

海底摩擦による波高減衰機構に関する研究

—層流境界層の場合—

岩垣 雄一・土屋 義人・坂井 順行・陳 活雄

STUDIES ON THE MECHANISM OF WAVE DAMPING DUE TO BOTTOM FRICTION

—IN THE CASE OF LAMINAR BOUNDARY LAYER—

By Yuichi IWAGAKI, Yoshito TSUCHIYA, Masayuki SAKAI
and Huoxiong CHEN

Synopsis

This paper presents part of results of basic studies on the wave damping due to bottom friction which have been performed for several years at the Ujigawa Hydraulic Laboratory. The investigation on damping characteristics of oscillatory waves was made by means of direct measurement of instantaneous shearing stresses exerted on smooth bottom due to waves and by the observations of wave amplitude attenuation with distance. On the other hand, in a theoretical approach the effect of convective terms involved in the basic equations of laminar boundary layers developing both on the bottom and the side walls of a wave channel resulting from wave motion, is considered on the basis of an approximate solution of the equations which was derived by the authors with the aid of the perturbation method. The theoretical results are compared with the experimental results and the linearized theory on the laminar boundary layer growth and wave damping.

1. 緒 言

海岸に襲来する波浪をいかに適確に予知し推定するかという問題は、海岸災害防止の研究における最も重要な課題の1つであることはいうまでもない。

この論文は、当研究所において、ここ数年来実施してきた海底摩擦による波高減衰に関する基礎的研究の成果の一部をとりまとめたものである^{1)~3)}。

海岸構造物を設計するための設計波を決定するにあたっては、浅海波の変形特性を適確に把握する必要があるが、その中でも、海底摩擦による波の変形に関しては、この現象が直接エネルギー損失をともなう1つの摩擦過程であるために、たとえば、砕波の現象とともに、その解明は一般にかなり困難なようである。

従来摩擦による波の変形のうち、粘性にもとづく内部摩擦による波高減衰に関しては、Lamb⁴⁾が、また浅海波に対して Hough⁵⁾、Biesel⁶⁾らが微小振幅波理論にもとづいて、それぞれ理論的な研究を行なっているが、一般に粘性による波高減衰はわれわれが対象とする海岸波浪の場合には、あまり大きくないようである。海底摩擦による波高減衰に関しては、1949年 Putnam および Johnson⁷⁾が実際の研究を行なっているが、波動運動にともなう海底付近の流れの特性が明確にされていないことから、適確なものとはいえないがたい

ようである。また、1953年 Savage⁸⁾ は実験水槽を用いて、摩擦および浸透効果による波高減衰の実験を試みて、上述の理論と比較検討を行なうとともに、砂れんの形成とエネルギー損失との関係を調べている。実際には海底におけるエネルギー損失の原因として、Savageの実験のように浸透現象があるわけであって、すでにこうした問題に対して、1949年 Putnam⁹⁾ が理論的な検討を行ない、その後 Reid と Kajiura¹⁰⁾ は Putnam の理論を吟味してその欠点を指摘している。ついで、Hunt¹¹⁾ やごく最近では Murray¹²⁾ が同様な問題に対し浸透境界面における粘性流を考慮した理論的考察を進めており、Hunt はその結果を Savage の実験結果と比較検討しているが、まだ十分なものといいがたいようである。一方、わが国においても、Putnam らの考察と同様な方法によって岸¹³⁾ あるいは永井および久保¹⁴⁾ らが研究を行なったが、なお多くの問題点を残しているようである。

一般に、海底摩擦による波高減衰の現象を研究するにあたっては、波の運動にともなう海底付近の流れの特性、すなわち波の運動にともなう、海底に発達する境界層の解析を行なう必要がある。境界層の発達の観点から実施された底面摩擦による波高減衰についての実験的研究には、Eagleson ('59, '62)^{15), 16)}, Grosch-Lukasik ('60, '63)^{17), 18)} および著者ら ('64)²⁾ のものがあり、線型層流境界層理論にもとづく波高減衰の理論式との比較が行なわれ、理論結果と実験値との間にはかなりの相違があることが見出された。

本研究は、理論的には層流境界層方程式のせつ動解を求めて、波動運動にともなう境界層の発達と流れの挙動を明らかにし、さらに損失エネルギーを計算して、線型理論の結果と比較検討したのち、波高減衰の理論式を導き、層流境界層の場合の波高減衰機構を解明しようとするものであり、実験的には、波による底面摩擦応力を直接測定して、理論結果と比較検討するとともに、波高減衰に関する実験をも実施して、線型理論および著者らの波高減衰理論の結果と比較して、その適合性を検討し、問題点を明らかにしようとするものである。

2 底面摩擦による波高減衰の理論

(1) 波による層流境界層の理論

従来、波動運動にともなう境界層の発達に関しては、孤立波の場合に対して岩佐¹⁹⁾ が理論的に考察し、境界層内の流速分布を仮定して、層流境界層の発達と波高減衰に関して興味ある結果を得ているが、そのほかは波動運動と類似な現象、たとえば静水中においた平板を振動させた場合の境界層の発達に対するものがほとんどであって、この問題に関しては古く Stokes²⁰⁾ が理論的に解明し、また最近 Huon Li²¹⁾, Manohar²²⁾, Kalkanis²³⁾ および Longuet-Higgins²⁴⁾ らが興味深い理論的考察や実験結果を発表している。一方、最近の著者ら ('61, '64)^{1), 2)}, Eagleson ('59, '62)^{15), 16)} および Grosch-Lukasik ('60, '63)^{17), 18)} らの底面摩擦による波高減衰の研究においては、進行波による層流境界層の発達に関する Stokes の解による線型理論があって、その結果が実験結果との比較の基礎になっている。その場合、層流境界層の発達に対して、層流境界層方程式に含まれる非線型項がどのように影響するかが問題であって、すでに Grosch ('62)²⁵⁾ は Glauert の方法により、非線型境界層方程式の級数解を示して、線型理論の結果と比較しているが、級数展開の表示が適確でないために、波の運動の全周期にわたる議論ができない。そこで、著者らは無次元表示した波動の層流境界層方程式のせつ動解を Lighthill^{26), 27), 28), 29)} の方法によって求め、水槽の底面および側壁に発達する境界層に関し、とくにそれらの摩擦応力におよぼす非線型項の効果を検討して、その特性を調べてみた。

a. 水槽の底面に発達する層流境界層

非定常な非圧縮性流体に対する2次元の層流境界層方程式は、波の進行方向に x 軸、底面に垂直に z 軸をとり、それぞれの方向における速度成分を u および w とすれば、一般に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 t ：時間、 p ：圧力、 ν ：動粘性係数、 ρ ：密度および U ：境界層外縁における流速であって、ここでは波動理論から求められる関係が適用されるものとする。いま、流速の代表値として u_0 、長さの代表値として波長 L 、および波速 c を導入して、無次元量、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \bar{u}, \quad w = u_0 \bar{w} / \sqrt{R}, \quad U = u_0 \bar{U}, \\ p &= \rho u_0^2 \bar{p}, \quad R = cL / 2\pi\nu, \quad x = (L/2\pi)\xi, \\ z &= (L/2\pi\sqrt{R})\zeta, \quad t = (L/2\pi c)\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

を用いて (1) 式を書きかえれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \left(\frac{u_0}{c}\right) \left\{ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \right\} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \zeta^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} &= 0, \quad -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + \left(\frac{u_0}{c}\right) \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。(3) 式の満足すべき初期および境界条件はそれぞれ、 $\bar{u}=0$; $\tau=0$, $\bar{u}=0$; $\xi=0$ および $\bar{u}=\bar{U}$; $\xi \rightarrow \infty$ である。

いま、Airy の波動理論にもとづく進行波を対象とし、 u_0 として底面における最大水粒子速度 $u_{b\max}$ を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \sin(\xi - \tau), \quad -\partial \bar{p} / \partial \xi = -\cos(\xi - \tau) + (1/2)(u_0/c) \sin 2(\xi - \tau), \\ u_0 &= u_{b\max} = (\pi H/T) / \sinh kh, \quad k = 2\pi/L, \\ u_0/c &= u_{b\max}/c = \pi(H/L) / \sinh kh \ll 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

なる関係が得られるので、 $(u_0/c) = \varepsilon$ による (3) 式のせつ動解を求めることができる。すなわち、 $\bar{u}$ および $\bar{w}$ のせつ動解を、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \varepsilon^2 \bar{u}_2 + \dots\dots\dots, \\ \bar{w} &= \bar{w}_0 + \varepsilon \bar{w}_1 + \varepsilon^2 \bar{w}_2 + \dots\dots\dots, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

として (3) 式に代入し、 ε について両辺の 0 次、1 次、2 次などの各項の係数ごとに成り立つ関係求めれば、つぎのようになる。すなわち、まず $\bar{u}_0$ に対して成立すべき方程式として、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \zeta^2} &= -\cos(\xi - \tau), \\ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

のような熱伝導型の方程式が得られる。この場合の初期および境界条件は、 $\bar{u}_0=0$; $\tau=0$, $\bar{u}_0=0$; $\xi=0$, $\bar{u}_0=\bar{U}=\sin(\xi - \tau)$; $\xi \rightarrow \infty$ である。

(6) 式はいわゆる線型理論そのものであって、その解は Grosch ('62)²⁵⁾ によって求められており、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \sin(\xi - \tau) - e^{-\zeta/\sqrt{2}} \sin(\xi - \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{(\xi - \tau)\sigma^2} \frac{\sigma \sin(\zeta\sigma)}{1 + \sigma^4} d\sigma \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

いま、 τ が十分大きい場合、(7) 式右辺における積分値は 0 に収束する。したがって、 τ の十分大きいとき、すなわち、いわゆる steady state のみを対象とすれば、steady state solution として、(7) 式の右辺第 3 項を省略した $\bar{u}_0$ を考えればよいことになる。

つぎに、 $\bar{u}_1$ に対する方程式ならびに初期および境界条件は、つぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \xi^2} &= -\left(\bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} + \bar{w}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} \right) + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \xi} &= 0, \quad \bar{u}_1 = \bar{w}_1 = 0; \tau = \xi = 0, \quad \xi \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

また、一般に $\bar{u}_1$ に対しては、形式的につぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \xi^2} &= F_i(\xi, \tau), \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \xi} = 0, \\ \bar{u}_i = \bar{w}_i &= 0; \tau = \xi = 0, \quad \xi \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

この方程式は熱伝導型の方程式であるから、 $\bar{u}_i$ の解は Green 関数 $H(\xi, \tau; q, s)^{30)}$ を導入して求めることができ、 $\bar{u}$ に対するせつ動解は形式的につぎのようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, \tau, \zeta) &= \bar{u}_0 + \varepsilon \int_0^\tau ds \int_0^\infty H(\xi, \tau; q, s) F_1(q, s) dq \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_0^\tau ds \int_0^\infty H(\xi, \tau; q, s) F_2(q, s) dq \\ &\quad + \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} H(\xi, \tau; q, s) &= \{1/2\sqrt{\pi(\tau-s)}\} \\ &\quad \times [\exp\{-(\xi-q)^2/4(\tau-s)\} - \exp\{-(\xi+q)^2/4(\tau-s)\}]; \tau > s, \\ &= 0; \tau < s \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (11)$$

一般に (10) 式の積分は、 $F_1(q, s)$ の関数形から考えて複雑であるから、以下では、いわゆる steady state solution のみを対象にして解を求めることにする。(7) 式の右辺第3項を省略した $\bar{u}_0$ および (6) 式の中の連続の方程式を用いて求まる $\bar{w}_0$ の steady state solution は、つぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0 &= \sin(\xi - \tau) - e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\xi - \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right), \\ -\bar{w}_0 &= \xi \cos(\xi - \tau) - e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\xi - \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\xi - \tau - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これらの $\bar{u}_0$ および $\bar{w}_0$ を用いると、(8) 式より $\bar{u}_1$ に対する方程式は、結局つぎようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{2} \left\{ e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) + \xi e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \sin 2(\xi - \tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) - \xi e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \cos 2(\xi - \tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \xi e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi}{4}\right) + e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) - e^{-\xi/\sqrt{2}} \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (13)$$

Schlichting²⁷⁾ にならって、境界条件 $\bar{u}_1 = 0; \xi = 0, \partial \bar{u}_1 / \partial \xi = 0; \xi \rightarrow \infty$ を満足する (13) 式の解は簡単に求められ、 $\bar{u}$ に対する解として、(5) 式の関係からつぎのような近似解を求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sin(\xi - \tau) - e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\xi - \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) \\ &\quad + \varepsilon \left[\left\{ \frac{11}{18} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin \xi - \frac{7}{18} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) + \frac{1}{6} \xi e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \sin 2(\xi - \tau) \right. \\ &\quad + \left\{ -\frac{11}{18} e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos \xi + \frac{11}{18} e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) + \frac{1}{6} \xi e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \cos 2(\xi - \tau) \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{4} e^{-\xi/\sqrt{2}} + \frac{1}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) - e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\right) - \frac{1}{2} \xi e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{4} \right\} \\ &\quad \left. + O(\varepsilon^2) \right] \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (14)$$

この結果によると、 $\xi \rightarrow \infty$ すなわち境界層外縁において、 $\bar{u}$ について 1 周期の平均をとれば、(14) 式の右辺は定数項だけが残る、mass transport velocity,

$$\bar{u}_m = (3/4)\varepsilon \quad \dots\dots\dots (15)$$

が存在することになる。これは、

$$u_m = (3/16)H^2k(2\pi/T)/\sinh^2kh \quad \dots\dots\dots (16)$$

とかきかえられ、Longuet-Higgins ('53)²⁴⁾ の結果と一致する。

以上の結果を用いて底面摩擦応力に関する理論式を求める。底面に働く摩擦応力 τ_0 は、一般に $\tau_0 = \mu(\partial u / \partial z)_{z=0}$ の関係で求められる。これを無次元の形で表わし、(5) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} \tau_0 / \rho u_0^2 = & R_e^{-1/2} \left\{ \sin\left(\xi - \tau - \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon(\partial \bar{u}_1 / \partial \xi)_{\xi=0} \right. \\ & \left. + \varepsilon^2(\partial \bar{u}_2 / \partial \xi)_{\xi=0} + \dots\dots\dots \right\} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。上に (14) 式の関係を採用すれば、 τ_0 の近似解として、次式がえられる。

$$\begin{aligned} \tau_0 / \rho u_0^2 \approx & R_e^{-1/2} \left[\sin\left(\xi - \tau - \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{11}{18} - \frac{5\sqrt{2}}{18} \right) \sin 2(\xi - \tau) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{11}{18} - \frac{4\sqrt{2}}{18} \right) \cos 2(\xi - \tau) \right\} + O(\varepsilon^2) \right] \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここに、

$$R_e = \frac{\pi}{2\sinh^2 kh} \left(\frac{cH}{\nu} \right) \left(\frac{H}{L} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{u_0^2 T}{\nu} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(18) 式における右辺のカッコ内の第 1 項は線型理論にもとづく結果を示すものであり、第 2 項は非線型項の影響をあらわす。

Fig. 1 は (18) 式の計算結果であって $\varepsilon = \pi(H/L)/\sinh kh$ をパラメーターとして図示したものであるが、

図中には比較のために無次元水位 η の時間的変化も示した。この図から明らかなように、 ε によって若干その特性が変わることがわかる。すなわち、 $\varepsilon = 0$ としてあらわされる線型理論の結果に比べて、 ε の値が大きくなると、非線型項の影響があらわれ、底面摩擦応力の正の部分では、 ε の増加とともに波形に対する位相差は線型理論の場合の $\pi/4$ より大きくなり、また反対に負の部分では位相差が小さくなる傾向を示している。また、波動の

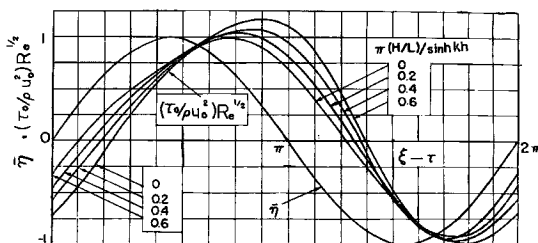


Fig. 1 Effect of convective terms in boundary layer equation on bottom shearing stress.

1 周期中底面摩擦応力が正の値をとる位相区間は、 ε の増加とともに $\varepsilon = 0$ の場合の π より大きくなり、反対に負の値をとる区間は小さくなる傾向を示し、底面摩擦応力の時間的変化の非対称性は増加する傾向にある。この事実は、おそらく前述した波の質量輸送に関係するものと思われる。しかしながら、実際の波の場合、たとえば著者らの実験に用いた波においては、 ε の値はたかだか 0.15 程度である。したがって、Fig. 1 に示した結果から、非線型項の影響を実験的に見出すことは非常に困難であることが考えられ、むしろその影響はほとんど省略されうるとしてよい。

つぎに、底面摩擦係数について簡単に述べよう。いま、Eagleson にしたがって、底面の摩擦係数をつぎのように定義する。

$$\bar{C}_f = \frac{2\tau_0}{\rho \bar{U}^2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 τ_0 および $\bar{U}^2$ は、それぞれ (18) 式および (2) 式に示す関係によって求められる時間平均で

ある。 $\bar{C}_f$ を (17) 式にもとづいて直接計算することは複雑なので、Fig. 1 に示した計算結果から図式積分によって求めた結果を Fig. 2 に示す。図中の曲線(a), (b)および(c)は、それぞれ時間的に平均する場合の位相区間のとり方を表すもので、(a)は $|\tau_0|$ を $\tau_0=0$ となる位相 θ から $\theta+2\pi$ まで時間平均した場合のものであり、(b)および(c)は τ_0 の正值および負値をおおの位相区間で平均したものである。また縦軸の波に関する Reynolds 数 R_{er} は

$$R_{er} = 2\pi R_e = (u_0 H / \nu)(u_0 T / H) = u_0^2 T / \nu \quad (21)$$

であって、Eagleson が採用した Reynolds 数 R_θ の4倍にあたる。この結果から、(a), (b)および(c)のいずれの場合にも ε の値が大体0.4以上になると、その影響が顕著にあらわれることを示している。しかし、(18)式右辺の ε の項は、前述したように一般に十分小さいと考えられるから、この影響を省略することにすれば、摩擦係数に対する表式は当然線型理論の結果となり、次式であらわされる。

$$\bar{C}_f = 8\sqrt{2/\pi} R_{er}^{-1/2} \quad (22)$$

b. 水槽の側壁に発達する層流境界層

波高減衰の実験において、水槽の幅が水深に比べて十分大きくない場合には、水槽の側壁における摩擦によるエネルギー損失が加わるので、その効果をいかに補正するかが問題になる。したがって、底面の場合と同様に側壁に発達する境界層の解析を行なって、その特性を明らかにしておく必要がある。ここでは、前述した底面における境界層の場合と全く同様な方法で考察する。

水槽側壁にそって鉛直に z 軸、側壁に垂直に y 軸をとり、(1)式の場合と同じ記号を用いて、この場合の境界層方程式をかけば、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここに、 g は重力の加速度であり、 v は y 方向の速度成分である。前述した場合とまったく同様に無次元量として、 $u = \bar{u} u_0$, $v = u_0 \bar{v} / \sqrt{R}$, $w = \bar{w} u_0$, $R = cL/2\pi\nu$, $p = \rho u_0^2 \bar{p} - (\rho gL/2\pi)\bar{\zeta}$, $x = (L/2\pi)\bar{\xi}$, $y = (L/2\pi)\bar{\eta} / \sqrt{R}$, $z = (L/2\pi)\bar{\zeta} / \sqrt{R}$ および $t = (L/2\pi c)\bar{\tau}$ を用いて上式をかきかえれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\varepsilon} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\zeta}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\varepsilon} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\eta}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。(5)式と同様に、(24)式のせつ動解を求めるための表式として、

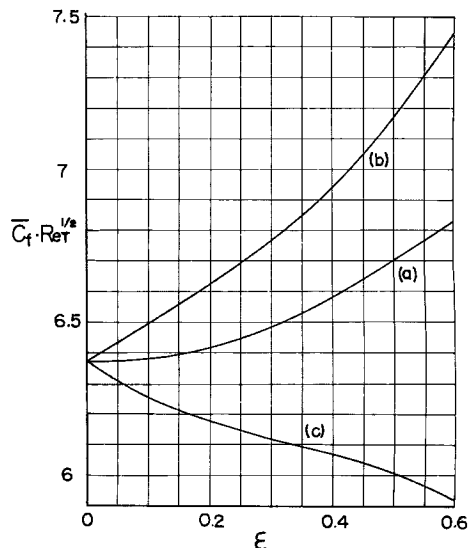


Fig. 2 Effect of convective terms in boundary layer equation on bottom friction coefficient $\bar{C}_f$.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \varepsilon^2 \bar{u}_2 + \dots, \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 + \varepsilon \bar{v}_1 + \varepsilon^2 \bar{v}_2 + \dots, \\ \bar{w} &= \bar{w}_0 + \varepsilon \bar{w}_1 + \varepsilon^2 \bar{w}_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

を用い、(6) 式および (8) 式に対応する方程式を求めて、その境界条件とともに示せば、つぎのようになる。すなわち、 $\bar{u}_0$ および $\bar{w}_0$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \zeta} &= 0, \\ \bar{u}_0 &= \bar{w}_0 = 0; \eta = 0, \quad \bar{u}_0 = \bar{U} \quad \text{および} \quad \bar{w}_0 = \bar{W}; \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

また、 $\bar{u}_1$ および $\bar{w}_1$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \eta^2} &= \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta} - \left(\bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} + \bar{w}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \zeta} \right), \\ \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \eta^2} &= \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \zeta} - \left(\bar{u}_0 \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \eta} + \bar{w}_0 \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \zeta} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \zeta} &= 0, \\ \bar{u}_1 &= \bar{w}_1 = 0; \eta = 0, \quad \partial \bar{u}_1 / \partial \eta = \partial \bar{w}_1 / \partial \eta = 0; \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

がえられる。ここに、 $\bar{U}$ および $\bar{W}$ はいうまでもなく波動理論から求まる側壁面における水粒子速度成分であって、いまの場合 $\bar{U}$ および $\bar{W}$ として、Airy の波動理論にもとづく関係を適用すれば、 $\bar{u}$ および $\bar{w}$ に対する第 2 近似解まで求めた表式は、結局つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \left\{ \sin(\xi - \tau) - e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin\left(\xi - \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) \right\} \cosh \zeta \\ &+ \varepsilon \left[- \left\{ e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) + (1/4)e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\eta) + e^{-\eta} \sin \eta \right\} \sin 2(\xi - \tau) \right. \\ &+ \left. \left\{ e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) + (1/4)e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\eta) - (5/4)e^{-\eta} \cos \eta \right\} \cos 2(\xi - \tau) \right] + O(\varepsilon^2), \\ \bar{w} &= - \left\{ \cos(\xi - \tau) - e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos\left(\xi - \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) \right\} \sinh \zeta \\ &+ \varepsilon \left\{ (1/4)e^{-\eta/\sqrt{2}} + e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right) - (1/4) \right\} \sinh 2\zeta + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

以上の結果によると、質量輸送に関してつぎのことがわかる。すなわち、波の進行方向においては質量輸送は存在しないが、鉛直方向には、

$$\bar{w}_m = -(\varepsilon/4) \sinh 2\zeta \dots\dots\dots (29)$$

あるいは、これをかきかえて、

$$\bar{w}_m = -(1/16) \{ H^2 k (2\pi/T) / \sinh^2 kh \} \sinh 2\zeta \dots\dots\dots (29')$$

であらわされる質量輸送が存在することになり、 $\zeta=0$ において $\bar{w}_m=0$ であり、水面において最大となる。

つぎに、水槽側壁における摩擦応力について述べよう。(28) 式から、底面の場合と同様にして、壁面に働く摩擦応力の関係式は、 x および z 軸方向に対して、それぞれつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{0x} / \rho u_0^2 &= R_e^{-1/2} \left[\sin\left(\xi - \tau - \frac{\pi}{4}\right) \cosh \zeta \right. \\ &+ \varepsilon \{ (1 - 3\sqrt{2}/4) \sin 2(\xi - \tau) + (5/4 - 3\sqrt{2}/4) \cos 2(\xi - \tau) \} + O(\varepsilon^2) \Big], \\ -\tau_{0z} / \rho u_0^2 &= R_e^{-1/2} \left[\cos\left(\xi - \tau - \frac{\pi}{4}\right) \cosh \zeta - \varepsilon (\sqrt{2}/4) \sinh 2\zeta + O(\varepsilon^2) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 R_e は (19) 式であらわされる。

この結果によると、壁面の摩擦応力におよぼす非線型項の効果は ε の値によって相違するが、底面の場合を参考にすれば、 τ_{0z} におよぼす非線型項の影響は水面付近においてとくに著しくなることがわかる。

なお、以上 **a** および **b** で述べた Airy の波動理論を適用した場合の解析法は、質量輸送をとまなう波たとえば Stokes 波の場合に対しても適用でき、すでに若干の計算を進めたので、つぎの機会に発表したいと考えている。

(2) 波高減衰の理論

以下では、(1) において考察した非線型層流境界層理論の解析結果にもとづいて、底面および側壁の境界層内での粘性による波のエネルギー損失を評価し、波高減衰の理論式を導いて、その機構を明らかにする。

a. 境界層内におけるエネルギーの消散

まず、二次元を考え、波のエネルギーは、底面での粘性による摩擦によってのみ消散されるものとする。一般に単位体積の流体が単位時間に粘性のために消散する損失エネルギー Φ は、

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\}^2 \right] \dots\dots\dots (31)$$

によってあらわされる。いま、流速の鉛直成分 w を無視し、さらに $\partial u / \partial x$ を小さいとして省略すれば、層流境界層内で、単位面積当たり単位時間に消散する平均のエネルギー $\bar{E}_{fb}$ は近似的に、

$$\bar{E}_{fb} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^\delta \Phi dz dx \approx \frac{\mu}{L} \int_0^L \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz dx \dots\dots\dots (32)$$

であらわされるが、前述の無次元表示にしたがえば、

$$\bar{E}_{fb} \approx \frac{\mu u_0^2}{L} \sqrt{R} \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_\zeta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta d\xi \dots\dots\dots (33)$$

となる。ここに、 μ は粘性係数であり、また δ_ζ は境界層厚 δ の無次元表示 ($2\pi\sqrt{R}\delta/L$) である。(14) 式を用いて (33) 式を計算すれば、

$$\begin{aligned} \bar{E}_{fb} \approx & \frac{\mu}{2} \beta \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 \operatorname{cosech}^2 kh \\ & \times \left\{ 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{11}{18} - \frac{91\sqrt{2}}{288} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right\} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

となる。これはいうまでもなく、境界層方程式にふくまれる非線型項の影響を考慮した損失エネルギーであって、右辺第1項は線型理論から導かれる結果であり、第2項で非線型項の影響を示している。この結果において、たとえば $\varepsilon = 0.2$ とすれば、第2項は約0.02となり、損失エネルギーは、線型理論にもとづく値よりたかだか2%減少する程度であることがわかる。

つぎに、水槽側壁における損失エネルギーを求めよう。水槽の両側壁の単位面積当たり単位時間に消散する平均のエネルギー $2\bar{E}_{fw}$ は、

$$\begin{aligned} 2\bar{E}_{fw} \approx & \frac{2\mu}{Lh} \int_0^h \int_0^L \int_0^\delta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy dx dz \\ \approx & \frac{\mu u_0^2}{\pi h} \sqrt{R} \int_0^{kh} \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_\eta} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\eta d\xi d\zeta \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

によって求められるから、この式に (28) 式の関係を代入して積分すれば、つぎの関係式がえられる。

$$\begin{aligned} 2\bar{E}_{fw} \approx & \frac{\mu}{kh} \beta \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 \coth kh \\ & \times \left\{ 1 + \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{11}{12} - \frac{\sqrt{2}}{120} \right) \times \varepsilon \operatorname{sech} kh + O(\varepsilon^2) \right\} \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

この結果によると、側壁におけるエネルギー損失におよぼす非線型項の影響は $\varepsilon \operatorname{sech} kh$ 程度であるが、著

者らの実験において最大20%以上にもおよぶことが考えられる。

いま、水槽の幅を B とし、底面でのエネルギー損失と両側面における損失の比を ψ とすれば近似的に、

$$\psi = \frac{\bar{E}_{fb}B}{2E_{fw}h} \approx (kB/\sinh 2kh) \{1 - (1.086 \operatorname{sech} kh + 0.197)\epsilon\} \dots\dots\dots (37)$$

となる。上式で、 $\epsilon=0$ の場合は Savage の論文⁸⁾にのべられている Keulegan の方法とよばれるものに一致し、線型理論の結果にはかならない。

b. 波高減衰機構

波のエネルギー保存の関係式は、底面摩擦のみによるエネルギー損失を対象とすれば、つぎのようにあらわされる。すなわち、二次元の場合、

$$d(c_g E)/dx = -\bar{E}_{fb} \dots\dots\dots (38)$$

ここに、 c_g ：群速度、 E ：単位面積当りの波のエネルギーおよび $\bar{E}_{fb}$ ：底面摩擦によって単位面積当り単位時間に消費する平均の損失エネルギーであって、Airy の波動理論によれば、 c_g および E はそれぞれ $c_g = (1/2)(1 + 2kh \operatorname{cosech} 2kh) c$ 、 $E = \rho g H^2/8$ である。(34) 式であらわされる $\bar{E}_{fb}$ の関係を上式に代入し、 ϵ を近似的に定数と仮定して、 $x=0$ で波高 $H=H_0$ という条件で積分した結果は、つぎようになる。

$$H = H_0 \exp(-\epsilon_b x/L) \dots\dots\dots (39)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_b &\approx (4\pi^2/\beta L)(1 - 0.197\epsilon)/(\sinh 2kh + 2kh), \\ \beta &= (\pi/\nu T)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

である。上式中の ϵ の値は波形勾配と比水深との効果を表わすものであるが、実際の波の場合、たとえば著者らの実験で用いた波については、 ϵ の値はたかだか 0.15~0.2 程度であって、その場合 ϵ_b におよぼす非線型項の効果はたかだか 3~4% 程度となり、あまり大きな影響をおよぼさないことがわかる。なお、(40) 式で $\epsilon=0$ の場合は Eagleson の結果と一致し、 ϵ_b を無次元減衰率 (dimensionless decay modulus) とよんでいるが、これと全く同一の他の表現を、1961年に著者の1人が求めている。

底面のほかに、両側壁による摩擦損失が加わると、(38) 式の代わりに、

$$\begin{aligned} \frac{d(c_g EB)}{dx} &= -(\bar{E}_{fb}B + 2\bar{E}_{fw}h) \\ &= -\bar{E}_{fb}B(1 + 1/\psi) \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

を用いなければならない。ここに、 ψ は (37) 式で与えられる。したがって、底面と両側壁の摩擦にもとづく波高減衰率を ϵ_{b+w} とすれば、(39) 式に対応した波高減衰の関係式は、つぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 \exp(-\epsilon_{b+w} x/L), \\ \epsilon_{b+w} &= (4\pi^2/\beta L)(1 + 1/\psi)/(\sinh 2kh + 2kh) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

また、上式と (40) 式を比較して、 ϵ_b と ϵ_{b+w} との関係は、つぎのようにあらわされる。

$$\epsilon_b = \{\psi/(1 + \psi)\} \epsilon_{b+w} \dots\dots\dots (43)$$

したがって、実験によって ϵ_{b+w} が求まると、上式の関係を用いて側壁の効果を除去した底面摩擦のみによる波高減衰率 ϵ_b を算出することができる。以上の結果において、(37) 式を参照すれば、側壁のエネルギー損失を考慮した場合の ϵ_b におよぼす非線型項の効果はかなり大きくなることが予想される。

c. 現地海底摩擦係数と底面摩擦係数および波高減衰率との関係

ここでは、現地の波浪観測の結果から推定される海底摩擦係数と前述した層流境界層理論から求められる底面摩擦係数 $\bar{C}_f$ および波高減衰率 ϵ_b との関連について簡単に述べる。

従来、現地観測による波高減衰の研究においては、周知のように Bretschneider³¹⁾らが定義した海底の摩擦応力に対する関係

$$\tau_b = \rho f u_b^2 \dots\dots\dots (44)$$

を用いて、海底摩擦係数の推定が行なわれている。ここに、 f はいわゆる海底摩擦係数であり、また u_b は

波動運動から求められる海底の水粒子の速度成分であって、前述した U に相当するものである。(44) 式の定義から求められる損失エネルギー $\bar{E}_{fb}'$ は、

$$\bar{E}_{fb}' = (4/3\pi)\rho f u_0^3 \dots\dots\dots (45)$$

となる。したがって、(34) 式において近似的に $\varepsilon=0$ とした線型理論にもとづく損失エネルギーと (45) 式とを等しいと置いて、海底摩擦係数 f に対するつぎの関係がえられる。

$$f = (3\pi\sqrt{\pi}/8)R_{eT}^{-1/2} \dots\dots\dots (46)$$

したがって、(22) 式と上式との比較から、 f と $\bar{C}_f$ の関係として、次式がえられる。

$$f = (3\pi^2/64\sqrt{2})\bar{C}_f \dots\dots\dots (47)$$

また、(40) 式で $\varepsilon=0$ とした関係および (46) 式とから、形式的に ϵ_b と f の関係を求めると、つぎのようになる。

$$f = (3/32\pi)\epsilon_b(H/L)^{-1}\{\sinh kh(\sinh 2kh + 2kh)\} \dots\dots\dots (48)$$

さらに、(45) 式の損失エネルギーにもとづく波高減衰の式を求めると、

$$H/H_0 = 1 - (8/3\pi\sqrt{\pi})f\epsilon_b R_{eT}^{-1/2}(x/L) \dots\dots\dots (49)$$

のようになる。

3. 底面摩擦応力および波高減衰に関する実験

(1) 底面摩擦応力の測定

底面の摩擦応力を実験的に見出す方法として、層流境界層の場合、 $\tau_0 = \mu(\partial u / \partial z)_{z=0}$ の関係を利用して、流速分布の測定から間接的に τ_0 の値を求める方法と、表面の摩擦力を直接測定する方法とがあるが、前者の方法は波の運動の場合には多くの困難な点があるので、この研究では後者の方法を採用することにして、測定装置を製作した。

a. 測定装置の特性

Fig. 3 および Photo. 1 は実験に用いた測定装置であって、モーメント計と支柱部分および shear plate とよばれる平板の3つの主要部分からなっている。

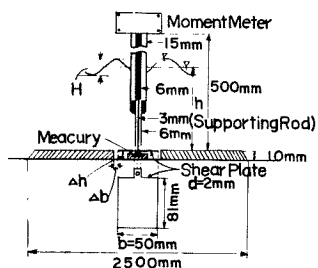


Fig. 3 Schematic diagram of shear meter.

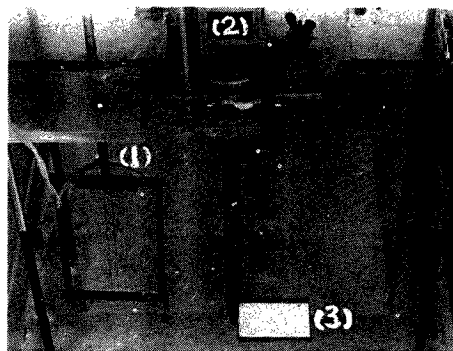


Photo. 1 A view of shear and wave meters used.
(1) Wave meter, (2) Moment meter, (3) Shear plate

これは Eagleson が用いたものほとんど同一であるが、彼は水平力の測定に門型 (portal-type) のゲージを用いたのに対して、著者らはUゲージを内蔵したモーメント計を使用したこと、また彼は 24×6 in で厚さが $1/4$ in, あるいは $1/8$ in の大きくて厚い shear plate を用いたのに対し、著者らは後述するようにずっと薄くて小さい shear plate を使ったことが相違している。この装置の原理は、図を見れば明らかである

が, shear plate に作用する摩擦力を, 支柱を通してモーメント計に伝え, この力がUゲージによってひずみとして電氣的に増幅され, ペン書きオシロに自記されるようになっている。モーメント計は最大 1,000 gr・cm までのモーメントが測定可能で, 温度変化に対する誤差は $19^{\circ}\text{C} \sim 54^{\circ}\text{C}$ の範囲で $\pm 10\%$ 以内である。なお, 支柱は波力を受けないようにシールド管で囲まれている。

まず, 装置の動的特性を単振子の強制振動として解析的に調べ, また実際に装置の水中での振動特性を測定して強制振動の振幅および位相のずれを検討した結果, shear plate および支柱の重量を極力減少させるようにすることが望ましいことがわかった。

ついで, shear plate の鉛直方向の位置の底面からのずれの影響, shear plate の下の空げきの影響, shear plate と底面との間げきの影響, shear plate の厚さの影響, shear plate の大きさの影響および shear plate の幅の影響を, 幅 50cm, 深さ 65cm, 長さ 75cm の波浪実験水槽を利用して実験的に調べた。これらの詳細については, ここでは省略するが, これによって判明したことは, ① shear plate が底面より上方へずれると, plate 側面に働く抗力によって, 摩擦応力が大きく見積られるが, 下方へずれた場合には, あまりその影響は顕著でない, ② shear plate の下の空げき $4h$ が大きいほど, 摩擦応力の実験値は小さくなり, 理論値に近づく傾向がある, ③ shear plate と底面との間げき $4b$ が小さいほど実験値は小さくなり理論値に近づく, ④ shear plate の厚さ d は, 薄ければ薄いほど, 実験値は小さく, 理論値に近づく, ⑤ shear plate の長さを短かくして大きさを小さくし, かつ支柱の重量を軽くすれば, 実験値は小さくなり理論値に近づく, ⑥ shear plate の幅 b の影響はほとんどないが, b をあまり小さくすればシールド管の影響を受ける傾向が見られる。

Fig. 4 は shear plate の厚さの影響を調べたものの 1 例で, 長さ 15cm, 幅 3.5cm の大きさのステンレス板

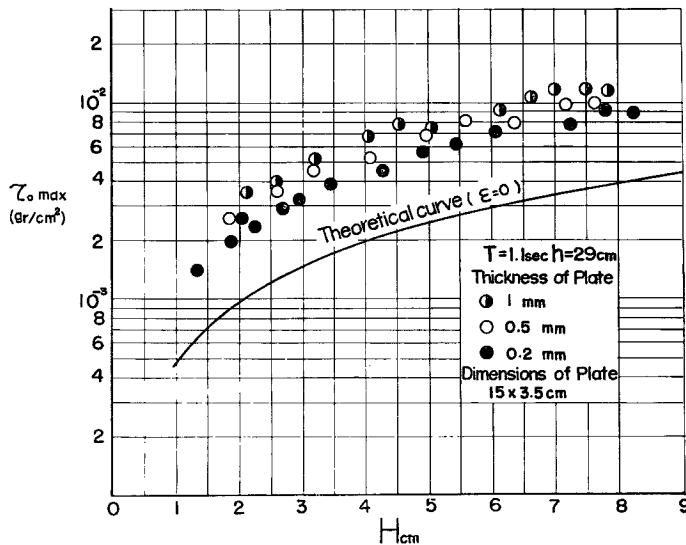


Fig. 4 Effect of thickness of shear plate on experimental results for bottom stress.

を shear plate として用い, 厚さを 1, 0.5 および 0.2mm に変えて行なった実験結果を示したものである。縦軸には最大摩擦応力 $\tau_{0\max}$ を, また横軸には波高 H をとってあらわしてある。図中の理論曲線は (18) 式で $\varepsilon=0$ とした場合の $\tau_{0\max}$ の関係を示している。この場合, 厚さを 0.2mm としても, なお実験値は理論値の約 2 倍も大きい。しかしながら, 前述した理論計算から明らかなように, 底面摩擦応力に及ぼす非線型項の影響はほとんど省略されうるとしてよいので, この理由はつぎのように考えられる。すなわち, いまの場合, shear plate や支柱の重量は, 前述した単振子の慣性力の効果が無視できる程度に軽いので, shear plate

に作用する力として、摩擦力以外の力、たとえば圧力勾配によって shear plate の両端に作用する力、shear plate の周りの流体が加速度をもって運動することによる仮想質量力、shear plate の下の空げき内の流体が運動することにより shear plate におよぼす力、などが働いているためと考えられる。このような理由から、まず shear plate の下の空げき内の流体の運動を止めるため、Fig. 3 に示したように空げき内に幅 3 mm の溝を作り、そこに水銀を入れて plate の中央部に接触させることにした。また、shear plate の幅を小さくすると、plate の中央に連結したシールド管の影響があらわれる傾向があるので、Fig. 3 に示したように、plate の端に支柱をとりつけるようにし、かつ支柱およびシールド管の先端部分を細くして、シールド管の影響がなるべく shear plate におよばないようにした。そして、結局 shear plate として長さ 8.1 cm、幅 5 cm、厚さ 0.2 mm のステンレス板を採用した。

b. 実験方法

実験に用いた波の特性と水深は Table 1 に示すとおりであって、Table 1 (1) は '64 年にプランジャー型造波機を、また (2) は '65 年に フラッター型造波機を使用して、実験した場合のものである。底面の摩擦応力の測定は、周期あるいは水深を一定としておき、造波機のストロークを変え、種々の波高について行なった。実

Table 1 Characteristics of waves and water depths used in the measurement of bottom shearing stress.

(1) Experiment made in 1964			(2) Experiment made in 1965		
Water depth h (cm)	Wave period T (sec)	Wave height H (cm)	Water depth h (cm)	Wave period T (sec)	Wave height H (cm)
8.2~29.3	0.85	0.63~3.64	7.0	0.99~1.50	0.26~0.31
9.0~34.3	0.95	0.48~3.64	10.0	0.99~1.49	0.21~0.95
9.0~29.0	1.10	0.77~3.75	15.0	0.95~2.5	0.39~3.49
11.0~34.1	1.30	0.65~3.03	20.0	0.88~3.0	0.61~6.45
			25.0	1.01~2.0	4.67~6.84
			30.0	1.01~2.58	0.81~10.0

験は、波の Reynolds 数 Re_T ができるがぎり大きい場合および小さい場合の結果もえられるように努めるとともに、前述した底面摩擦におよぼす非線型項の影響をも検討するために、波高は広範囲に変化させ、かつ造波機のストロークはできるだけ大きく保つようにした。なお、波高は電気抵抗線式波高計を用いてペン書きオシロに記録させ、それを読みとった。

c. 実験結果と考察

前述したように、shear plate に働く外力 F' は底面の摩擦力と圧力勾配の存在によって plate の両側面に作用する圧力差および仮想質量力の 3 つの力の和に等しいと考えられる。しかし、shear plate の下の空げきは、水銀を置くことによって、そこでの水の運動はとめられているので、plate に仮想質量力が働くかどうかは疑問であり、ここではいちおう摩擦力以外の力として圧力勾配による力のみを考慮することとし、また前述した非線型項の効果は省略できるものとして、線型理論の結果で実験値を検討することにする。

いま、shear plate の表面積を A 、厚さを d とすれば、plate に作用する摩擦力は (18) 式より、

$$\tau_0 A = \mu \frac{A k c \beta H}{2 \sinh k h} \{ \sin(\xi - \tau) - \cos(\xi - \tau) \} \dots \dots \dots (50)$$

とかきあらわされ、圧力勾配による力は

$$-A d \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho g k H A d}{2 \cosh k h} \cos(\xi - \tau) \dots \dots \dots (51)$$

となるから、shear plate に作用する単位面積当りの水平力 F の時間的变化は、

$$F = F' / A = -\sqrt{C^2 + (C + D)^2} H \sin(\xi - \tau + \varepsilon) \dots\dots\dots (52)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} C &= \mu k c \beta / 2 \sinh k h, D = \rho g k d / 2 \cosh k h, \\ \varepsilon &= \tan^{-1} \{1 + (D/C)\}, D/C = 2 \beta d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

とあらわされる。したがって、実際に測定される shear plate の単位面積当りに作用する水平力 F の最大値 $F_{\max}$ と、求めようとする摩擦応力の最大値 $\tau_{0\max}$ との関係は (50) 式と (52) 式より、つぎのようになる。

$$\tau_{0\max} = \left[\frac{2}{1 + \{1 + 2\beta d\}^2} \right]^{1/2} F_{\max} \dots\dots\dots (54)$$

上式を用い、Table 1 (1) の実験条件で測定した結果を補正して求めた $\tau_{0\max}$ を、各周期をパラメーターとして $\tau_{0\max} / \rho g H$ と h/L_0 との関係でプロットしたものが Fig. 5 である。図中、各点における矢印は測

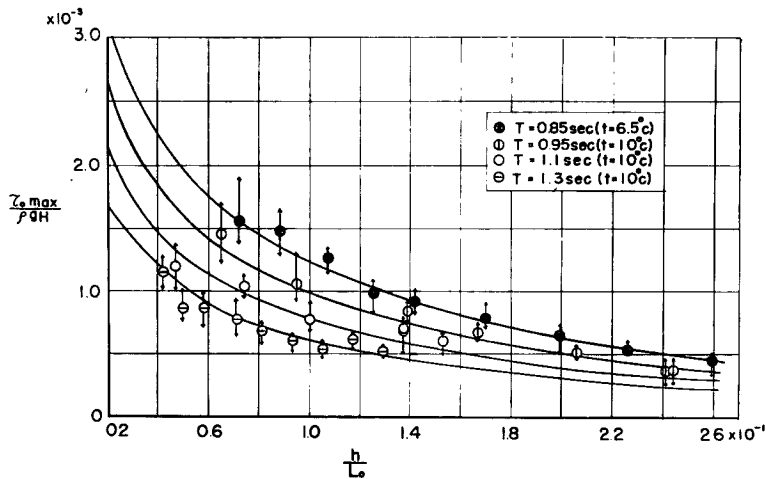


Fig. 5 Comparisons between theoretical curves and experimental results of maximum bottom shearing stress with correction.

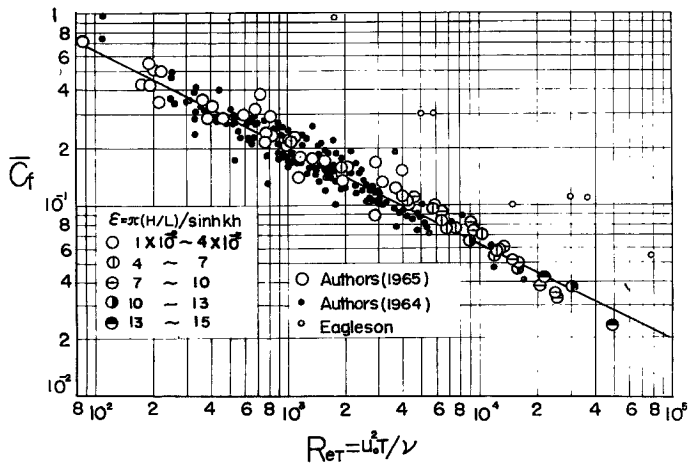


Fig. 6 Relation between average friction coefficient $\bar{C}_f$ and Reynolds number Re_T .

定値のちらばりの範囲を示し、丸印の点は同じ条件の各測定値の平均値を示す。図の曲線は線型理論にもとづく $\tau_{0\max}$ の理論曲線である。さらに、前述した摩擦係数 $\bar{C}_f$ に対する表示で理論結果と比較したものが Fig. 6 であって、図中の直線は (22) 式の関係を示している。これらの結果から明らかなように、実験値は理論値と十分よく一致しており、このことは、非線型項の影響を検討した理論計算からも期待されるところであって、少なくとも実験の範囲内ではその効果は十分省略できると考えられる。図中には同時に Eagleson の測定結果を示したが、著者らの実験値よりもはるかに大きいことがわかる。これは Eagleson が使用した shear plate の大きさが著者らのものよりはるかに大きくて厚く、そのために底面に働く摩擦力以外の力が支配的となり、その補正が適切でなかったことによるものと思われる。なお、著者らの実験値を波による境界層の層流から乱流への遷移に関する Collins の限界条件³²⁾によって検討したところ、十分層流境界層であると考えてさしつかえないことがわかった。しかし、できるだけ波高を大きくし、 R_{eT} の大きい場合の測定を試みたにもかかわらず、著者らの実験における R_{eT} の値はせいぜい 5×10^4 までであって、境界層の層流から乱流への遷移については明らかでなく、今後はさらに大きな R_{eT} の領域を対象として実験を進めていく必要がある。

(2) 波高減衰の実験

a. 実験装置と実験方法

実験に用いた水槽、造波機および波高計は (1) の底面摩擦応力の測定に際して用いたものと同じで、実験に用いた波の特性と水深は Table 2 に示すとおりであり、Table 1 (1) は '64年に、(2) は '65年の実験に用いたものである。

Table 2 Characteristics of waves and water depths used in the experiment on wave damping.
(1) Experiment made in 1964

Water depth h (cm)	Wave period T (sec)	Wave height H (cm)
10.8~24.6	0.80	1.66~6.00
12.0~28.5	1.00	1.53~7.03
25.9	1.10	4.50~6.85
16.3~30.0	1.30	2.40~6.05

(2) Experiment made in 1965

Water depth h (cm)	Wave period T (sec)	Wave height H (cm)
5.6	0.80	0.099~0.117
9.9	0.99~1.23	2.22 ~2.89
10.0	1.00~1.47	0.27 ~1.31
11.0	0.80	1.74
13.6	0.85~1.53	0.969~1.82
15.0	0.94~1.85	0.442~3.98
16.5	1.01~1.53	1.33 ~2.28
17.0	0.80	4.04
20.0	0.87~2.09	0.497~7.38
20.6	1.15~2.02	1.69 ~3.69
23.1	1.02~2.00	2.15 ~4.50
25.0	0.97~2.01	3.55 ~7.55
30.0	1.00~2.00	1.35 ~11.2
35.0	1.15~2.02	0.410~4.10
40.0	1.23~1.54	1.71 ~6.67
45.0	1.30~2.28	2.35 ~3.62

波高の測定箇所は、フラッター型造波機を使用した場合には、Fig. 7 に示すように、造波板前面より15m離れたところから、9 mあるいは7 m間隔に、合計5点または6点とし、プランジャ型の場合には、造波機から9 m離れたところをS-1として、それより7.2 mごとに5カ所とした。波高は、5点あるいは6点で同時記録させたが、計器の都合上一部は、各測点で同じ波を再現させる方法で個々に波高を測定した。そして、波高は、波の記録が十分定常になってからの5波ないし10波を、少し乱れた波列のときは20波を平均して、その測定の波高としたが、同時記録では、各測点でおおのこの波の対応をつけて波高を読みとった。なお、この実験はその一部を前述した底面摩擦応力の測定と同時にに行った。とくに波高減衰におよぼす比水深および波形勾配の影響を検討するための一連の実験をも行なった。

b. 実験結果と考察

Table 2 に示した条件について、適当に波高および水深あるいは周期を変えて実験し、縦軸に波高 H の対数を、横軸に距離 x をとって実験値を図示すると、波高はほぼ直線的に減少し、

$$H/H_0 = \exp\{-\alpha_{b+w}x\} \dots\dots (55)$$

の関係が成立することがわかった。ここに、 α_{b+w} は底面および側壁の影響を含んだ波高減衰係数であって、(39) 式および (42) 式との対応から、つぎのようにあらわされる。

$$\alpha_{b+w}L = \epsilon_{b+w}, \quad \alpha_b L = \epsilon_b \dots\dots (56)$$

したがって、上述した実験値の図示において

で、実験値に最適な直線を引き、その勾配から (56) 式にもとづいて波高減衰率 ϵ_{b+w} を求めることができるが、直線の引き方によって ϵ_{b+w} の値がかなり変わるので、つぎのような方法をとった。すなわち、(55) 式によれば、基準となる 2 点の波高 H_0 および H と、その 2 点間の距離 x がわかれば、 ϵ_{b+w} を決定できるが、いまの場合、5 カ所あるいは 6 カ所の波高を測定したわけで、それぞれ種々の誤差が含まれているので、平均操作をする意味から、5 カ所で測定した場合は、Fig. 7 において (S-1 と S-3)、(S-2 と S-4) および (S-3 と S-5) の位置の波高の 3 組を、また 6 カ所で測定した場合には、(S-1 と S-4)、(S-2 と S-5) および (S-3 と S-6) とについて、(55) 式と (56) 式にもとづいて ϵ_{b+w} を求め、それらの平均値をもって実験値とした。

つぎに、こうして得られた実験結果と前述した波高減衰の理論式との比較検討を行なった結果について述べよう。(37) 式で $\varepsilon=0$ とした線型理論の結果を用い、(42) 式を変形すると、

$$\beta L \epsilon_{b+w} = 4\pi^2 \{1 + (1/\psi_0)\} / (\sinh 2kh + 2kh) \dots\dots\dots (57)$$

ここに、 $\psi_0 = kB/\sinh 2kh$ となるので、波高減衰率におよぼす比水深 h/L および水深と実験水槽の幅との比 h/B の影響を検討することができる。

Fig. 8 は h/B を一定にして、 $\beta L \epsilon_{b+w}$ におよぼす h/L の影響を検討したものの 1 例であって、図中の曲線は理論結果である。この h/B をいくつか変えて行なった実験の結果から、実験値はかなり散乱しているが、 $\beta L \epsilon_{b+w}$ の h/L による変化の全体的傾向はかなり理論曲線と一致している。しかし、実験値の方が理論値よ

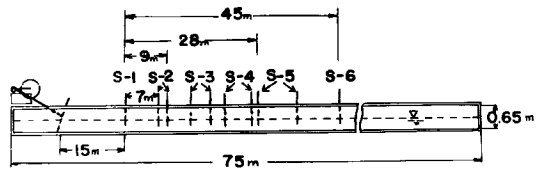


Fig. 7 Stations of wave meters

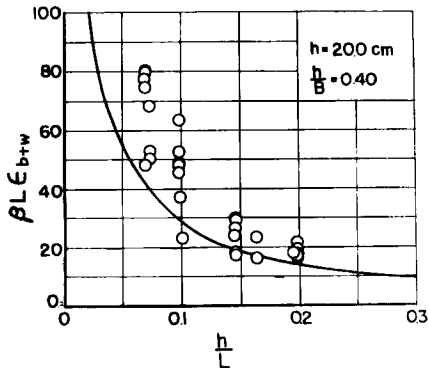


Fig. 8 Effect of relative depth h/L on wave attenuation coefficient.

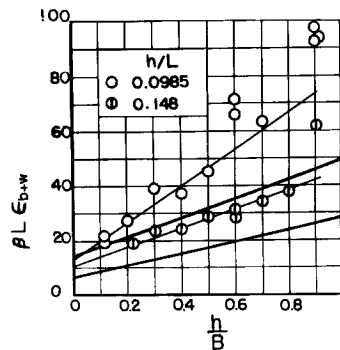


Fig. 9 An example of effects of side walls on wave attenuation coefficient.

り全般的に大きい。また、微小振幅波の理論では、波形勾配は波高減衰に影響しないことになるが、念のために水深と周期を一定とし、波高のみを変えて実験を行ないその影響を検討したところ、 h/L のいかなる値に対しても、波高減衰率におよぼす波形勾配の影響はほとんど見いだすことができなかった。

つぎに、(57) 式で h/L を一定にして $\beta L \epsilon_{b+w}$ と h/B の関係を調べれば、波高減衰におよぼす水槽側壁の効果を検討することができる。Fig. 9 は実験結果の 1 例を示したもので、図中の太い実線であらわされる

理論曲線と比較して、実験値は全体的にかなり大きくあらわれている。その傾向は比水深 h/L の値が小さく、かつ水深と水槽の幅との比 h/B が大きいほど顕著のようである。

以上において明らかなように、線型理論の結果にもとづいて、側壁の効果を含めて検討しても、実験値は理論値よりもかなり大きいことがわかる。

つぎに、側壁の効果を取りのぞいた波高減衰率 ϵ_b について実験結果と理論結果とを比較してみよう。

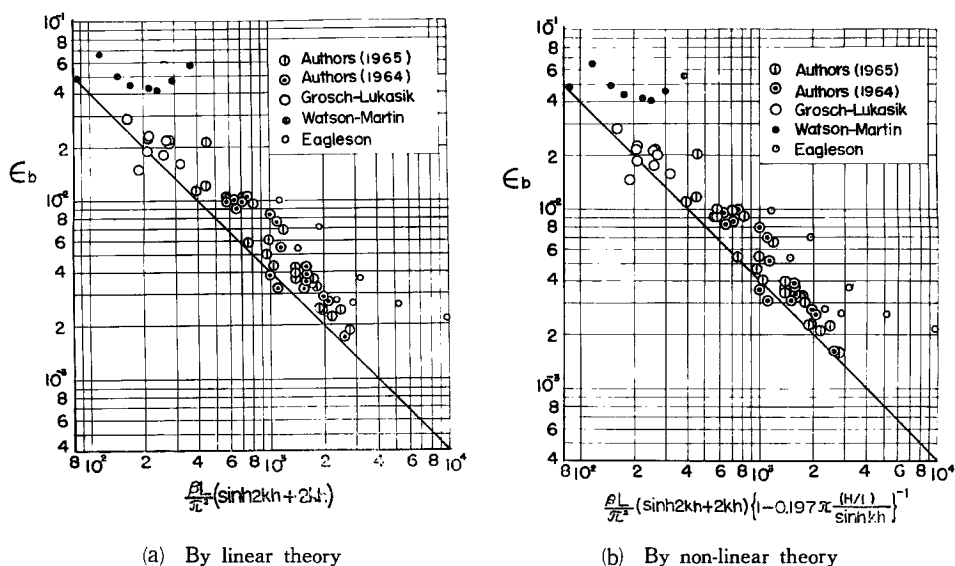


Fig. 10 Comparisons between theoretical relationships and experimental results of dimensionless decay modulus.

Fig. 10 は (37), (42) および (43) 式にもとづいて、線型理論による場合と非線型項の影響を考慮した場合とに対して、実験値と理論値とを比較したものであって、(a)は前者、(b)は後者の場合を示す。この場合、実験値は前述したように、一応波形勾配の影響はないものと考え、水深と周期の等しい実験結果を平均して用いた。この比較から明らかなように、非線型項の影響を考慮して理論的に側壁の効果を除去すると、実験値は平均して約10%程度減少し、理論曲線に近づくことがわかる。なお、図には同時に Grosch-Lukasik, Watson-Martin³³⁾ および Eagleson らの実験結果を示したが、Grosch らの結果は側壁の影響がほとんど無視できる水槽でえた波高減衰の実験値であるのに対し、Eagleson の場合は底面摩擦応力の直接測定の結果を用いて算出した値であって、さきに説明したように著者らや Grosch らの実験値よりかなり大きい値を与えることがわかる。

以上の結果から、結局実験水槽における波高減衰におよぼす非線型項の影響は、平均して約10%程度であって、なお実験値は理論値よりも30%程度大きいことがわかる。一方、前述した $\beta L \epsilon_{b+w}$ と h/B の関係を図示した Fig. 9 において、実験値の h/B による変化は大体直線的であるが、もし $h/B \approx 0$ 付近まで同じ関係が適用されるものとすれば、実験値に適合する直線の $h/B=0$ における $\beta L \epsilon_{b+w}$ の値を見出すことができる。この値は、一応側壁の効果のない場合に相当していると考えられるので、このようにしてえられる結果を線型理論の結果と比較したものが Fig. 11である。しかし、この結果によっても、前述した Grosch らの結果とともに、実験値は理論値よりも平均してなお20%程度大きいように見うけられる。このように、波高減衰に関する実験結果が理論結果と比較して、若干大きくあらわれる理由をいまのところ適確に説明することができないが、いちおうつぎのように考えることができると思われる。すなわち、その理由の第1は底面

摩擦による波高減衰理論における波動理論の適用の問題であって、Airy の微小振幅波理論による波のほか、本質的に質量輸送現象をとまなう波たとえば Stokes 波の波高減衰機構はどうなるか、またその効果が前述した理論と実験の結果の相違を説明するに足るものであるかどうかということである。この問題についてはすでに 2 において述べたように、いちおう同様な理論的解析を進めることができるので、引き続き波高減衰の理論式を求めて実験結果と比較してみたいと考えている。第 2 の理由としては、波による層流境界層の乱流への遷移の問題であって、これまで Vincent³⁴⁾ や Collins³²⁾ らがその限界条件について実験的検討を行っているが、両者にはかなりの相違があって、著者らのように Collins の限界条件で検討しても、果して確実に層流境界層であるかどうか不明である。したがって、この問題に対しては、あらためて詳細な実験的検討を行なうべきである。つぎに、第 3 の理由として考えられるものは、波動運動にとまなう水表面におけるエネルギーの消散過程であって、これはつぎの 2 つに分けられるであろう。その 1 つは、表面張力の効果にもとづくエネルギーの消散過程である。この過程については、Keulegan³⁵⁾ は定常波の場合について実験的に検討しているが、理論的根拠は確立されておらず、したがって進行波の場合に対しては詳細な考察を行なう必要がある。第 2 は波動運動にとまなう空気との相対運動によるエネルギーの消散過程であって、この問題は本質的には風浪の発生や発達現象と関連するわけであって、きわめて重要であり、また興味深い現象であるから、理論的研究とともに改めて詳細な実験的研究を行ないたいと考えている。

4. 結 語

浅海における波浪予知の重要性から、底面摩擦による波高減衰の現象をとりあげて、その機構を解明するためにここ数年来行なってきた基礎的な研究の結果について述べた。この現象が波の運動にとまなう海底付近の流れの特性に依存していることから、まず理論的研究においては、波による層流境界層の発達について解析し、層流境界層方程式にふくまれる非線型項が底面および側壁の摩擦応力ならびに境界層内での損失エネルギーにおよぼす影響を検討して、非線型項を考慮した波高減衰の理論式を導いた。つぎに、実験的研究においては、底面の摩擦応力を直接測定する装置を試作して、計器の特性を調べ、波による底面摩擦を測定するとともに波高減衰の詳細な実験を実施した。理論結果と実験結果の比較を行なって明らかにした点を要約すればつぎのとおりである。

まず、底面摩擦応力におよぼす非線型項の効果は ε によって若干その特性は変わるが、著者らの実験においては、その効果はほとんど省略できる程度であって、この事実を摩擦応力を直接測定した実験結果によって確認することができた。すなわち、底面の摩擦応力は、圧力勾配によって shear plate の両端に働く水平力を線型理論の結果を用いて測定値より差引いて補正すれば、実験値と理論値はよく一致することがわかった。つぎに、損失エネルギーにおよぼす非線型項の効果に関しては、底面においてはたかだか 0.2ε 程度であって、あまり大きな影響をおよぼさないが、側壁では $\varepsilon \operatorname{sech} kh$ 程度の増大としてあらわれ、著者らの実験において最大 20% にもおよぶことが見出された。

一方、波高減衰のほうからは、線型理論の場合および非線型項を考慮した場合の波高減衰率 ϵ_b に対して

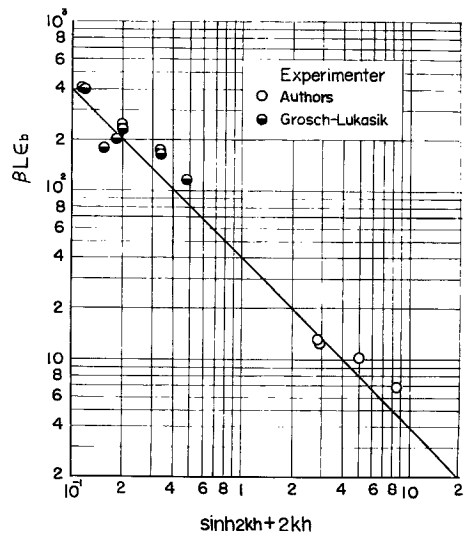


Fig. 11 Comparison between theoretical relation and experimental results of $\beta L \epsilon_b$ obtained by extrapolation.

実験値と比較した結果、線型理論では実験値は理論値より平均して約40%程度も大きくあらわれるが、非線型項の影響を考慮して理論的に側壁の効果を取りのぞくと、平均して約10%程度も実験値は理論曲線に近づくことがわかった。しかしながら、それでも実験値と理論値の十分な一致を確かめることができない。この事実は、波高減衰におよぼす側壁の効果を実験的に取りのぞいても、ほとんど同じであって、結局いずれの補正をしても実験値は理論値よりなお約30%程度も大きいことがわかった。この原因がなんであるかまだ明らかでないが、今後水表面におけるエネルギーの消散を表面張力の効果や水表面の空気に対する相対運動に着目して理論的に考察するとともに、層流境界層の乱流境界層への遷移の問題をも含めて、さらに詳細な実験を進め波高減衰の機構を解明していきたいと考えている。

最後に、この研究が文部省特定研究費による研究の一部であることを明記するとともに、本研究を行なうにあたり、実験や資料整理に熱心に助力して頂いた海岸災害研究室の諸氏ならびに水野組の実階実雄氏に謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 土屋義人, 井上雅夫: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究 (1), 第8回海岸工学講演会講演集, 1961. 9, pp. 19~24.
- 2) 岩垣雄一, 土屋義人, 坂井順行: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究 (2), 第11回海岸工学講演会講演集, 1964. 11, pp. 62~68.
- 3) 岩垣雄一, 土屋義人, 陳活雄: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究 (3), 第12回海岸工学講演会講演集, 1965. 11, pp. 41~49.
- 4) Lamb, H: Hydrodynamics, 6th Edition, New York, Dover Publications, 1945, pp. 619~623.
- 5) Hough, S. S.: On the Influence of Viscosity on Waves and Currents, Proc. London Mathematical Society, Vol. 28, 1896, pp. 264~288.
- 6) Biesel, F.: Calcul de L'amortissement d'une Houle dans un Liquide Visqueux de Profondeur Finie, La Houille Blanche, 1949, pp. 630~634.
- 7) Putnam, J. A. and Johnson, J. W.: The Dissipation of Wave Energy by Bottom Friction, Trans. AGU, Vol. 30, 1949, pp. 67~74.
- 8) Savage, R. P.: Laboratory Study of Wave Energy by Bottom Friction and Percolation, BEB, Tech. Memo. No. 31, 1953, pp. 1~25.
- 9) Putnam, J. A.: The Dissipation of Wave Energy by Flow in a Permeable Sea Bottom, Trans. AGU, Vol. 30, 1949, pp. 349~356.
- 10) Reid, R. O. and Kajiura, K.: On the Damping of Gravity Waves Over a Permeable Sea Bed, Trans. AGU, Vol. 38, No. 5, 1957, pp. 662~666.
- 11) Hunt, J. N.: On the Damping of Gravity Waves Propagated over a Permeable Surface, J. Geophys. Res., Vol. 64, No. 4, 1959, pp. 437~442.
- 12) Marray, J. D.: Viscous Damping of Gravity Waves over a Permeable Bed, J. Geophys. Res., Vol. 70, No. 10, 1965, pp. 2325~2331.
- 13) 岸 力: 海岸堤防に関する研究 (5), 海底摩擦による浅水波のエネルギー散逸, 土木研究所報告, 第93号の1, 昭29, pp. 1~9.
- 14) 永井莊七郎, 久保弘一: 伊勢湾台風時の愛知県および三重県の北部海岸における最大波浪の推定, 土木学会誌, 第45巻, 5号, 昭和35. 5, pp. 15~25.
- 15) Eagleson, P. S.: The Damping of Oscillatory Waves by Laminar Boundary Layers, MIT, Hydrodynamics Laboratory, Tech. Rep. No. 32, 1959, pp. 1~37.

- 16) Eagleson, P. S. : Laminar Damping of Oscillatory Waves, Proc. ASCE, Vol. 88, No. HY3, 1962, pp. 155~181.
- 17) Grosch, C. E., Ward, L. W. and Lukasik, S. J. : Viscous Dissipation of Shallow Water Waves, Physics of Fluids, Vol. 3, No. 3, 1960, pp. 477~479.
- 18) Grosch, C. E. and Lukasik, S. J. : Discussion of "Laminar Damping of Oscillatory Waves", Proc. of ASCE, Vol. 89, No. HY1, 1963, pp. 232~239.
- 19) Iwasa, Y. : Attenuation of Solitary Waves on a Smooth Bed, Trans. ASCE, Vol. 124, 1959, pp. 193~206.
- 20) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge, 1957, p. 622.
- 21) Huon Li : Stability of Oscillatory Laminar Flow near an Oscillating Wall, BEB, Tech. Memo. No. 47, 1954.
- 22) Manohar, M. : Mechanics of Bottom Sediment Movement due to Wave Action, BEB, Tech. Memo. No. 75, 1955.
- 23) Kalkanis, G. : Turbulent Flow near an Oscillating Wall, BEB, Tech. Memo. No. 97, 1957, pp. 1~36.
- 24) Longuet-Higgins, M. S. : Mass Transport in Water Waves, Phil. Trans. Royal Soc., London, Series A, No. 903, Vol. 245, 1953, pp. 535~581.
- 25) Grosch, C. E. : Laminar Boundary Layer under a Wave, Physics of Fluids, Vol. 5, No. 10, 1962, pp. 1163~1167.
- 26) Lighthill, M. J. : The Response of Laminar Friction and Heat Transfer to Fluctuation in the Stream Velocity, Proc. Roy. Soc. A. 224, 1954, pp. 1~23.
- 27) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory, McGraw Hill, New York, 1960, p. 207.
- 28) Hill, P. G. and Stenning, A. H. : Laminar Boundary Layer in Oscillatory Flow, Trans. ASME, Sept. 1960, pp. 593~607.
- 29) Sarma, G. N. : Solution of Unsteady Boundary Layer Equations, Proc. Camb. Philo. Society, Vol. 60, 1964, pp. 137~158.
- 30) 犬井鉄郎：偏微分方程式とその応用，応用数学講座，コロナ社，昭. 32, p. 241.
- 31) Bretschneider, C. L. : Field Investigation of Wave Energy Loss of Shallow Water Ocean Waves, BEB, Tech. Memo. No. 46, 1954, pp. 1~21.
- 32) Collins, J. I. : Inception of Turbulence at the Bed under Periodic Gravity Waves, J. of Geophys. Res., Vol. 68, 1963, pp. 6007~6014.
- 33) 18) の文献より引用
- 34) Vincent, G. E. : Contribution to the Study of Sediment Transport on a Horizontal Bed Due to Wave Action, Proc. Conf. Coastal Eng., 9th, Univ. Florida, 1958, pp. 326~354.
- 35) Keulegan, G. H. : Energy Dissipation in Standing Waves in Rectangular Basin, J. Fluid Mech., No. 6, 1958, pp. 33~50.