

C^* -環の近似問題について

山形大 理 富山 淳

まづが、よく知られた Grothendieck の Banach 空間における近似性質の C^* -環的存とり扱として C^* -環の Fubini 積が存とりあることは以前にもこの講究録(同)にあって述べたことがあるが、以後より、2 年以内に問題が大きく進展したので、今もう一度ここに書くべきである。

§ 1. C^* -環の Fubini 積について. C, D を C^* -環, A, B を C の C^* -部分環とする (単位元は仮定しない). $A \otimes B$ は $C \otimes D$ の C^* -部分環と存とりあるから A, B の $(C \otimes D)$ についての Fubini 積を

$$F(A, B) = \{x \in C \otimes D \mid R_\varphi(x) \in B, L_\psi(x) \in A \quad \forall \varphi \in C^*, \psi \in D^*\}$$

と定義する. 定義から $F(A, B)$ は $C \otimes D$ の自己共役な部分空間になっているが実は C^* -部分環になっている。

命題 1. $F(A, B)$ は $C \otimes D$ の C^* -部分環である. 特に A, B がそれぞれ C, D のイデアルである時は $F(A, B)$ は又 $C \otimes D$ の

イデアルになる。

証明. 前半は C, D の σ -共役空間を von Neumann 環とみなして $\tilde{C}, \tilde{D}$ とかくと、 A, B のうち A は $\tilde{C}$ の中で σ -weak 位相で閉な自己共役部分環になっている。従ってこの意味で $C \otimes D, \tilde{A} \otimes \tilde{B}$ 等は皆 $\tilde{C} \otimes \tilde{D}$ の部分環とならう。この時弱位相の性質から $\tilde{A} \cap C = A, \tilde{B} \cap D = B$ が成り立つ。従って von Neumann 環の C^* -アノニル積の時と同様に

$$F(A, B) = \tilde{A} \otimes \tilde{B} \cap C \otimes D \quad \text{in } \tilde{C} \otimes \tilde{D}.$$

よって $F(A, B)$ は C^* -環である。後半は [9; Lemma 2.3] による。前半は右各氏の注意による。

そこで $F(A, B) = A \otimes B$ の問題と次の三つに分ける。

問題(a) 任意の三つ組 (B, C, D) に対して $F(A, B) = A \otimes B$ とする A はどんな C^* -環か?

問題(b) $A = C$ としたとき、任意の組 (B, D) に対して $F(A, B) = A \otimes B$ が成り立つのはいつか?

問題(c) $B = D$ としたとき、任意の組 (C, D) に対して $F(A, B) = A \otimes B$ が成り立つのはいつか?

これらの問題は C^* -環の構造理論と深い関係をもっている。そして von Neumann 環の時と同様に C^* -アノニル積の基本的な問題のいくつかは上の問題の解決にかかっている ([9] [10] 参照)。これらによって矢張り肯定的な結果としては

定理 1.2 A の既約表現が有限次元で且つこの次元が有限な C^* -環 A に対しては問題 (a) は肯定的である。

この定理の著者 [9] の証明は非常に長いものであったが現在では次のようにして証明出来る。即ちまず A は nuclear であるから [3; 定理 3.1] により Grothendieck の (metrical) 近似性質をもつ。よって $F(A, B)$ の $C \otimes D$ (λ -ノルムで定義される C の λ -ノルム λ は最小の λ の λ -ノルム) での image は次の定理 2.1 から $A \otimes B$ に含まれる。一方このとき [17; Proposition 1] により $A \otimes B$ では λ -ノルムと λ -ノルムは同値になっている。従って $F(A, B) = A \otimes B$ 。

上の定理の直接の結果としては何と云へば $C \otimes D$ の λ には各 C と D の λ への C^* - λ ノルム積であることが言える。このことは又 C, D の任意の λ -ノルム積 $C \otimes D$ の λ でも成り立っている ([1], [15])。

問題 (b), (c) に対しては次のことが成り立つ。

定理 1.3.

- (1) A が nuclear の時 (b) の解になる
- (2) A が injective ならば (c) の解である。

証明. (2) は [1; Proposition 3.7] に含まれるので (1) のみについて。 A は nuclear であるから定理 1.2 の証明でも述べたように finite rank の completely positive contraction $\{e_k\}$ が存

在して ρ_α は単位写像に各 a_i と 1 に ρ_α で収束している。こ
うとき $A \otimes D$ には又 completely positive map $\rho_\alpha \otimes 1$ が定義出
来て且つ $\|\rho_\alpha \otimes 1\| \leq 1$ ([2] 参照)。従つて $\{\rho_\alpha \otimes 1\}$ は $A \otimes D$ に
おいて単位写像に各 a_i と 1 に ρ_α で収束している。 $x \in F(A, B)$
をとる。今 ρ_α を

$$\rho_\alpha(a) = \sum_{i=1}^n \langle a, \varphi_i \rangle a_i \quad \forall a \in A \quad \text{とすると}$$

$$\rho_\alpha \otimes 1(a \otimes b) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes R_{\varphi_i}(a \otimes b) \in A \otimes B$$

よつて $x = \lim_{\alpha} \rho_\alpha \otimes 1(x)$ は $\rho_\alpha \otimes 1(x)$ が $A \otimes B$ に入
るから x も $A \otimes B$ に入る。

さて問題 (a) は von Neumann 環の時とは違つて一般には成立
しないだろうと予想されてゐたが Wassermann [18] によつて次
のことが示されてゐる。

定理 1.4 $A = C = M$, von Neumann 環とすると次つこ
とは同値である。

- (1) M は (b) の解である
- (2) M は nuclear である
- (3) M は I_n 型の von Neumann 環の有限和である。

こゝから言へばどの von Neumann 環は C^* -型の commutation
theorem を満足しないわけである。Wassermann は [18] で更に
可分な C^* -環でも (b) の negative example があることを示
してゐたがごく最近古谷氏は Wassermann の方法を発展させ

で次の結果を証明されたので問題 (A) の解は, "nuclear であろう" という最初の予想とは大きく違っていたことになる。

定理 1.5. H を可分な無限次元のヒルベルト空間とし, $C(H)$, $B(H)$ をそれぞれ H 上のコンパクトな作用素, 有界な作用素のつくる環とする。このとき $B(H) \otimes B(H)$ の $F(C(H), B(H))$ は $C(H) \otimes B(H)$ より exact に大きい。

左と右を中に証明の概略をのべてみる。 p_n を H 内の n 次元の projection とし, $p_n p_m = 0$ ($n \neq m$) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ とする。

$p_n B(H) p_n = B(p_n H)$ は $n \times n$ の matrix 環 M_n と同一視し M_n の直和を M とする。 $x \in M_n \rightarrow \tilde{x} \in M_n$ は M_n 内の transpose map とし, $\tilde{\cdot}$ を M に拡大したものとすれば $\tilde{\tilde{x}} = x$ とかく。 M_n 上の trace τ_n をとり $M_n \otimes M_n$ の state φ_n を $\langle x \otimes y, \varphi_n \rangle = \tau_n(\tilde{x} \tilde{y})$ で定義する。 $\mathcal{U}$ を自然数の集合の 極限系に属する free ultrafilter とし, $M \otimes M$ の state φ_0 を

$$\langle x \otimes y, \varphi_0 \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x \otimes y, \varphi_n \rangle = \tau(\Phi(\tilde{x} \tilde{y}))$$

で定義する。ここで Φ は M 上の ideal

$$I = \{x \in M \mid \lim_{\mathcal{U}} \langle a^* x b, \tau_n \rangle = 0 \quad \forall a, b \in M\}$$

で与えられる quotient map であり, この時 M/I は II₁-型の factor としての同型表現 N をもつ。更に τ 上の trace τ は

$$\langle [x], \tau \rangle = \langle \Phi(x), \tau \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x, \tau_n \rangle$$

で与えられることはよく知られている。 x 上の φ_0 が $M \otimes M$ 上

で拡大出来ることは [18] の議論によつてゐる。そこで更に φ の $B(H) \otimes B(H)$ への拡大 $\varphi \in$

$$\langle x \otimes y, \varphi \rangle = \lim_n \langle p_n x p_n \otimes p_n y p_n, \varphi_n \rangle$$

で定義する。つくり方から φ は $M \otimes M$ -central にちつてゐる。

π_φ を φ の GNS-表現, $\mathfrak{H}_\varphi$ の中の π_φ にまつての cyclic vector とする。 F_2 は 2 個の生成元をもつ自由群とする。

[18] によつて F_2 は M の中へ忠実な unitary 表現をもつ。この π_φ の元 a は $\tilde{a} = a^* = a^\dagger$ とするよつてとれる。今 M の中で与えられた F_2 の元 a, b, c, d によつて $ba^\dagger = dc^\dagger$ とすると

$$\begin{aligned} & \| \pi_\varphi(a \otimes b) \zeta_0 - \pi_\varphi(c \otimes d) \zeta_0 \|^2 \\ &= 2 - \langle c^* a \otimes d^* b, \varphi \rangle - \langle a^* c \otimes b^* d, \varphi \rangle \\ &= 2 - \tau(\Phi(d^\dagger b a^\dagger c)) - \tau(\Phi(b^\dagger d c^\dagger a)) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{よつて } [\pi_\varphi(F_2 \otimes F_2) \zeta_0] = [\pi_\varphi(1 \otimes F_2) \zeta_0]$$

[] は中の元で生成された $\mathfrak{H}_\varphi$ の部分空間とする。

P を $[\pi_\varphi(1 \otimes F_2) \zeta_0]$ への projection とする。

さて $B(H) \otimes B(H)$ の $B(H) \otimes C(H)$ による商環は $B(H)$ と $B(H)/C(H)$ の C^* -積と見做さうとする。この cross-norm を γ とおく (定理は $F(C(H), B(H))$ の形であるが証明は notation の見易さのためにあつた方を Calkin algebra とし $F(B(H), C(H))$ の形であつてゐることにする)。 A は F_2 の生成する M の C^* -部分環とすると $\pi_\varphi(A \otimes A)$ は $P \mathfrak{H}_\varphi$ を不変にする。 $\gamma > \alpha$ であることに

よ.せば $B(H) \otimes B(H) \longrightarrow B(H) \otimes B_{\mathbb{C}(H)}^{\text{op}}$ の等同型の核が $F(B(H))$ であるから証明は定数である。そこで $\gamma = \alpha$ とする。従って

$$f: A \otimes \pi_{\varphi}(1 \otimes A) \longrightarrow \pi_{\varphi}(A \otimes A)|_P$$

は $*$ -等同型である。 f の $A \otimes B(H_{\varphi})$ への拡大 $\hat{f}$ を次の表現空間 K が $K \supset H_{\varphi}$ を満たし

$$\hat{f}|_{A \otimes \pi_{\varphi}(1 \otimes A)|_{PH_{\varphi}}} = f$$

と定まるようにする。そこで任意の $t \in B(H_{\varphi})$ に対して

$$\psi(t) = P \hat{f}(1 \otimes t) P$$

とみると、つくり方から ψ は、 $a, b \in F_2$ に対して

$$\psi(\pi_{\varphi}(1 \otimes a) t \pi_{\varphi}(1 \otimes b)) = \pi_{\varphi}(1 \otimes a) \psi(t) \pi_{\varphi}(1 \otimes b)$$

とみた。 $f \in \ell^{\infty}(F_2)$ に対して PH_{φ} 上の作用素 M_f を

$$M_f \pi_{\varphi}(1 \otimes a) \xi_0 = f(a) \pi_{\varphi}(1 \otimes a) \xi_0$$

で定義する。 $P^{\perp}H$ で $M_f = 0$ とおけば M_f は $B(H_{\varphi})$ の元と見做しうる。 $f_a \in f_a(b) = f(a^*b)$ とする同数とすると前に述べた計算から

$$\pi_{\varphi}(1 \otimes a) M_f \pi_{\varphi}(1 \otimes a^*)|_{PH_{\varphi}} = M_{f_a}|_{PH_{\varphi}}$$

が成立する。 $P^{\perp}H$ 上では両方共に 0 だから上式は無限直和で成り立つ。そこで $\mu(f) = (\psi(M_f) \xi_0, \xi_0)$

とみるとこれが F_2 の invariant mean になることが次で示す。そしてわかるので $\gamma = \alpha$ が正しい値であることを示す。即ち

$$\mu(f_a) = (\psi(\pi_{\varphi}(1 \otimes a) M_f \pi_{\varphi}(1 \otimes a^*)) \xi_0, \xi_0)$$

$$= (\psi(M_f) \pi_\varphi(1 \otimes a^*) \xi_0, \pi_\varphi(1 \otimes a^*) \xi_0)$$

$$= (\psi(M_f) \pi_\varphi(a \otimes 1) \xi_0, \pi_\varphi(a \otimes 1) \xi_0) = (\psi(M_f) \xi_0, \xi_0)$$

$$= \mu(f) \quad \text{証明了.}$$

上の証明を更に考へると同じようにして M_n の $C^*(\infty)$ -和

$\sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ が $M \otimes B(H)$ の中で non-trivial な Fubini 積

$F(\sum \oplus M_n, B(H))$ をもつことが下せるので、 C^* -環 A はたと
えその既約表現が有限次元だけと仮定しても問題 (A) に対して
反例をもつことにちなり、従つて (A) の解は非常に狭く、定理 1.2 が
ある意味では best possible ではないかと考へてきた。尚
問題 (b) について、逆が成り立つのではないかと思ふ。石
谷氏は更に $\mathcal{K}$ が I 型の C^* -環の時 $\mathcal{K} \otimes B$ (B は任意) の中の任
意の C^* -部分環 $\overset{A \otimes B}{\mathcal{H}}$ 上の product functional $\varphi \otimes \psi$ で分離出来ること
を証明しているが (知られてゐたのはイデアルの場合) 詳細
は略す。

§2. Banach 空間の Fubini 積と近似問題. Banach 空間の最
小のノルムノルム入による Fubini 積は本質的には既に (14) に
よつて Waalbroeck に考へておられ、それが Grothendieck の近似
問題と同値になることがわかつてゐるが著者の [9] においては、
前者と、ここでの変式化との関係をはつきりした形ではなかつ
てゐたのでそれを求めておく。 E, F を Banach 空間, $E \otimes F$

を λ -ノルムに よる λ -ノルム種とする。

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right\| = \sup_{\substack{\|\varphi\| \leq 1 \\ \|\psi\| \leq 1}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i, \varphi \otimes \psi \right\rangle \right|$$

G と H を E と F を含む Banach 空間とする。 G 上の有限線型汎関数 φ に対して λ 種でも右 slice map R_φ が定義出来る。左の slice map についても同様である。

$$F(E, F) = \{x \in G \otimes_\lambda H \mid R_\varphi(x) \in F, L_\psi(x) \in E, \\ \forall \varphi \in G^*, \psi \in H^*\}$$

となく。 λ -ノルムに ついては $E \otimes_\lambda F$ が $G \otimes_\lambda H$ の部分空間として考えられるようになっているから上の定義は意味をもっている。そしてここでは C^* -環の時と異なり問題 (a), (b), (c) がすべて同値な形になる。これは λ -ノルムの構造が C^* -環の時の λ -ノルムの定義と比べてはるかに簡単になっていることに起因している。

定理 2.1. E を固定したとき次のことは同値である。

(1) 任意の三つ組 (G, F, H) に ついて $F(E, F) = E \otimes_\lambda F$

(2) $E = G$ としたとき任意の組 (F, H) に ついて

$$F(E, F) = E \otimes_\lambda F$$

(3) $F = H$ としたとき任意の組 (F, G) に ついて

$$F(E, F) = E \otimes_\lambda F$$

(4) E は approximation property をもつ。

証明は [14] の議論の变形であるが詳細は富山 [12] にゆずる。ここで前講演の von Neumann 環の場合はその状況でつらねれば最大の環として $B(H_1) \otimes B(H_2) = B(H_1 \otimes H_2)$ があり定理は実質上 $M_1 = B(H_1)$, $M_2 = B(H_2)$ の時のみつければ十分であった。

Banach 空間の時に X, Y を E, F の単位球に弱*-位相を与えたものとした時の連続関数環 $C(X), C(Y)$ である。実際 G, H を $G \otimes H$ に属する E, F の Fubini 積 $F(E, F)$ は

$C(X) \otimes F \cap E \otimes C(Y)$ ($C(X) \otimes C(Y)$ の部分空間と見做す共通部分)

の中に embed 出来ること、即ち上の空間が E, F のみによって与えられる最大の Fubini 積であることが示せる。これまでの議論はいわばその状況での π のような canonical なものは何かということである。そのような状況の中で Banach 空間の近似性値の C^* -環的表現として nuclear C^* -環をとうと、実際に π が metrical approximation property を持つことが示されるに及んでその逆も又成立するのではなかろうかと思われていたが、ごく最近 U. Haagerup が nuclear 環とは必ずしも反対にある 2×2 の生成元をもつ自由群 F_2 の群環 $C_r^*(F_2)$ (reduced) が又 metrical approximation property をもつことを証明したので、 C^* -環における completely positive finite rank operator

による近似は Banach 空間の ϵ とは ϵ まで違つたものであることが認識されつつある

共通文献

1. R. J. Archbold, On the center of a tensor product of C^* -algebras, J. London Math. Soc. 10(1975), 257-262
2. W. Arveson, Subalgebras of C^* -algebras, Acta Math. 123(1969), 141-224
3. M. Choi and E. Effros, Nuclear C^* -algebras and the approximation problem, Amer. J. Math. 12掲載予定
4. E. Effros and C. Lance, Tensor product of operator algebras, preprint
5. A. Grothendiech, Produits tensoriels Topologiques et espaces nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16(1955)
6. S. Sakai, On the σ -weak topology of W^* -algebras, Proc. Japan Acad. 32(1956), 329-332
7. M. Takesaki, A note on the direct product of operator algebras,
8. J. Tomiyama, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Seminar Univ. of Copenhagen 1970.
9. ———, Tensor products and approximation problems of C^* -algebras, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 11(1975), 163-183

10. ———, Fubini algebras and the commutation theorem for tensor products of C^* -algebras, Symposia Math. 20 (1976), 27-37, Rome.
11. ———, On the Fubini product of von Neumann algebras, Bull. of Yamagata Univ. 9 (1976), 53-56
12. ———, Some aspects of commutation theorem for tensor products of operator algebras, Proc. on the Colloquium "Algebras of operators and their applications to mathematical physics" (1977) Marseille.
13. ———, C^* -環における近似問題, 教理解析研究所講究録 265, Approximation theory in functional Analysis", (1976), 76-88
14. L. Waelbroeck, Duality and the injective tensor products, Math. Ann. 163 (1966), 122-126
15. G. F. Vincent-Smith, The centre of the tensor product of $A(K)$ -spaces and C^* -algebras, Quart. J. Math. Oxford, 28 (1977), 87-91
16. S. Wassermann, Extensions of normal functionals on W^* -tensor products, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 301-307
17. ———, The slice map problem for C^* -algebras,

Proc. London Math. Soc. 32 (1976), 537-559

18. ———, On tensor products of certain group C^* -algebras, J. Functional Analysis, 23 (1976), 239-254
19. J. Andersen and J. Bunce, A Type II_∞ factor representation of the Calkin algebras, Amer. J. Math. 99 (1977), 515-521