的な評価はまだできていない。これは主として複素化した作用関数のもとでの定常位相の方法を本研究ではまだ扱うことができていないためである。

量子-古典対応の問題は量子力学の基礎に関わる重要な問題である。特にカオスという古典力学特有の現象は、量子化という操作そのものと深く関わっているように思われる。また散逸を量子系においてどのように捉えるかも非常に興味深い問題である。量子散逸カオスはこのように様々な量子論の基礎に関わる問題が絡み合っており、極めて複雑である。しかしまた同時に非常に重要な問題とも言える。この分野の研究は、本研究の前半と同様に、数値的なものが多い。そういう状況で本研究の後半のような立場からのアプローチは大変重要と考えられる。

謝辞

本研究で QSD の数値計算をする際 R. Schack 氏および T. A. Brun 氏の開発したアルゴリズムは極めて有用なものでした。両氏には深く感謝いたします。本研究を進める上で、有益な議論をさせていただきました大場教授、中里教授に感謝いたします。特に大場教授には共同研究者として様々な点で大変お世話になりました。また大場・中里研究室の皆様とは日頃から様々な議論をさせていただき感謝しています。最後になりましたが、学会や研究集会にて議論をしてくださった皆様に深く感謝いたします。

A 式 (10) の導出

深量子的領域における $\Delta(\tau)$ の評価を実行するため, $\Delta(\tau)$ は $\tau_0 < \tau < \tau_{asympt}$ において有効プランクセルの大きさより小さいということに注意しよう. したがって, 別々の初期条件から出発した各波束は非常に近くにあり, ほとんど互いに重なり合っているといえる. こうして $\tau > \tau_0$ に対して $\Delta(\tau)$ は 2 つある初期条件のうちただ 1 つのみに対する波束の広がりにより特徴付けられる $D(q, p, \tau)$ により表すことができる. D^2 を $M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a})) \equiv M(\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle)$ と定義する. 文献 [36] において, この $M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a}))$ は QSD の枠組みの中で局所化を調べるため導入されている. この量は $\text{Tr}(\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho) - \text{Tr}(\hat{a}^\dagger \rho) \text{Tr}(\hat{a} \rho)$ とは異なる. $M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a}))$ は QSD の枠組みの中でのみ計算することができる量である. 以上の考察に加え, 初期条件の集合についての平均操作をしていることを考慮すると,

$$\Delta(\tau) \approx \int dq dp \mu(q, p) D(q, p, \tau) \quad (30)$$

と書くことができる. $\mu(q, p)$ は初期条件の分布関数である. 積分領域の体積を V とする¹⁵. $\mu(q, p)$ を一様分布と仮定すると,

$$\Delta(\tau) \approx \frac{1}{V} \int dq dp D(q, p, \tau) \quad (31)$$

となる.

$\hat{H} = 0$ であり, リンドブラッド演算子が式 (5b) で与えられる場合を考えると次式が得られる:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a})) &= -2\Gamma M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a})) - 2\Gamma M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a})^2) - 2\Gamma M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger)\sigma(\hat{a}, \hat{a})) \\ &\leq -2\Gamma M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a})) - 2\Gamma (M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a})))^2. \end{aligned} \quad (32)$$

式 (32) において等号が成立する場合はリッカチの微分方程式になっている. ここで $u = M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a}))$ とおく. そして u は任意の時刻 τ で正である. このことに注意すると次式を導くことができる:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u} \right) &\geq 2\Gamma \left(1 + \frac{1}{u} \right) \\ \iff \frac{1}{u(\tau)} - \frac{1}{u(0)} &\geq 2\Gamma \int_{\tau_0}^{\tau} ds \left(1 + \frac{1}{u(s)} \right) \\ \iff \frac{1}{u(\tau)} &\geq \left(1 + \frac{1}{u(0)} \right) e^{2\Gamma\tau} - 1 \\ \iff u(\tau) &\leq \frac{1}{C e^{2\Gamma\tau} - 1}. \end{aligned}$$

¹⁵古典系では軌道はある相空間内の有限の領域, 散逸カオス系ではまさに奇妙なアトラクターとなっている, を動きまわる. そうした状況を考慮して積分領域を有限としている. 量子系でこのような考察の正当性は明確ではないが図 2(a)–(d) の結果からすれば妥当と考えられる.

ここで $C = 1 + 1/u(0)$ である. 以上をまとめると次式を得る:

$$M(\sigma(\hat{a}^\dagger, \hat{a}))(\tau) \leq \frac{1}{C(q, p)e^{2\Gamma\tau} - 1}. \quad (33)$$

式 (33) を用いて次式を得ることができる.

$$\Delta(\tau) \lesssim \frac{1}{V} \int dq dp \sqrt{\frac{1}{C(q, p)e^{2\Gamma\tau} - 1}}. \quad (34)$$

$C(q, p)$ は初期の波束の広がりに関連している.

ここで再び式 (30), (31) を導出する際に用いた近似について考えなければならない. これらの式は $\Delta(\tau)$ が有効プランクセルに比べ小さいときのみ正当である. $\Delta(\tau)$ は図 5(b)-(f) により, 初期の非常に短い時間に対しては有効プランクセルの大きさよりも大きくなる. つまり上述の近似はこの時間間隔では悪いものとなる. したがって式 (34) を次式のように変更することになる:

$$\begin{aligned} \Delta(\tau - \tau_0) &\lesssim \frac{1}{V} \int dq dp \left(\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) e^{2\Gamma(\tau - \tau_0)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) e^{2\Gamma(\tau - \tau_0)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

こうして式 (10) が得られる.

B リウビル空間について

密度行列を形式的に扱うためにはリウビル空間を用いるのが便利である. ただしこうした取り扱いは形式的なものであることに注意する必要がある. 4.2.1 節においても形式的に議論をしている. ここでは数学的な取り扱いを容易にするため, 議論を有限系に限る. またこの節ではヒルベルト空間上の演算子 A を $\hat{A}$ なしで表す.

B.1 導入

$\mathcal{H}$ を次元が N のヒルベルト空間とし, そこでの完全正規直交系を $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$ とする. すなわち

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_{n=1}^N |n\rangle\langle n| = 1, \quad (35)$$

である. $\mathcal{H}$ 上の線形演算子全体を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ とおくと, これは線形空間である. そして $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $|A\rangle$ と書くことにする. 内積が

$$(A|B) = \text{Tr}(A^\dagger B), \quad (36)$$

で定義できる。これはヒルベルト–シュミット内積である [15]。\$A\$ のヒルベルト–シュミットノルム \$\|A\|_2\$ は

$$\|A\|_2 = \sqrt{(A|A)}$$

となる。こうして \$\mathcal{L}(\mathcal{H})\$ もヒルベルト空間になり、正規直交基底は

$$|n, m\rangle \equiv |n\rangle\langle m|, \quad (37)$$

で構成することができる。すなわち

$$(n, m|k, l) = \delta_{nk}\delta_{ml}, \quad \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |n, m\rangle\langle n, m| = 1, \quad (38)$$

が言えることになる。¹⁶ この \$\mathcal{L}(\mathcal{H})\$ を \$\mathcal{H}\$ に対するリウビル空間と呼ぶ。式 (38) から \$|A\rangle\$ は次のように展開できる:

$$|A\rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |n, m\rangle\langle n, m|A\rangle \equiv \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |n, m\rangle A(n, m). \quad (39)$$

ここで \$A(n, m) = (n, m|A) = \text{Tr}(|m\rangle\langle n|A) = \langle n|A|m\rangle\$ である。\$A\$ として特に密度行列をとることもできる。

B.2 \$\mathcal{L}(\mathcal{H})\$ 上の線形演算子

マスター方程式は形式的に \$\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\rho\$ と書くことができる。このことから \$\mathcal{L}(\mathcal{H})\$ 上の線形演算子を考えることができることがわかる。実際これは超演算子と呼ばれる。当然ながら \$|n, m\rangle\langle n, m|\$ も超演算子である。超演算子を \$\hat{I}\$ と書くことにし、

$$\hat{I}|A\rangle = |\hat{I}(A)\rangle \quad (40)$$

で定義する。特に密度行列 \$\rho\$ に対して考えると、

$$(n, m|\hat{I}|\rho) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (n, m|\hat{I}|k, l)(k, l|\rho) \equiv \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N I(n, m; k, l) \langle k|\rho|l\rangle, \quad (41)$$

となる。これは式 (19a) の離散的な場合である。また \$\mathcal{L}(\mathcal{H})\$ の元 \$A\$ に対し新たに次のような超演算子 \$\hat{L}_A\$ を定義できる:

$$\hat{L}_A|B\rangle = |AB\rangle.$$

つまり \$B\$ に対し左から \$A\$ をかける演算子である。また

$$\hat{R}_A|B\rangle = |BA\rangle,$$

¹⁶ \$\{|n\rangle\}_{n=1}^N\$ が \$\mathcal{H}\$ の正規直交基底であることと内積の定義 (36) からすぐ示すことができる。

とおけば, これは B に対し右から A をかける演算子である. さらに

$$\hat{L}_A^-|B\rangle = \hat{L}_A|B\rangle - \hat{R}_A|B\rangle, \quad \hat{R}_A^-|B\rangle = -\hat{L}_A^-|B\rangle$$

を定義しておこう.

これらはマスター方程式を表す際に便利である. 式 (1) よりリンドブラッド型の場合で $\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\rho$ としたときの $\hat{\mathcal{L}}$ は次式のように表すことができる:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{i}{\hbar}\hat{L}_H + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \left(\hat{L}_{L_j}\hat{R}_{L_j}^- + \hat{R}_{L_j}^+\hat{L}_{L_j}^- \right) \quad (42)$$

B.3 式 (12) の証明

ここで有限系の場合の式 (12) の証明を与える. $\{|n, m\rangle\}$ をリウビル空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の正規直交基底とする. L は $\mathcal{H}$ 上のエルミートな線形演算子とする. このとき,

$$\begin{aligned} \langle n, m | (\hat{L}_L^-)^2 | n, m \rangle &= \text{Tr} \left(|m\rangle\langle n| L^2 |n\rangle\langle m| + |m\rangle\langle m| L^2 - 2|m\rangle\langle n| L |n\rangle\langle m| L \right) \\ &= \langle n| L^2 |n\rangle + \langle m| L^2 |m\rangle - 2\langle n| L |n\rangle\langle m| L |m\rangle \\ &\geq \langle n| L^2 |n\rangle + \langle m| L^2 |m\rangle - (\langle n| L^2 |n\rangle)^2 - (\langle m| L^2 |m\rangle)^2 \\ &= \| (L - \langle n| L^2 |n\rangle) n \|^2 + \| (L - \langle m| L^2 |m\rangle) m \|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

ここで $\|\bullet\|$ は $\mathcal{H}$ のノルムとした.

参考文献

- [1] M. V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **349**, 101 (1976).
- [2] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, Berlin, 2000).
- [3] K. Nakamura, *Quantum versus Chaos: Questions Emerging from Mesoscopic Cos-*
mos (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997).
- [4] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers,
Dordrecht, 1995).
- [5] H. Higuchi and K. Takatsuka, Phys. Rev. E **66**, 035203(R) (2002).
- [6] I. B. Ivanov, quant-ph/0203019 (2002).
- [7] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New
York, 1990).

- [8] T. Arimitsu, quant-ph/0206062 (2002).
- [9] G. t'Hooft, quant-ph/0212095 (2002).
- [10] T. Bhattacharya, S. Habib, and K. Jacobs, Phys. Rev. Lett. **85**, 4852 (2000).
- [11] S. Habib, K. Shizume, and W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **80**, 4361 (1998).
- [12] W. H. Zurek and P. Paz, Phys. Rev. Lett. **72**, 2508 (1994).
- [13] P. Miller and S. Sarkar, Phys. Rev. E **58**, 4217 (1998).
- [14] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, London, 1976).
- [15] R. S. Ingarden and A. Kossakowski, Ann. Phys. **89**, 451 (1975).
- [16] G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [17] H. Spohn and J. L. Lebowitz, Adv. Chem. Phys. **38**, 109 (1978).
- [18] U. Fano, Rev. Mod. Phys. **29**, 74 (1957).
- [19] B. デスパーニア, 町田茂訳, 量子力学における観測の理論 (岩波書店, 東京, 1780).
- [20] H. H. Adamyan, S. B. Manvelyan, and G. Y. Kryuchyan, Phys. Rev. E **64**, 046219 (2001).
- [21] D. Braun, *Dissipative Quantum Chaos and Dechoerence* (Springer, Berlin, 2001).
- [22] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise, 2nd Enlarged ed.* (Springer, Berlin, 2000).
- [23] R. Alicki, Phys. Rev. A **40**, 4077 (1989).
- [24] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).
- [25] G. Kimura, Phys. Rev. A **66**, 062113 (2002).
- [26] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Physica A **121**, 587 (1983).
- [27] B. L. Hu and A. Matacz, Phys. Rev. D **49**, 6612 (1994).
- [28] B. L. Hu, J. P. Paz, and Y. Zhang, Phys. Rev. D **45**, 2843 (1992).
- [29] G. Kimura, K. Yuasa, and K. Imafuku, Phys. Rev. A **63**, 022103 (2001).
- [30] T. A. Brun, I. C. Percival, and R. Schack, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2077 (1996).

- [31] N. Gisin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1652 (1984).
- [32] N. Gisin and I. C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 5677 (1992).
- [33] N. Gisin and I. C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 2233 (1993).
- [34] N. Gisin and I. C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 2245 (1993).
- [35] R. Schack, T. A. Brun, and I. C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 5401 (1995).
- [36] I. C. Percival, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 1003 (1994).
- [37] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1985).
- [38] 小倉久直, 物理・工学のための確率過程論 (コロナ社, 東京, 1978).
- [39] W. T. Strunz, Phys. Rev. A **54**, 2664 (1996).
- [40] R. Schack and T. A. Brun, Comp. Phys. Comm. **102**, 210 (1997).
- [41] G. C. Ghirardi, P. Pearle, and A. Rimini, Phys. Rev. A **42**, 78 (1990).
- [42] P. Goetsch and R. Graham, Phys. Rev. A **50**, 5242 (1994).
- [43] H. H. Adamyany, S. B. Manvelyan, and G. Y. Kryuchyan, Phys. Rev. A **63**, 022102 (2001).
- [44] Y. Kim, S. Y. Lee, and S. Y. Kim, Phys. Lett. A **275**, 254 (2000).
- [45] 森肇, 蔵本由紀, 散逸構造とカオス (岩波書店, 東京, 1994).
- [46] C. Holmes and P. Holmes, J. Sound Vib **78**, 161 (1981).
- [47] P. Holmes, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **292**, 419 (1979).
- [48] E. A. Jackson, *Perspectives of nonlinear dynamics volume2* (Cambridge University Press, New York, 1990).
- [49] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems and Bifurcations Vector Fields* (Springer, Berlin, 1983).
- [50] V. E. Tarasov, Phys. Rev. E **66**, 056116 (2002).
- [51] R. Grobe and F. Haake, Phys. Rev. Lett. **62**, 2893 (1989).
- [52] V. V. Sokolov and V. G. Zelevinsky, Nucl. Phys. A **504**, 562 (1989).
- [53] D. Braun, P. A. Braun, and F. Haake, Physica D **131**, 265 (1999).

- [54] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics 4: Analysis of Operators* (Academic Press, California, 1978).
- [55] 高橋陽一郎, 基礎数学 6 微分方程式入門 (東京大学出版会, 東京, 1988).
- [56] P. Gaspard, D. Alonso, and I. Burghardt, *Adv. Chem. Phys.* **90**, 105 (1995).
- [57] M. Tabor, *PhysicaD* **6**, 195 (1983).
- [58] H. Sambe, *Phys. Rev. A* **7**, 2203 (1973).
- [59] T. Dittrich and R. Graham, *Z. Phys. B* **62**, 515 (1986).
- [60] 大貫義朗, 鈴木増雄, 柏太郎, 経路積分の方法 (岩波書店, 東京, 1992).
- [61] 一松信, 他, 新数学辞典 (大阪書籍, 大阪, 1986).
- [62] A. G. Prudkovsky, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **13**, 275 (1973).
- [63] A. G. Prudkovsky, *Zh. Vych. Mat. Mat. Fiz.* **14**, 299 (1974).