

非線形波動から超伝導まで

放送大 戸田盛和

Morikazu Toda

§ 1. まえがき

ここで述べるのは、互いに相互作用をする二つ以上の非線形波動を考察しようとする議論である。物理学ではこのような問題が数多く存在する。超伝導現象もその一つであって、これは結晶あるいは低次元の電子系が格子振動あるいは電子-電子などの場と相互作用して生じるものと考えられる。この相互作用によって二つの電子間に引力が生じ、いわゆるクーパー電子対ができる。BCS理論はこれを格子振動との相互作用としていたが、別の可能性もあるにちがいない。より広く相互作用を考察しなければならない。電子間の引力といえば中性分子間の van der Waals 力もそうであって、これは電磁場を介しての電子間の相互作用、すなわち電磁場と電子との相互作用による引力である。van der Waals 力が F. London によって始めて説明されたことと、彼が始めて超伝導の巨視

的理論を提出したことの関連は興味深い。ヘリウム原子間の引力は数度Kの凝縮相を保つだけであるが、例えばアルゴンの van der Waals 力は約 90 K の液相を保つのに十分な引力である。このことは最近の 90 K 超伝導体の発見と比べて大変面白く思われる。van der Waals 力と超伝導現象との間に直接の関係はないにしろ、仲介する場があれば、一般に電子間に引力が生じるものがあることは強調したい事柄と思われた。その意味で波動理論として広く相互作用を扱うこと以上の非線形波動方程式系の研究を見直すのは意味があることと思われた。その結果、ソリトンのボース凝縮が超伝導現象にほかならぬとす魅力の万想像が毫害されればとも思う。

相互作用をもつ非線形系の問題は、もちろん今まで多くの研究者によって扱われていた。その例は後にいくつか触れることになる。以前は多くの場合、相互作用をもつ波動系を一つの非線形方程式にまとめる方向がとられた。しかし最近では高階非線形方程式系をまとめる論にも理論の発展もあり、相互作用をもつ系を扱う方法も変化してきているように思われる。これについても後に触れたい。一つの非線形波動方程式の可積分性を考えるだけでなく、相互作用をもつ方程式系の可積分性を考えることである。いずれにしてもここに述べたこと

の多くはすでに知られている事柄を少し見方を変えて提示するにすぎないかも知れないが、非線形波動理論の大きな発展をもたらした広い研究成果と相互作用の量子物理系の考察に役立っている上にこのような考察も可能なのではないかと思う。この試論の方向に、より系統的な包括的理論ができたことを期待したい。

超伝導現象の理論に有名な Ginzburg-Landau 方程式は秩序パラメータ ψ に対する巨視的な方程式であって

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} A \right)^2 \psi = 0 \quad (1.1)$$

と書ける。ここに α, β は温度による係数、 A は磁場のベクトルポテンシャル、 m^* と e^* は電荷のキャリア（電子対）の質量と電荷である。ミクロ的には、電子と相互作用する場合を介して電子間の極力的相互作用が非線形項 $\beta|\psi|^2\psi$ として取り入れられているわけである。高温超伝導体に対しても、この GL 方程式をいかにして導出するかというのが理論の一つの方向である。

ソリトン理論では GL 方程式よりも、これに似た非線形シュレディンガー方程式

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \kappa|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.2)$$

がよく研究されている。これも電子と他の場との相互作用を
含しこの電子間の相互作用が非線形項 $\propto |\psi|^2 \psi$ として取り入
れられていると見ることもできる。別の例としてプラズマのイオ
ン・電子系を挙げよう。Washimi-Taniuti により方程式を無
次元化するとイオン流体の密度 n , その速度 u に対し

$$n_t + (nu)_x = 0 \quad (\text{連続の式})$$

$$u_t + uu_x = E \quad (\text{運動方程式})$$

$$(n_e)_x = -n_e E \quad (\text{圧力勾配と電場の力の釣り合い})$$

$$E_x = n - n_e \quad (\text{ポアソン方程式}) \quad (1.3)$$

を得る¹⁾。ここで n_e は電子密度, E はこれによる電場であり,
電子の質量は小さいとしてその慣性項を無視した。 n と E を
消去すると方程式系

$$\left. \begin{aligned} u_t + uu_x + \frac{1}{n_e} (n_e)_x &= 0 \\ (n_e)_t + (n_e u)_x - P_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

ただし $P = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right)$

を得る。ここで $\xi = \epsilon^{1/2}(x-t)$, $\eta = \epsilon^{3/2}x$ とおき,
透減摂動法により, 展開

$$\left. \begin{aligned} u &= \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots \\ n_e &= 1 + \epsilon n_e^{(1)} + \epsilon^2 n_e^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

を代入すると、

$$u''' = n_e''' \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_\eta''' + u'' u_\xi''' + u_{\xi\xi\xi}''' &= 0 \\ (n_e''')_\eta + n_e'' (n_e''')_\xi + (n_e''')_{\xi\xi\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

を得る。イオン流体の速度 u と電子密度 n_e とは同じ KdV 方程式にしたがうことがわかる。しかも $u''' = n_e'''$ であるからこれらは同じ位相で運動する。この場合にも、非線形項 $u'' u_\xi'''$ はイオンが電子を介して自分自身に影響する相互作用を意味し、 $n_e'' (n_e''')_\xi$ も同様の影響を表している。なおこの系では n_e'' , $-\int E'' dx$ も同位相で同じ KdV 方程式にしたがう。

§ 2. 二つの格子と Bäcklund 変換

相互作用を有する二つの場の一審簡単事例として線形方程式系

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= - \frac{\partial E}{\partial x} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= - \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.1)$$

を挙げよう。これは y 方向の磁場 B と z 方向の電場 E の相互作用を表す。同様の式は流体の速度と圧力の関係など、

極めて多くの問題に現れ、これら二つの場の相互作用を記述するものともみることができ、(1.4)もその一例である。

(2.1)の E と B に相当する不連続な場 u_n と v_n ($n=1, 2, \dots$) を考え、(2.1)を非線形にした方程式の最も簡単なものとして Kac と Moerbeke の方程式²⁾

$$\begin{aligned}\frac{d u_n}{d t} &= \frac{1}{A} (e^{v_{n-1}} - e^{v_n}) \\ \frac{d v_n}{d t} &= A (e^{u_n} - e^{u_{n+1}})\end{aligned}\quad (2.2)$$

がある (A は定数)。この方程式の持解として、相互作用による 2-波が他方を引きずる (あるいは押しこける) ものとして $\beta \neq 0$ とする。

$$\begin{aligned}e^{u_n} &= \cosh \kappa - \sinh \kappa \cdot \tanh(\kappa n + \beta t) \\ e^{v_n} &= \cosh \kappa + \sinh \kappa \cdot \tanh(\kappa n + \beta t)\end{aligned}\quad (2.3)$$

($\beta = \sinh \kappa$) がある。

さらに

$$\begin{aligned}-(u_n + v_n) &= q_{n+1} - q_n \\ -(v_n + u_{n+1}) &= q_{n+1} - q_n\end{aligned}\quad (2.4)$$

とあれば (2.2) は

$$\begin{aligned}\frac{d q_n}{d t} &= A e^{q_n - q_n} + \frac{1}{A} e^{q_{n-1} - q_n} + c \\ \frac{d q_n}{d t} &= A e^{q_n - q_n} + \frac{1}{A} e^{q_n - q_{n+1}} + c\end{aligned}\quad (2.5)$$

となり、これは二つの場 Q_n と q_n の相互作用を表す方程式とみなせる。ここで c は無限遠における条件に定まる定数である。

(2.5) は二つの指数格子

$$d^2 Q_n / dt^2 = e^{Q_{n-1} - Q_n} - e^{Q_n - Q_{n+1}}$$

$$d^2 q_n / dt^2 = e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} \quad (2.6)$$

の間で Bäcklund 変換がある。このように、Bäcklund 変換は相互作用を1つ1つを記述する方程式とみることができるとある。

なお Bäcklund 変換 (2.5) は相互作用を1つ1つを振動子系として記述することが出来る。座標 f_n と運動量 g_n をもつ振動子

$$\begin{aligned} df_n / dt &= c_n^{-1} g_n - \frac{c}{2} f_n \\ dg_n / dt &= -c_{n-1} f_n + \frac{c}{2} g_n \end{aligned} \quad (2.7)$$

の間に条件

$$g_{n+1} = c_n f_n \quad (2.8)$$

をもち、

$$c_n = g_{n+1} / f_n = e^{Q_n}, \quad g_n / f_n = e^{q_n} \quad (2.9)$$

と書くと (2.7), (2.8) から

$$\begin{aligned} dQ_n / dt &= -e^{Q_n - q_n} - e^{q_{n-1} - Q_n} + c \\ dq_n / dt &= -e^{Q_n - q_n} - e^{q_n - Q_{n+1}} + c \end{aligned} \quad (2.10)$$

を得る。これは (2.5) で $A = -1$ とおいた Bäcklund 変換である。したがって (2.7), (2.8) は相互作用をしない場 (2.9) を表している。 Q_n, g_n はそれらの指数格子の運動方程式にしたがう。

さらに (2.8), (2.7) を用いて dg_{n+1}/dt を作ると

$$c_n^{-1} \dot{c}_n = \dot{Q}_n = P_n \quad (2.11)$$

($\dot{} = d/dt$) と書いて

$$f_{n+1} = (P_n + \lambda) f_n + c_n^{-1} g_n \quad (2.12)$$

を得る。これから次のように指数格子の運動方程式は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_n + \lambda & c_n^{-1} \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\lambda/2 & c_n^{-1} \\ -c_{n-1} & \lambda/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

と書くこともできる。³⁾

また

$$x_n = e^{Q_n}, \quad y_n = e^{g_n} \quad (2.14)$$

とおくと, (2.5) は次の場 x_n, y_n の相互作用を表す式

$$\begin{aligned} dx_n/dt &= (c + y_n^{-1} x_n + y_{n-1} x_n^{-1}) x_n \\ dy_n/dt &= (c + x_{n+1}^{-1} y_n + x_n y_n^{-1}) y_n \end{aligned} \quad (2.15)$$

を与えた。

§3. 同じ717°に属する二つの場

相互作用をする二つの場 u と φ が

$$u_t + (u^2)_x + u_{xxx} = 0$$

$$\varphi_t + (\varphi^2)_x + \varphi_{xxx} = -2(u\varphi)_x \quad (3.1)$$

で与えられるとしよう。式(1)は u に対する KdV 方程式、式(2)はこの u の場をある種の外力とする KdV 方程式である。

ここで

$$\varphi = v - u \quad (3.2)$$

とおくと v は KdV 方程式

$$v_t + (v^2)_x + v_{xxx} = 0 \quad (3.3)$$

を満たす。したがって φ は自由振動に相当する v と、 u による強制振動とみなせられたと初めから与えられたことがわかる。

同様に

$$u_t + 2(u^2)_x + u_{xxx} = (\varphi^2)_x$$

$$\varphi_t + 3(\varphi^2)_x + \varphi_{xxx} = -4(u\varphi)_x \quad (3.4)$$

は二つの場 u と φ の相互作用を表すが、

$$v = 2u + \varphi$$

$$w = 2(u + \varphi) \quad (3.5)$$

とあくと v と w は同じ KdV 方程式

$$v_t + (v^2)_x + v_{xxx} = 0$$

$$w_t + (w^2)_x + w_{xxx} = 0 \quad (3.6)$$

を満たす。この式の解を用いて u, φ は

$$u = 2v - w$$

$$\varphi = w - u \quad (3.7)$$

で与えられることに注意。

同様に u は相互作用を有する Boussinesq 方程式

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx}$$

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} + (\varphi^2)_{xx} + \varphi_{xxxx} + 2(u\varphi)_{xx} \quad (3.8)$$

あるいは

$$u_{tt} = u_{xx} + 2(u^2)_{xx} + u_{xxxx} - (\varphi^2)_{xx}$$

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} + 3(\varphi^2)_{xx} + \varphi_{xxxx} + 4(u\varphi)_{xx} \quad (3.9)$$

などについていえる。

より一般的には、 L を線形の微分演算子とすると

$$L u + \frac{\partial^n}{\partial x^n} (A u^2 + B \varphi^2 + 2 C u \varphi) = 0$$

$$L \varphi + \frac{\partial^n}{\partial x^n} (D u^2 + E \varphi^2 + 2 F u \varphi) = 0 \quad (3.10)$$

は、係数 A, B, C, D, E, F がある条件を満たす定数であれば分離され

$$L v + \alpha \frac{\partial^n}{\partial x^n} v^2 = 0$$

$$L w + \beta \frac{\partial^n}{\partial x^n} w^2 = 0 \quad (3.11)$$

に帰することが示される。 u, φ は v と w の線形結合と見做されるわけである。

これは同じ型の非線形系に帰せられる場合で、いわば縮退した二つの場の相互作用があるといえるだろう。

これに対し、縮退していない二つの場、いわば、異なる型の非線形系の相互作用が考えられる。これを次に考察しよう。

§4. 同じヒエラルヒ-の二つの場

相互作用を有する二つの場 u, v とし

$$u_t - u_{xx} = 2v_x$$

$$v_t + v_{xx} = 2u_x - 2u u_x - \frac{2}{3} u_{xxx} \quad (4.1)$$

を考へよう。これは複雑に見えるが、 v を消去すると Boussinesq 方程式

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 4(uu_x)_x + \frac{1}{3}u_{xxxx} \quad (4.2)$$

を得る。この解を用いれば、 v は直ちに得られ、(4.1) は解けたことになる。

Boussinesq 方程式は高階 KP 方程式系に属する。実は (4.1) は KP ヒエラルヒー - の 3-reduction の方程式系であり、この枠内で解かれたのである。前節 §3 で扱った同形の方程式の間の相互作用に對し、ここでは同じ KP 系の方程式' による相互作用をもつ二つの系が解かれた。

高階 KP 系の 4-reduction による相互作用系の扱いは、薩摩・広田によって示された⁴⁾。4-reduction の KP 系は

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + 3(-\phi^2 + \omega)_x \\ \phi_t = -\frac{1}{2}\phi_{xxx} - 3u\phi_x \\ \omega_t = -\frac{1}{2}\omega_{xxx} - 3u\omega_x \\ u_y = 2\phi_{xx} \\ \phi_y = -2\phi^2 + 2\omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

と書ける。そして解は $f(x, y, t)$ を用いて

$$\begin{aligned} u &= (\log f)_{xx} \\ \phi &= f_y/2f \\ \omega &= f_{yy}/4f \end{aligned} \quad (4.4)$$

によって与えられる。多リリトン解では $\gamma = 0$ とおくと $\omega = 0$ になるので、相互作用を無視する二つの場 u, ϕ に対する式

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{4}(u_{xxx} + 3u u_x) + 3(\phi^2)_x &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}\phi_{xxx} + 3u\phi_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

の多リリトン解が得られる。

さらに高階の KP 系を考察することにより、相互作用を無視する二つ、あるいは二つ以上の場の可積分系を研究することが出来るであろう。

文献

- 1) H. Washimi and T. Taniuti: *Phys. Rev. Lett.* 17 (1966) 996.
- 2) M. Kac and P. van Moerbeke: *Adv. in Math.* 16 (1975) 160.
- 3) cf. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan: "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons" (Springer-Verlag 1987) p. 294.
- 4) J. Satsuma and R. Hirota: *J. Phys. Soc. Jpn.* 51 (1982) 3390.