

可換コンパクト群上の Hardy 空間における
端函数 (extremal functions) について.

都留文科大 田中 純一

(Jun-Ichi Tanaka)

31. T を実軸 R の稠密な部分群とする. T に離散位相を
入れて, その双対群を K とおく. σ を K 上の正規 Haar 測度と
し, $f \in L^1(\sigma)$ が 解析的 とは

$$f \sim \sum_{\lambda \geq 0} a_\lambda \chi_\lambda$$

となる Fourier 展開を持つものとする. ここで χ_λ は $\chi_\lambda(x) =$
 $\chi(\lambda)$, $x \in K$, で定まる指標とする. $L^p(\sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$, における解
析函数全体で Hardy 空間, $H^p(\sigma)$, を定義し, $f \in H^p(\sigma)$ で $\int f(x) d\sigma$
 $= 0$ となる函数全体を $H_0^p(\sigma)$ と書く. $L^p(\sigma)$ の部分空間 M
が (単純) 不変 (simply invariant) とは $T \ni \lambda (\geq 0)$ に対し
 $\chi_\lambda \cdot M \not\subset M$ となることとする. $L^p(\sigma) \ni f$ に対し, $\{\chi_\lambda f; T$
 $\ni \lambda > 0\}$ で生成される不変部分空間を M_f と記す. 不変部分
空間 M がある $f \in M$ に対して $M = M_f$ を満たすとき, f
を M の 単一生成元 (single generator) と呼ぶ.

以上の設定において, 単位円周上のいくつかの性質が

拡張される。例えば $f \in H^1(\sigma)$ で $\log |f| \in L^1(\sigma)$ とすると inner-outer 分解が可能である。しかしある程度の隔たりがあり、 $\log |f| \notin L^1(\sigma)$ となる解析関数 $f (\neq 0)$ の存在が示される。([1; Theorem 9.3])。この種の関数に inner-outer 分解に類する分解ができるだろうか？ また全このノルム 1 の outer 関数は $H^1(\sigma)$ の単位球の端点となる。果して逆が成立するであろうか？ この等の懸案はかなり以前よりなされ、次の問題へと集約されている。([3; Chapter 5, §4])。

単一生成元の問題。全この不変部分空間は単一生成元を持つであろうか？ 特に $H^1_0(\sigma)$ の場合はどうか。

ここでは $H^1_0(\sigma)$ の local product 分解による表現を用いてこの問題の周辺を探ってみる。

§2. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $e_t(\lambda) = e^{i\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{P}$) となる $e_t \in K$ が定まる。 $K \ni x$ に対し $T_t(x) = x + e_t$ とすると K 上はエルゴード的な流れが定義される。簡便のため、 $2\pi \in \mathbb{P}$ と仮定する。 $K_{2\pi}$ を $e_1(y) = 1$ となる $y \in K$ の全体とすると $K_{2\pi}$ は K のコンパクト部分群となり、 K は $K_{2\pi} \times [0, 1)$ と $B(y, \delta) = y + e_\delta$ という写像で同一視できる。 $K_{2\pi}$ 上の正規 Haar 測度を σ_1 とするとき σ は $\sigma_1 \times m_1$ となる。ここで m_1 は実軸上の Lebesgue 測度、 dt , の $[0, 1)$ への制

限とする. K を $K_{2\pi} \times R$ の部分と捉えることより, 次の二つの写像を導入する.

$L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt) \ni f$ に対して

$$\Xi(f)(y, s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(y + e_j, s - j)$$

$(y, s) \in K = K_{2\pi} \times [0, 1)$ と定義する. このとき Ξ は $L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt)$ を $L^1(\sigma)$ 上へ写す. また $L^1(\sigma) \ni \phi$ に対して

$$\phi^\#(y, t) = \phi(y + e_{[t]}, t - [t])$$

$(y, t) \in K_{2\pi} \times R$ とする. ここで $[t]$ は t を越えない最大の整数とする. $\phi^\#$ は $L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt / (1+t))$ に属する. $\mathcal{H}^1$ を $f \in L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt)$ で σ_1 -a.e. $y \in K_{2\pi}$ に対し t の函数, $f(y, t)$, が実軸上の Hardy 空間, $H^1(dt)$ に属するものの全体とする. 閉値域定理の簡単な応用から $H_0^1(\sigma)$ を $\mathcal{H}^1$ の商空間として表現することができる.

定理([4; Theorem 3.1]). $\mathcal{H}^1 / \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1$ と $H_0^1(\sigma)$ は等距離同型となる. より詳しく, Ξ は $\mathcal{H}^1$ を $H_0^1(\sigma)$ 上に写し,

$$\|f + \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1\|_1 = \|\Xi(f)\|_1$$

が成立する.

多くの場合, 適当な $g \in \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1$ に対して $\|f + g\|_1 = \|\Xi(f)\|_1$ となる. 今この $f \in \mathcal{H}^1$ に対してこれが成立するであろうか, 換言すれば $\mathcal{H}^1 / \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1$ のノルムは attain されるであろうか. この問題が前述の $H_0^1(\sigma)$ に属する単一生成

元の問題と同値となる.

$H'(\sigma) \ni \phi$ に対して $\mathcal{F}(\phi)$ を次の性質を持つ函数の全体とする.

(i) $L^1(K_{\infty} \times \mathbb{R}, d\sigma_1 \times dt) \ni u \geq 0$ で $0 \leq \mathcal{F}(u) \leq 1$ となる.

(ii) $u(y, t) \phi^{\#}(y, t)$ は $\mathcal{H}^1$ に属する.

このとき, $\mathcal{F}(\phi)$ は閉凸集合となり自然な順序で半順序集合となる. 簡単な考察により Z_{ann} の補題の仮定をみちし, 極大元 $\bar{u}$ の存在が示される.

定理 1, $H'_0(\sigma) \ni \phi$ に対して, $\mathcal{F}(\phi)$ がよび $\bar{u}$ を上記のものとする. $\mathcal{F}(\bar{u}) \neq 1$ となれば $(1 - \mathcal{F}(\bar{u}))\phi$ は $H'_0(\sigma)$ の単一生成元となる.

この定理を示すために次の補題を用ゐる. 上半平面で有界な解析函数の境界函数全体の $L^1(dt/(1+t^2))$ における閉包を $H^1(dt/(1+t^2))$ と記す.

補題 1. $H^1(dt/(1+t^2)) \ni f$ に対して, f が outer でないとする. このとき $0 \leq u(t) \leq 1$ で

$$u \cdot f \in H^1(dt/(1+t^2)) \quad \text{かつ} \quad u f(\lambda) = 0$$

となる函数 u が存在する.

証明. $f(t) = g(t)h(t)$ と g が inner, h が outer とする $H^1(dt/(1+t^2))$ における inner-outer 分解とする. $g(\lambda) = 0$ のとき $u \equiv 1$ として成立する. $g(\lambda) \neq 0$ のとき, g を定

数値として $0 < \langle \varphi, u \rangle < 1$ と仮定できる. 二つより $0 < \alpha < 1$ を適当に定めると $1 - \alpha/2 (\langle \varphi, u \rangle + \overline{\langle \varphi, u \rangle}) = 0$ となり

$$u(t) = \frac{1}{2} \{ 1 - \alpha/2 (\langle \varphi, t \rangle + \overline{\langle \varphi, t \rangle}) \}$$

と定めるとよい.

補題 2. ([1; Theorem 7.8]). $\varphi \in H_0^1(\sigma)$ とする. このとき次の (i) (ii) は同値となる.

(i) σ_1 -a.e. $y \in K_{2\pi}$ に対して, $\varphi^\#(y, t)$ は t の函数として $H^1(dt/(1+t^2))$ の outer 函数となる.

(ii) φ は $H_0^1(\sigma)$ の単一生成元となる.

定理 1 の証明. $0 \leq \alpha(\tilde{u}) \leq 1$ および $\alpha(\tilde{u}\phi^\#) = \alpha(\tilde{u})\phi$

より, $(1 - \alpha(\tilde{u}))\phi$ は $H_0^1(\sigma)$ に属する. $\varphi = (1 - \alpha(\tilde{u}))\phi$ とおく. 仮定より, $\varphi \neq 0$ また, σ_1 -a.e. $y \in K_{2\pi}$ に対して, t の函数, $\varphi^\#(y, t)$, は $H^1(dt/(1+t^2))$ に属する. 補題 2 の (i) が成立することを示す. (i) が成立しないと仮定すると σ_1 -

a.e. $y \in K_{2\pi}$ に対して, $\log |\varphi(y, t)| \in L^1(dt/(1+t^2))$ より

$L^1(K_{2\pi} \times \mathbb{R}, d\sigma_1 \times dt/(1+t^2)) \ni h(y, t)$ で $|\varphi^\#(y, t)| = |h(y, t)|$

となり, σ_1 -a.e. $y \in K_{2\pi}$ に対して, $h(y, t)$ は t の函数として

$H^1(dt/(1+t^2))$ における outer 函数とできる. $\varphi^\#(y, t) =$

$B(y, t)h(y, t)$ とすると, σ_1 -a.e. y に対し, t の函数, $B(y, t)$

は定数ではない inner 函数となる. 補題 1 より $0 \leq U(y, t) \leq 1$

となる可測函数で, t の函数, $U(y, t)\varphi(y, t)$, が $H^1(dt/(1+t^2))$ に

属し, $\nabla \varphi(y, t) = 0$ となるように取れる. 適当な定数 $C > 0$ に対し $\nabla(y, t) = C/(1+t^2) \cdot \nabla \varphi(y, t)$ と定めると $0 \leq \nabla \leq 1$ 且 $\nabla(\infty) \leq 1$, かつ $\nabla \varphi^\#$ が $\mathcal{H}'$ に属する. 二れより

$$\tilde{u} \leq \tilde{u} + \nabla(1 - \nabla(\tilde{u}))^\#$$

また $\tilde{u} + \nabla(1 - \nabla(\tilde{u}))^\# \in \mathcal{F}(\phi)$ が成立し, $\tilde{u}$ の極大性から不合理となる.

この定理を利用するために, $\mathcal{F}(\phi)$ の定義を少し拡大し, $\phi \in H_0^\infty(\sigma)$ に対し

$$\mathcal{F}'(\phi) = [u \in L^1(K_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}, d\sigma_1 \times dt); 0 \leq u, \text{ かつ } u\phi^\# \in \mathcal{H}']$$

$$\mathcal{F}'_K(\phi) = [\theta \in L^1(\sigma); 0 \leq \theta, \text{ かつ } \theta \cdot \phi \in H_0^1(\sigma)]$$

とおく. ともに各々の σ ルムで閉じた凸集合となる. 一方 ϕ を $H_0^1(\sigma)$ の単一生成元とすると Szegő の定理の応用から, 適当な $H^1(\sigma)$ における outer 函数 φ が存在して, ある inner 函数 ψ に対し

$$\arg \phi \varphi = \arg \psi$$

とできる. 以上より, 定理 1 から次の系を得る.

系 1. 次の (i) ~ (iii) は同値となる.

(i) $H_0^1(\sigma)$ は単一生成元を持たない.

(ii) 全ての $\phi \in H_0^1(\sigma)$ に対し, $\mathcal{H}' \ni f$ で $\nabla(f) = \phi$ となり, $\|f\|_1 = \|\phi\|$ となるものが存在する.

(iii) 全ての $H_0^1(\sigma)$ における inner 函数 ψ に対し,

$$\Phi(\Phi'(\varphi)) = \Phi_K'(\varphi)$$

が成立する.

(iii) に関 する 方向 で 次 の 問題 設定 は 興 味 深 い. $\varphi = \chi_\lambda$ ($\lambda > 0$) と 取 り, ス ペ ク ト ル が $(-\lambda, \lambda)$ に 属 す る 正 値 函 数 $\phi \in L^1(\sigma)$ が $f \in L^1(K_{2\pi} \times \mathbb{R})$ で σ_1 -a.e. $y \in K_{2\pi}$ に 対 し, t の 函 数 $f(y, t)$ の ス ペ ク ト ル が $(-\lambda, \lambda)$ に 属 す る 正 値 函 数 が 存 在 し て, $\Phi(f) = \phi$ と でき る か ど う か, と い う 問 題 が 単 一 生 成 元 の 存 在 の 一 つ の 十 分 条 件 を 調 べ る こ と と な る. 正 の 定 義 函 数 の 性 質 と の 関 連 か ら, あ る 程 度 の 結 果 を 期 待 でき る よ う に 思 う の が 現 段 階 で は 成 立 す る か 否 か 不 明 で あ る.

§3. $K \times \mathbb{R}$ 上 の Borel 函 数 A が

$$|A(x, t)| = 1 \quad \text{か} \quad A(x, s+t) = A(x, s)A(x+s, t)$$

を 満 足 す とき, A を コ サ イ ク ル と 呼 ぶ. 各 λ の 不 変 部 分 空 間 に対 し, コ サ イ ク ル が 対 応 し て く る. σ -a.e. x に 対 し, t の 函 数 $A(x, t)$ が $H^1(dt/(t^2+1))$ の inner 函 数 と な る と き, A を 解 析 的 コ サ イ ク ル と 呼 ぶ, ま た に $A(x, t)$ が Blaschke 積 の と き, Blaschke コ サ イ ク ル と い う. 全 て の 不 変 部 分 空 間 $\mathcal{M}$ に 対 し 適 当 な コ ン タ リ - 函 数 φ を 定 め る と $\varphi\mathcal{M}$ の コ サ イ ク ル が Blaschke コ サ イ ク ル と でき る ([3; Theorem 26]). こ の よ り 単 一 生 成 元 の 問 題 は Blaschke コ サ イ ク ル の 零 点 の $H^1(\sigma)$ に

属する函数による実現へと転換される。上記手法を用いて、ある程度結果を得ることができる。

$B(y, t)$ を Blaschke コサイクルとする。これを $K_{2n} \times R$ 上に制限し、これに上半平面に解析的に拡張して、 $B(y, t + \lambda s)$ を $K_{2n} \times R \times R^+$ 上の函数とみなし、次の条件を考へる。

(3.1) ある正数 $M > 0$ に対し、 $K_{2n} \ni y$ について、 $0 \leq t < 1$ における $B(y, t + \lambda s)$ の零点は高々 1 個となり、 $[0, 1) \times (0, M)$ に含まれる。

補題 3. Blaschke コサイクル B が (3.1) をみたすとする。このとき inner 函数 ϕ が定まり $B(y, t + \lambda s)$ の零点と $\phi^\#(y, t + \lambda s)$ の零点は一致する。即ち $B = \tau \phi \cdot \bar{\phi}$ となる。

証明の概略. (3.1) の性質から $H^1(\sigma) \ni \gamma$ で $\gamma(0) \neq 0$ となり $\gamma^\#(y, t + \lambda s)$ の零点は $B(y, t + \lambda s)$ の零点を含む函数 γ が作れる。定理 1 の証明と同様な方法で $0 \leq \psi \leq 1$ となる函数で $\phi = \psi \gamma$ が題意をみたすように定まる。

補題 4. 任意の Blaschke コサイクル B に対し、(3.1) をみたす Blaschke コサイクルの列 $\{B_m\}$ が定まり

$$B = \prod_{m=1}^{\infty} B_m$$

と書ける。

以上の準備のもとに次の定理が示される。

定理 2. $H^1_0(\sigma) \ni \phi$ が $\log |\phi| \in L^1(\sigma)$ となり μ_ϕ の

Blaschke コサイクルを持つとする。このとき $0 \leq v_m \leq 1$ となる
 数列 $\{v_m\}$ で次の性質を満たすものが定まる。

$$(i) \quad v_m \geq v_{m+1},$$

$$(ii) \quad \mathcal{M}_{v_{m+1}}\phi \supset \mathcal{M}_{v_m}\phi,$$

$$(iii) \quad \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{v_n}\phi = H_0'(\phi).$$

換言すれば $v_n\phi$ は $H_0'(\phi)$ の単一生成元に限りなく近づく。

文 献

- [1] T. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall, 1969.
- [2] H. Helson, Structure of Blaschke cocycles, Studia Math.
44, 1972, 493-500.
- [3] ———, Analyticity on compact abelian groups, Algebras
in analysis, Academic Press, 1975, 1-62.
- [4] J.-I. Tanaka, Hardy spaces and BMO-functions induced by
ergodic flows, Michigan Math. J. 32, 1985, 335-348.