

抽象的コーシー問題の hyperfunction 解

九州大学 工学部 (応用理学)

大内 忠

§0 Banach 空間 X における抽象的コーシー問題 (発展方程式)

$$(0.1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = a \end{cases} \quad a \in X, \quad A: \text{線型作用素}$$

の超函数解 (hyperfunction solutions) の存在, 一意性, 解の正則性についての結果を報告する。Distribution についての結果は J. Chazarain [1], G. Da Prato [2], D. Fujiwara [3], J. L. Lions [4], T. Ushijima [6] 等も参照されたい。以下に述べる結果により, distribution の意味で (0.1) が解けるような A は hyperfunction の意味でもとける。これは hyperfunction が distribution より広い函数概念の拡張であることから予想される当然の結果である。

我々は, 超函数解の存在, 一意性, 正則性と, A の resolvent の存在領域と, それらの resolvent の増大度 (評価) によって特徴づける。

なお以下において、超函数といえは *hyperfunction* のことを意味し、Schwartz の *distribution* は *distribution* と書くことにする。

3) ベクトル値超函数 (Banach space に値をとる超函数)

以下において必要になるベクトル値超函数の定義、いくつかの結果を証明せしに与える。これらの証明については、M. Sato [5a], [5b] の場合の証明をベクトル (Banach space valued) に直すことは容易である。

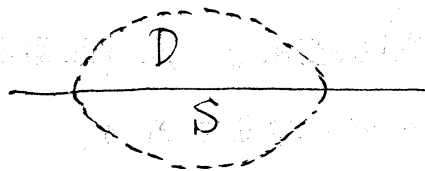
E を Banach 空間とする。

$\mathcal{O}(\Omega, E)$: E -valued 正則函数で定義域 $\Omega \subset \mathbb{C}^1$

S を $\mathbb{R}^1$ の open set とする。 E -valued hyperfunction を次の商空間の元として定義する。

$$\mathcal{B}(S, E) = \frac{\mathcal{O}(D-S, E)}{\mathcal{O}(D, E)}$$

ここで D は S の閉集合として含む複素近傍。



$\mathcal{B}(S, E)$ は D のとり方によらない。また $\mathcal{B}(S, E)$ の重要な性質として、次の性質がある。

任意の $f \in B(S, E)$ に対して, 以下の性質をもつ $\tilde{f} \in B(R', E)$ が存在する。 $\tilde{f}|_S$ ($\tilde{f}$ の S への制限) が f と一致する。

これは, 超函数が flabby sheaf であることと示している。

§2, コーシ問題の適切性.

E, F を Banach space とし, 各々のノルムを $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$ で表わす。 $L(E, F)$ で E から F への有界線型作用素の作る Banach 空間を表わし, そのノルムを $\|\cdot\|_{E \rightarrow F}$ で示す。 $L(E, E)$ は簡単に $L(E)$ で表わす。

X を Banach 空間とする。 A は X の部分空間で定義された閉作用素で, その定義域を $[D(A)]$ で表わし, A が λ ノルムをもつバナッハ空間とみえる。 $\rho(A)$ は A の resolvent set の記号。 I : 恒等写像, I_X : 恒等写像 on X , $[D(A)]$: 恒等写像 on $D(A)$ を表わすものとする。

定義 閉作用素 A が超函数の意味で $t=0$ における Cauchy 問題が適切 (well-posed) であるとは, 次の条件 (2.1) (2.2) を満たす $\gamma \in B(R', L(X, D(A)))$ が存在すること。

(2.1) support of $\gamma \subset [0, \infty)$

$$(2.2) \quad (\delta^{(1)}(t) \otimes I - \delta(t) \otimes A) * \gamma = \delta(t) \otimes I_X$$

$$\gamma * (\delta^{(1)}(t) \otimes I - \delta(t) \otimes A) = \delta(t) \otimes I_{[0, \infty)},$$

ここで $\delta(t-\tau)$ は $t=\tau$ における δ -measure, $*$ 合成積, $\delta^{(k)}(t)$ は $\delta(t)$ の k 次導函数, $\otimes$ はテンソル積を表わす, γ を超函数基本解ということにする。

Remark 1.

A が超函数の意味で well-posed ならば, その基本解は $\mathcal{D}'(R, L(X, [0, \infty)))$ で一意である。それは, γ が両逆の基本解で, その support が $[0, \infty)$ に含まれていることより従う。

我々の第一の定理は次のそれである。

定理 1.

閉作用素 A が超函数の意味で well-posed であるための必要十分条件は, A の resolvent について次の条件が満たされることである,

$\forall \varepsilon > 0$ に對して $\exists k_\varepsilon$ があって,

$\Sigma_\varepsilon = \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon |\operatorname{Im} \lambda| + k_\varepsilon\}$ なる集合が $\rho(A)$ に含まれ、
 かつ、ここで

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon |\lambda|) \text{ なる評価}$$

式が成り立つ,

定理 1 の証明の概略

必要性

$A \in \text{well-posed}$ とせよ. 超函数の flabiness より次の性質をもつ $T_1 \in \mathcal{B}(R^1, L(X, [D(A)]))$ が存在する.

$$t < 1 \quad T_1 = T$$

$$t > 1 \quad T_1 = 0.$$

この超函数 T_1 に対して

$$(\delta(t) \otimes I - \delta(t) \otimes A) * T_1 = \delta(t) \otimes I_X + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(t-1) \otimes A_n$$

ここで $A_n \in L(X)$ で一点に support をもつ超函数の構造定理により, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon > 0$

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \right\|_{X \rightarrow X} \leq M_\varepsilon \exp \varepsilon(|\lambda|) \quad \text{が成り立つ}$$

従って, T_1 の Laplace 変換 $\langle T_1, \exp(-\lambda t) x \rangle, x \in X$ に対して

$$(\lambda - A) \langle T_1, \exp(-\lambda t) x \rangle = x + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \exp(-\lambda) A_n x$$

が成り立ち, もし, $\operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon |\lambda| + \log 2 M_\varepsilon$ ならば,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \exp(-\lambda) A_n \right\|_{X \rightarrow X} \leq \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad A \text{ is resolvent}$$

が成り立つことを示す.

そこで

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X \rightarrow [D(A)]} \leq 2 \|\langle T_1, \exp(-\lambda t) \cdot \rangle\|_{X \rightarrow [D(A)]} \leq C_\varepsilon \exp \varepsilon(|\lambda|)$$

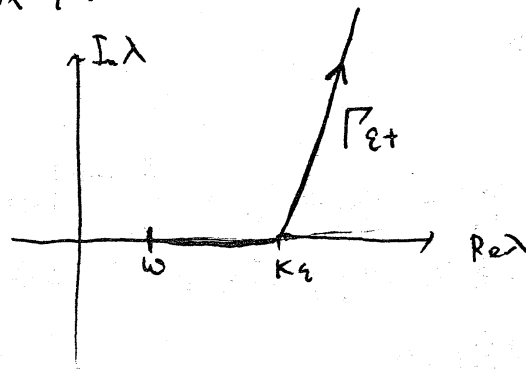
十分性 実数 $\omega \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ 固定し

path $\Gamma_{\varepsilon\pm} : t \in \omega \leq \operatorname{Re} \lambda \leq K_\varepsilon$ ただし $\operatorname{Im} \lambda = 0$

$t \in \operatorname{Re} \lambda \geq K_\varepsilon$ かつ

$$\operatorname{Re} \lambda = \pm \varepsilon \operatorname{Im} \lambda + K_\varepsilon \quad \text{with } \operatorname{Im} \lambda \geq 0$$

と定義する



$$T_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon\pm}} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad \text{とある. } z > 0 \text{ の変換}$$

よって: z により, $T_{\pm}(z)$ は $C^1 - [0, \infty)$ への正則関数を定める. したがって $\mathcal{O}(C^1 - [0, \infty), L(X, D(A)))$ である.

かんたんな計算により

$$\frac{dT_{\pm}(z)}{dz} = AT_{\pm}(z) + \frac{-1}{2\pi i} \frac{e^{\omega z}}{z} I_X$$

$$\frac{dT_{\pm}(z)}{dz} = T_{\pm}(z)A + \frac{-1}{2\pi i} \frac{e^{\omega z}}{z} I_{[0, \infty)} \quad \text{である: } z > 0$$

わかり, $T(z)$ を定める超関数も基本解となる

Remark 2.

J. Chazarain [1]において, distribution の意味での well-posed の作用素の特徴づけが与えられた。それと比較してみると, 超函数の意味での well-posed の作用素の才が多いことがわかる。(当然の結果!!)

§3. 正則性,

超函数基本解の正則性について述べよう。

定理 2.

閉作用素 A が well-posed でその基本解が 扇形領域
超函数の意味で

$\Sigma = \{z; | \arg z | < \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$ で正則であるための,

必要十分条件は, A が次の条件を満たすことである:

$\forall \varepsilon > 0$ に対して, 実数 ω_ε があり, 任意の $\lambda \in \Sigma_\varepsilon$

$\Sigma_\varepsilon = \{\lambda; | \arg(\lambda - \omega_\varepsilon) | < \theta; \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \varepsilon\}$ に對して,

$(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ が存在し, $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon |\lambda|)$

が成り立つ。

定理 3.

閉作用素 A が well-posed で, その基本解が正の実軸上
超函数の意味で
で, 実解析的であるための必要十分条件は, 次の条件であ

3.

$\forall \varepsilon > 0$ に對し $\tau, K_\varepsilon, 0 < \delta_\varepsilon \leq \varepsilon$ があり, $\lambda \in \Sigma_\varepsilon =$
 $= \{ \lambda; \varepsilon \operatorname{Re} \lambda \geq -\delta_\varepsilon |\operatorname{Im} \lambda| + K_\varepsilon \}$ で $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ が
 存在し, 評価式 $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon |\operatorname{Re} \lambda| + \delta_\varepsilon |\operatorname{Im} \lambda|)$
 が成り立つことである.

定理2の証明は, 基本解の回転により, 定理1に帰着される.
 従, τ 以下においては, 定理3の証明の概略を述べる.

定理3の証明の概略

必要性

$$T(t) = [T(z)] \quad \frac{dT(z)}{dz} \equiv AT(z) + \frac{(-1)}{2\pi i} I \quad \text{mod } \text{正則函数.}$$

$T(t)$ が $t > 0$ で実解析的とせよ.

$\forall \varepsilon > 0$ に對し $\tau, \exists \delta_\varepsilon > 0$ があり, $T(t)$ は $t = \varepsilon$ 中心
 とし τ 収束半径 $2\delta_\varepsilon$ の Taylor 級数に展開できる.

$0 < \delta_\varepsilon \leq \varepsilon$ としよう.

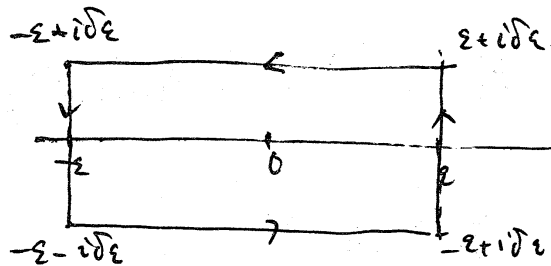
$$\text{すなわち } T_+(z) = T(z) \mid_{\operatorname{Im} z > 0}$$

$$T_-(z) = T(z) \mid_{\operatorname{Im} z < 0} \quad \text{とある.}$$

$T_+(z)$ は 既述により, 正の実軸 $\varepsilon \pm i\delta_\varepsilon$ 上,

$T(z)$ は正の実軸 $z = z + i0$ まで解析接続できる。

そして $\hat{T}(z)$ は正の実軸 $z = z + i0$ を、解析接続された $T(z)$ と一致する、 $\hat{T}(z)$ は正の実軸の両側近傍で二価正則函数となる。



P_{z+} $z + i\delta$ より左側
へ入る方向、右側
へ出る道。

P_{z-} $z - i\delta$ より左側へ入る
方向、右側へ出る道。

2. $\forall x \in X$

$$\int_{P_{z+}} e^{-\lambda z} \hat{T}_2 x \, dz \text{ を考えよ。}$$

この場合
左側より右側へ
行く方向

($\hat{T}_2 x$ が双価関数)

$$(\lambda - A) \int_{P_{z+}} e^{-\lambda z} \hat{T}_2 x \, dz = \int_{P_{z+}} -\frac{d}{dz} e^{-\lambda z} \hat{T}_2 x \, dz$$

$$- \int_{P_{z+}} e^{-\lambda z} A \hat{T}_2 x \, dz$$

$$= e^{-\lambda(z+i\delta)} [-\hat{T}_{z+i\delta} + \hat{T}_{(z+i\delta)} e^{2\pi i}] x$$

$$+ \int_{P_{z+}} e^{-\lambda z} \frac{d\hat{T}_2}{dz} x \, dz - \int_{P_{z+}} e^{-\lambda z} A \hat{T}_2 x \, dz$$

$$= e^{-\lambda(z+i\delta_\varepsilon)} \left[\tilde{T}_{z+i\delta_\varepsilon} + \tilde{T}_{(z+i\delta_\varepsilon)e^{2\pi i}} \right] x + x$$

最初の項 $\| \cdot \| < \frac{1}{2}$ ならば resolvent がある。

$$\lambda = \sigma + i\tau \quad z = z_0 + i\delta_\varepsilon$$

$$\| e^{-\sigma z + \tau \delta_\varepsilon} k_\varepsilon \| \leq \frac{1}{2} \quad k_\varepsilon = \| -\tilde{T}_{z+i\delta_\varepsilon} + \tilde{T}_{(z+i\delta_\varepsilon)e^{2\pi i}} \|$$

$$\sigma \geq \tau \delta_\varepsilon + k'_\varepsilon \tau \quad k'_\varepsilon = \log k_\varepsilon$$

resolvent がある

$$\begin{aligned} \| (\lambda - A)^{-1} x \| &\leq 2 \left\| \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{-\lambda z} \tilde{T}_z x dz \right\| \\ &\leq C_\varepsilon e^{|\sigma| + \tau \delta_\varepsilon} \| x \| \end{aligned}$$

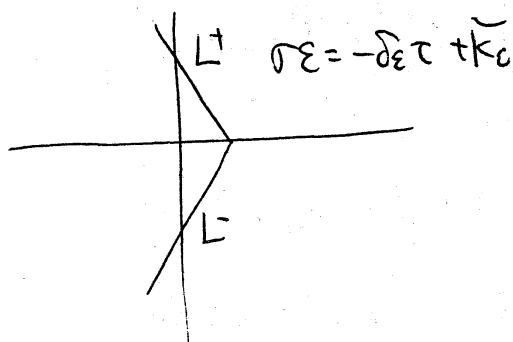
Γ_ε 上の τ の同様の結果

$$\sigma \geq -\delta_\varepsilon |\tau| + \tilde{k}_\varepsilon \tau \quad \tau \text{ resolvent がある。}$$

$$\| (\lambda - A)^{-1} \| \leq C_\varepsilon e^{|\sigma| + \delta_\varepsilon |\tau|} \quad (0 < \delta_\varepsilon \leq \varepsilon) \text{ がある}$$

成り立つ。

(+分性)



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \neq 1$$

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L=L^+ \cup L^-} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

$$z \neq \infty$$

$$|dx| \leq G'_2 |dz| \quad \lambda = \sigma + i\tau \quad z = x + iy$$

$$\|e^{\lambda z}(\lambda - \lambda_0)^{-1}\| \leq e^{\sigma x - \tau y} e^{|\tau|z + \pi|\delta z|}$$

$$\sigma < 0 \text{ とき} \leq e^{\sigma x - \tau y} e^{-\sigma z + \pi|\delta z|}$$

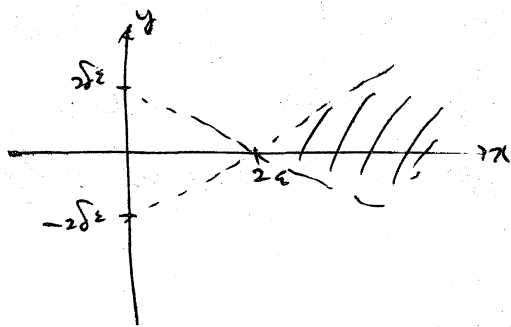
$\tau > 0$ のとき

$$\sigma x - \tau y - \sigma z + \pi|\delta z| = (-\frac{\delta z}{2}x - y + 2\delta z)\tau + x|k_z - k_z|$$

$\tau < 0$ のとき

$$\sigma x - \tau y - \sigma z + \pi|\delta z| = (+\frac{\delta z}{2}x - y - 2\delta z)\tau + x|k_z - k_z|$$

$$\text{よって } -\frac{\delta z}{2}x + 2\delta z < y < +\frac{\delta z}{2}x - 2\delta z \quad \tau \text{ 絶対値を}$$



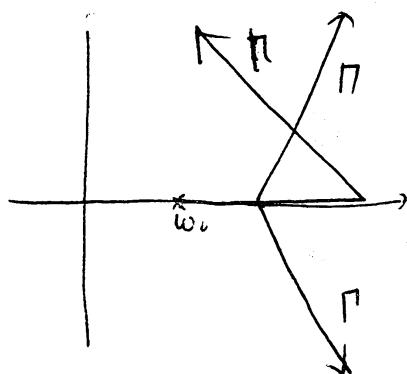
よって $S(x)$ は $x > 2\epsilon$ で実

解析的。 $z > 0$ のとき任意の z

$S(x)$ は $x > 0$ で解析的

よって $S(x)$ と超函数と (7) は S の正則函数 S ($S = S_+ - S_-$)

17 $\omega_0 \in \rho(A)$ を固定し、次の図の如く γ に path Γ を変化させて作る正則函数。 Γ の負の実軸へ $q < 1$ のみ の場合により、 $S(x)$ が解析核として立つ範囲が決まる。



$0 < \delta_2 \leq \varepsilon$ という条件は
 $\mathcal{S}$ が正の実軸及び 0 の近傍に
 一価正則な函数を定めたこと
 にもよる。

Remark 3

超函数解が $t > 0$ で C^∞ なことは、適当の class
 $\{M_n\}$ に属する条件も原点の近くで積分を、複素平面
 にも与えうることに示される。

References

[1], J. Chazarain: Probleme de Cauchy et applications
 a quelques problemes mixtes.
 (to appear in J. Functional Analysis)

[2], G. Da Prato, U. Mosco:
 semi gruppi distribuzioni analitici.
 (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1965) 367-396)

[3]. D. Fujiwara:

A characterization of exponential distribution semi groups. J. Math. Soc. Japan. 18, 3 (1966)
267~274.

[4]. J. L. Lions:

Les semi groupes distributions. Portug. Math. 19
(1966) 14/2/64

[5]. M. Sato:

[5a] 超函数と理論 (数学, 1958)

[5b] The theory of hyperfunctions I (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8)
(1959) 139-194

[6]. T. Ushijima:

Some properties of regular distribution semi-groups.
Proc. Japan Acad. 45 (1969) 224-227