

2 次形式の速度分布函数に対する

LILOUVILLE 方程式の解

京大 理 清 水 理

§ 1 2 次形式の速度分布函数に対する Liouville 方程式の解は, Eddington (1915), Jeans (1915) 以来 Schwarzschild (1936), Chandrasekhar (1940, 1941) などにより求められており, 恒星系力学の問題に適用されている。このことは, 恒星系内の恒星の速度は Maxwellian 型で近似できると考えられるので, 最初はこの速度成分の自乗和のみという簡単なものから最後には最も一般的な速度の 2 次形式の速度分布まで調べられた。そして, 時間も含む非定常の場合は Chandrasekhar によって始めて取扱われた。しかし, これまでの結果は, いかなる恒星系がある簡単な対称性を保持するとの条件の下でえられたものである。

この研究の目的は, 恒星系が対称性を保持するとの条件をはずせばどうなるかを吟味することにある。渦状星雲などを含むいろいろな恒星系についての情報が, これによってある程度えられるのではないかと予想からである。この論文

なを仮定してあるが、以下にその正しい予報的結果を示す。

② 恒星系の重心を原点とする球面座標系をとった場合を考える。ある点 (r, θ, φ) における r 、 θ 、 φ 方向の線速度成分をそれぞれ U, Θ, Φ としたとき、恒星系内におけるそのらの速度分布は次の函数形で与えられるものと仮定する。

$$(1) \quad F = F(r) \quad F \equiv h(r - r_0) + k(\theta - \theta_0) + l(\Phi - \Phi_0) + 2m(\theta - \theta_0)(\Phi - \Phi_0) \\ + 2p(r - r_0)(\theta - \theta_0) + 2q(r - r_0)(\Phi - \Phi_0).$$

但し、 $h, k, l, m, p, q; r_0, \theta_0, \Phi_0$ は座標 r, θ, φ および時間 t の函数である。

球面座標系に対する Liouville 方程式を言わば

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial r} + \Theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \Phi \frac{\partial F}{\partial \Phi} + \left(\frac{\Theta^2 + \Phi^2}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ + \left(-\frac{U\Theta}{r} + \frac{\Phi}{r} \cot \theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial \Phi} + \left(-\frac{U\Phi}{r} - \frac{\Theta}{r} \cot \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

となる。但し、 ϕ_0 はポテンシャル函数である。

問題は、 F が (2) を満たすように $h, k, \dots$ を r, θ, φ, t で表わす、ということになる。

まず、(1) を (2) に代入すると、 U, Θ, Φ に関する最高次が 3 次の 20 項からなる多項式がえられる。そこで、それぞれの係数を零とおけば、 $h, k, \dots, \phi_0$ についての 20 組の 1 次偏微分方程式が導かれ、これらから $h, k, \dots, \phi_0$ が求まるはずである。しかし、実際にやるとなるとかなり面倒である。

§ 3 変換結果を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 l_1 &= H - h_{2\varphi}(1 - \cos 2\theta) + h_{1\varphi} \sin 2\theta \\
 l_2 &= \{H - h_{2\varphi}(1 + \cos 2\theta) - h_{1\varphi} \sin 2\theta\} + r(b_{2\varphi} \cos \theta - 2b_{1\varphi} \sin \theta) + r^2(\kappa + l_{22\varphi}) \\
 l &= (H - 4h_{20} + 2h_{24}) + r\{(2b_{20} - b_{2\varphi}) \cos \theta - 2(b_{1\varphi} + c_{\varphi}') \sin \theta\} \\
 &\quad + r^2\{(\kappa + l_{20}) - \frac{1}{2} l_{2\varphi}(1 + \cos 2\theta) + l_{1\varphi} \sin 2\theta\} \\
 (3) \quad 2m &= (-2h_{1\varphi}' \cos \theta - 2h_{1\varphi}' \sin \theta) + r\{(c_{20} + \frac{1}{2} b_{2\varphi}') + (c_{20} + \frac{1}{2} b_{2\varphi}') \cos 2\theta - c_{10} \sin 2\theta\} \\
 &\quad + r^2(l_{2\varphi}' \cos \theta + 2l_{2\varphi}' \sin \theta) \\
 2p &= (2h_{1\varphi}' \cos 2\theta - 2h_{2\varphi}' \sin 2\theta) + r(2b_{1\varphi}' \cos \theta + b_{2\varphi}' \sin \theta) \\
 2q &= (2h_{1\varphi}' \cos \theta - 2h_{2\varphi}' \sin \theta) + r\{(-c_{\varphi}' + 2b_{\varphi}') + c_{\varphi}' \cos 2\theta + (c_{20} + \frac{1}{2} b_{2\varphi}') \sin 2\theta\}
 \end{aligned}$$

但し, $\frac{\partial a}{\partial \varphi} \equiv a'$, $\exists t$

$$\begin{cases}
 h_{2\varphi} \equiv h_{20}(t) + h_{21}(t) \cos 2\varphi + h_{22}(t) \sin 2\varphi, & h_{1\varphi} \equiv h_{11}(t) \cos \varphi + h_{12}(t) \sin \varphi \\
 b_{2\varphi} \equiv b_{20}(t) + b_{21}(t) \cos 2\varphi + b_{22}(t) \sin 2\varphi, & b_{1\varphi} \equiv b_{11}(t) \cos \varphi + b_{12}(t) \sin \varphi \\
 H \equiv H(t), \quad \kappa \equiv \kappa(t), \quad c_{20} \equiv c_{20}(t) & c_{\varphi} \equiv c_{11}(t) \cos \varphi + c_{12}(t) \sin \varphi \\
 l_{2\varphi} \equiv l_{20}(t) + l_{21}(t) \cos 2\varphi + l_{22}(t) \sin 2\varphi, & l_{1\varphi} \equiv l_{11}(t) \cos \varphi + l_{12}(t) \sin \varphi
 \end{cases}$$

$\mathcal{D}_0, \mathcal{Q}_0, \mathcal{E}_0$ は個別には 0 のみならず

$$(4) \quad \Delta_1 \equiv h\mathcal{D}_0 + p\mathcal{Q}_0 + q\mathcal{E}_0, \quad \Delta_2 \equiv p\mathcal{D}_0 + l\mathcal{Q}_0 + m\mathcal{E}_0, \quad \Delta_3 \equiv q\mathcal{D}_0 + m\mathcal{Q}_0 + l\mathcal{E}_0$$

とあり, $\therefore$ は次のように表わされる。

$$(5) \quad \begin{cases}
 2\Delta_1 = (a_0 \cos \theta + a_{\varphi} \sin \theta) + r\{H - h_{2\varphi}(1 - \cos 2\theta) + h_{1\varphi} \sin 2\theta\} \\
 2\Delta_2 = (-a_0 \sin \theta + a_{\varphi} \cos \theta) + r\{d_{\varphi}' - h_{2\varphi}' \sin 2\theta + h_{1\varphi}' \cos 2\theta\} + r^2(b_{2\varphi}' \sin \theta + 2b_{1\varphi}' \cos \theta) \\
 2\Delta_3 = a_{\varphi}' + r\{(h_{1\varphi}' - d_{\varphi}') \cos \theta + (l_{1\varphi}' - h_{2\varphi}') \sin \theta\} + r^2\{2b_{\varphi}' - c_{\varphi}'(1 - \cos 2\theta) + (c_{20} + \frac{1}{2} b_{2\varphi}') \sin 2\theta\}
 \end{cases}$$

但し, $\frac{\partial a}{\partial t} \equiv \dot{a}$, $\exists t$

$$a_\varphi \equiv a_{11}(t)\cos\varphi + a_{12}(t)\sin\varphi, \quad a_0 \equiv a_0(t); \quad d_\varphi \equiv d_{11}(t)\cos\varphi + d_{12}(t)\sin\varphi, \quad d_0 \equiv d_0(t)$$

物理的には、 $r=0$ で $\bar{U}_0 = \bar{\Omega}_0 = \bar{\Phi}_0 = 0$ と考えるべしであるから
(4)において a_0, a_φ は零とみなす。ポテンシャル函数 ϕ_0 につい
ては、 $\bar{U}_0 \Delta_1 + \bar{\Omega}_0 \Delta_2 + \bar{\Phi}_0 \Delta_3 = X$ とおくと、

$$(6) \quad \begin{cases} 4 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \phi_0}{r \partial r} + 4 \frac{\partial^2 \phi_0}{r^2 \partial \varphi^2} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial r} \\ 4 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + 12 \frac{\partial \phi_0}{r \partial r} + 12 \frac{\partial^2 \phi_0}{r^2 \partial \varphi^2} = \frac{\partial \Delta_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial X}{r \partial \varphi} \\ 4 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + 12 \frac{\partial \phi_0}{r \partial r} + 12 \frac{\partial^2 \phi_0}{r^2 \partial \varphi^2} = \frac{\partial \Delta_3}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial X}{r \sin \theta \partial \varphi} \\ \Delta_1 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \Delta_2 \frac{\partial \phi_0}{r \partial r} + \Delta_3 \frac{\partial^2 \phi_0}{r \sin \theta \partial \varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial t} \end{cases}$$

から求められる。 ϕ_0 がわかると、Poissonの方程式から恒星系
の密度 $\rho(r, \theta, \varphi; t)$ が導かれる。すなわち、

$$(7) \quad -4\pi G \rho = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_0}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial \phi_0}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi_0}{r^2 \sin^2 \theta \partial \varphi^2} \quad (G: \text{万有引力定数})$$

§ 4 (1)式の F が $\mathbb{R}$ のどんな函数形であるかが不明であっ
ても、恒星系のポテンシャル函数 ϕ_0 、したがって恒星系の密
度分布 $\rho(r, \theta, \varphi; t)$ が求まるのは、各点における速度成分の
平均値にあたる $\bar{U}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\Phi}_0$ が悉く零と成らない場合であること
は、(4)式と X の表現式を参照して (6) を見れば明らかである。
この場合には、恒星系のポテンシャル・エネルギーは求まる
が、運動エネルギーの方は F の函数形をたえなないとわからな
い。

F の函数形として、一般に e^{-2} が採用されているが、

が当たってみた2,3の例については、このようにすると恒星系の全質量は無限大になってしまう。これは、無限大の速度をもつ恒星の衝突が絶えないことに対応するとも考えられる。球対称の恒星系については、脱殻速度以上の速度を truncateした場合にもこのことが起りうるから、有限質量の恒星系については、いわゆる Maxwellian 型の速度分布が適当であろうである。そこで考えられるのは、 F を $\mathbb{R}$ の多項式と近似することである。勿論、この場合脱殻速度以上の速度を truncate しなければならぬ。原理的には、既知の ρ から

$$(8) \quad \rho = \int_{|\mathbf{v}|=0}^{|\mathbf{v}|=\sqrt{2GM/R}} F(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \nabla(\rho, \phi, \psi)$$

を解けば $F(\mathbf{v})$ が求まるわけであるが、実際にこの積分方程式から $F(\mathbf{v})$ の具体的な形を定めることは殆んど不可能である。

しかし、 $r \rightarrow 0$ のとき $\rho_0 \rightarrow \rho_{00} + \rho_{02}r^2 + \rho_{03}r^3 + \dots$ 、また $r \rightarrow \infty$ のとき

$\rho_0 \rightarrow \frac{\rho_{01}}{r} - \frac{\rho_{02}'}{r^2} + \dots$ となるはずであるから、(7) から

$$(9) \quad \begin{cases} r \rightarrow 0 \text{ のとき} & \rho \rightarrow 6\rho_{02} + 12\rho_{03}r + \dots \\ r \simeq R \text{ のとき} & \rho \rightarrow -6\rho_{02}/r^4 \dots \end{cases} \quad (R: \text{恒星系の半径})$$

となる。これを考慮に入れて $F = \sum_{i=1}^{k_2} \alpha_i P^i$ における α_1, α_2 および α_i を trial and error で近似することが可能である。

§5 さて、以上の結果が観測されている恒星系に適用できるかどうかを見るには、いろいろな場合について近似的な

具体的に表現式を求めなければならぬ。その手始めとして、
 ここではまず円板に近い恒星系について考察する。

今までに挙げた諸式において、 $\theta = 90^\circ$ とおき 2次元に reduce
 した後、(3)および(4)の記号を次のように書き改める。

$$(10) \begin{cases} (H - 2h_{20}) \longrightarrow H(t), & (b_\varphi + C_\varphi) \longrightarrow b_\varphi \equiv b_1(t)\cos\varphi + b_2(t)\sin\varphi, \\ (K + h_{20}) \longrightarrow K: \text{const.}, & (h_{2\varphi} - h_{20}) \longrightarrow h_{2\varphi} \equiv h_1(t)\cos 2\varphi + h_2(t)\sin 2\varphi \\ \text{ただし,} & \frac{\partial a}{\partial \varphi} \equiv a', \quad \frac{\partial a}{\partial t} \equiv \dot{a}; \quad 0 \leq \frac{K\gamma^2}{H + K\gamma^2} \equiv \gamma \leq 1. \end{cases}$$

そうすれば、(3)および(5)は

$$(3) \begin{cases} h = H(1 - \frac{2h_{2\varphi}}{H}), \\ l = H(\frac{1}{1-\gamma} + 2\frac{h_{2\varphi} - \gamma b_\varphi}{H}), \\ q = H(\frac{-h_{2\varphi} + \gamma b_\varphi}{H}). \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \Delta_1 = \frac{1-\gamma}{2}(\frac{\dot{H}}{H} - 2\frac{\dot{h}_{2\varphi}}{H}) \\ \Delta_2 = \frac{1-\gamma}{2}(1 + \frac{-\dot{h}_{2\varphi} + 2\gamma\dot{b}_\varphi}{H}) \end{cases}$$

の如く簡潔になる。

よって、(4)から Ω_0 と Φ_0 、(6)の $\star 1$ と $\star 3$ 式から $\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}$ と $\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}$ が
 求まる。reduce された(6)の $\star 4$ 式は、二うして導かれたポテ
 ンシャル函数への付加条件とはならず、identically に成立つ
 ことが証明できる。かくて、reduce された(7)式から密度 ρ が
 えられる。ただし、(7)式を形式的に reduce すれば、 $\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}$ の係数
 は 2 となるが、 $\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \gamma^2}$ の reduction からの影響で、1 に変わるの
 で円柱座標系の $\Delta \Omega$ からの reduction と一致する。

§ 6 前節の如き簡易な場合でも厳密な運動方程式は、
 それ故、まず $\dot{\ell}_{2\varphi}$, $\dot{r}b_{\varphi}$ に関する線型近似の場合について考察
 してみる。途中の面倒な演算は省略して、平均速度の成分に
 あたる $\bar{U}_0$ と $\bar{\Phi}_0$ および重力の成分 $-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ と $-\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ を示すと、

$$(1) \begin{cases} \bar{U}_0 = \frac{1}{2H} \left\{ \frac{\dot{H}}{\Sigma} - 2 \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{\Sigma} + (1-\gamma) \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} + 2 \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{H} \right\}, \\ \bar{\Phi}_0 = \frac{(1-\gamma)1}{2H} \left\{ 1 - \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - 2\gamma b_{\varphi}}{\Sigma} - 2(1-\gamma) \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} + \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} \right\}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2H} \left\{ \frac{\ddot{H}}{\Sigma} - 2 \frac{\ddot{\ell}_{2\varphi}}{\Sigma} + 2 \frac{\ddot{\ell}_{2\varphi}}{\Sigma} \frac{\dot{H}}{H} + (1-\gamma) \frac{\ddot{\ell}_{2\varphi} - \gamma \ddot{b}_{\varphi}}{H} \right\} - \frac{1}{4H^2} (1-\gamma)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \frac{\dot{H}^2}{\Sigma^2} - \frac{4}{(1-\gamma)^2} \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{H} \right. \\ \quad \left. - 2 \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{\Sigma} + 2(3 + \frac{\gamma}{1-\gamma}) \frac{\gamma b_{\varphi}}{\Sigma} + 4(\gamma + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \frac{\dot{H}^2}{\Sigma^2}) \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{H} + 2 \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{H} + (3-4\gamma) \frac{\gamma b_{\varphi}}{H} - (3 + \frac{\gamma}{1-\gamma}) \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\gamma b_{\varphi}}{H} \right\}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{(1-\gamma)1}{2H} \left\{ 1 - \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - 2\gamma b_{\varphi}}{\Sigma} - 2(1-\gamma) \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} + \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} \right\} - \frac{1}{4H^2} (1-\gamma)^2 \left\{ \frac{4\dot{\ell}_{2\varphi} - 2\gamma b_{\varphi}}{\Sigma} - \frac{2}{1-\gamma} \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{\dot{\ell}_{2\varphi}}{H} \right. \\ \quad \left. - \frac{\dot{H}}{\Sigma} \frac{4\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \left(\frac{\dot{H}}{\Sigma} \right)^2 \frac{2\dot{\ell}_{2\varphi} - \gamma b_{\varphi}}{H} \right\} \end{cases}$$

上の (2) 式から $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ の identity が成立つ条件を求めると、 $\cos \varphi$
 および $\sin \varphi$ の係数から、

$$(3) \begin{cases} \dot{b}_1 - \frac{\dot{H}}{2H} b_1 + \frac{1}{2H} b_2 = 0, & \begin{cases} \ddot{b}_2 - \frac{\ddot{H}}{2H} b_2 + \frac{\dot{H}^2}{4H^2} b_2 - \frac{1}{2H} \dot{b}_1 + \frac{1}{4H^2} \dot{b}_1 b_1 = 0, \\ \ddot{b}_2 - \frac{\ddot{H}}{2H} b_2 - \frac{1}{2H} b_1 = 0, \end{cases} \\ \dot{b}_2 - \frac{\dot{H}}{2H} b_2 - \frac{1}{2H} b_1 = 0, & \begin{cases} \ddot{b}_1 - \frac{\ddot{H}}{2H} b_1 + \frac{\dot{H}^2}{4H^2} b_1 + \frac{1}{2H} \dot{b}_2 - \frac{1}{4H^2} \dot{b}_2 b_2 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

また、 $\cos 2\varphi$ および $\sin 2\varphi$ の係数からは

$$(4) \begin{cases} \dot{h}_1 - \frac{\dot{H}}{H} h_1 + \frac{1}{2H} h_2 = 0, & \begin{cases} \ddot{h}_2 - \frac{\ddot{H}}{H} h_2 - \frac{\dot{H}}{H} \dot{h}_2 + \frac{\dot{H}^2}{H^2} h_2 = 0, \\ \ddot{h}_2 - \frac{\ddot{H}}{H} h_2 - \frac{1}{2H} h_1 = 0, \end{cases} \\ \dot{h}_2 - \frac{\dot{H}}{H} h_2 - \frac{1}{2H} h_1 = 0, & \begin{cases} \ddot{h}_1 - \frac{\ddot{H}}{H} h_1 - \frac{\dot{H}}{H} \dot{h}_1 + \frac{\dot{H}^2}{H^2} h_1 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

さらに三角関数を含む項から、 $\Sigma = 0$ or $\Sigma = \text{const.}$ が出る。

(3) の右側は左の左側から誘導できるから、右側だけを考え
 ればよい。 $b_1 = b(t) \sin \alpha(t)$, $b_2 = b(t) \cos \alpha(t)$ とおき (3) に代入すると、

$$(5) \quad b = b_0 \sqrt{\frac{H(t)}{H_0}}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{1}{2H(t)}, \quad b_0, H_0, \Sigma = \text{const.}$$

とえる。

また, (14) の右側に, $h_1 = h(t) \sin \vartheta_2(t)$, $h_2 = h(t) \cos \vartheta_2(t)$ を代入すれば同様に

$$(16) \quad h_1 = h_0 \frac{H(t)}{H_0}, \quad \dot{\vartheta}_2 = -\frac{L}{2H(t)}, \quad h_0: \text{const.}$$

とえるが, これらを (14) の右側に代入すると, $\frac{L^2}{4H^2} h = 0$ すなわち, $L=0$ または $h=0$ となる。よって, 線型近似では $L=0$, すなわち (11) の運動速度重が擾動項しか含まぬならば, $h = h_0 \frac{H(t)}{H_0}$, $\vartheta_2: \text{const.}$ であるが, $L: \text{const.} \neq 0$ の場合には h_{2q} の擾動は消えるはずである。しかし, 予備的な 2 次型式近似の計算結果では, (13) が不変であるのは勿論として, (14) の各式の右辺は予想のように零ではなく b_q と b_q の積を含む項となる。ここでは簡単のため $L: \text{const.} \neq 0$ の場合にも (16) が成立つことを仮定しよう。(近似を高めていっても以下の結果の大筋は変わらないから)

さて, (12) から $\frac{\partial^2 b}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 b}{\partial \varphi^2}$ を導き, (15), (16) を考慮して Poisson の式を作れば, b_1, b_2 また h_1, h_2 の係数はそれぞれ相等しくなり,

$$(17) \quad 4\pi G \rho = -\frac{H}{H} + \frac{H^2}{2H^2} + \frac{L^2}{2H^2} (1-Y)^2 (1-2Y) + \frac{L^2 Y (1-Y)^2}{4H^2} [1-8(1-Y)+24(1-Y)^2] b_q \\ + \frac{L^2 Y}{2H^2} [12(1-Y)^2-1] h_{2q}, \quad b_q = b \sin(\varphi + \vartheta_1), \quad h_{2q} = h \sin(2\varphi + \vartheta_2)$$

が得られる。上式において, 1 次および 2 次の harmonics で表わされている擾動項を除くと, 円対称の円盤恒星系の密度分布を示す式と一致し, 特にそれが定常状態にあればその限界半径 R は $(1-2Y)=0$ より $R = \frac{L}{H}$ で与えられる。

3. 物理近似の範囲では $H(t)$ の函数形は定まるから、
2, 3 の単純な函数形を仮定し、前節の結果についての物理的
な意味について簡単に觸れておこう。(15) と (16) において、

(i) $H = H_0 = \text{const.}$ の場合

$$b = b_0, \quad h = h_0; \quad \gamma_1 - \gamma_{10} = \gamma_2 - \gamma_{20} = -\omega_a t$$

$$(b_0, h_0, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \omega_a \equiv \frac{1}{2H_0} : \text{const.})$$

(ii) $H = H_0(1 + \alpha e^{\lambda t}); \quad 0 < \alpha < 1, \lambda : \text{const.}$ の場合

$$b = b_0 \sqrt{1 + \alpha e^{\lambda t}}, \quad h = h_0 (1 + \alpha e^{\lambda t});$$

$$\gamma_1 - \gamma_{10} = \gamma_2 - \gamma_{20} = -\omega_a t + \frac{\omega_a}{\lambda} \log(1 + \alpha e^{\lambda t})$$

(iii) $H = H_0(1 + \alpha \sin \lambda t); \quad 0 < \alpha < 1, \lambda : \text{const.}$ の場合

$$b = b_0 \sqrt{1 + \alpha \sin \lambda t}, \quad h = h_0 (1 + \alpha \sin \lambda t);$$

$$\gamma_1 - \gamma_{10} = \gamma_2 - \gamma_{20} = -\frac{3\omega_a}{\lambda \sqrt{1 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\frac{\lambda t}{2}) + \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right),$$

$$\text{特に, } 0 < \alpha \ll 1 \text{ なら } \gamma_1 - \gamma_{10} = \gamma_2 - \gamma_{20} \approx -\omega_a t + \frac{\alpha}{\lambda} \omega_a \cos \lambda t.$$

となる。Local centroid の中心の周りの角速度 ω は $\omega = \frac{1}{V} \int \Phi F(\mathbf{r}) dV$

で表わされるから、 Φ の平均値が Φ_0 とみれば ($\Phi_0 = \int \Phi F(\mathbf{r}) dV$ と

なるように $F(\mathbf{r})$ を定めることは可能), $\omega = \frac{\Phi_0}{V} \equiv \frac{1}{2H}(1 - \gamma)$ と書けま

た $\varphi \equiv \omega t + \varphi_0$ とおくことができる。簡単のため、 $\varphi_0 = 0$ とすれば

前節の (17) における $b \varphi$ および $h_2 \varphi$ における $\sin \pi$ の arguments

は、 ωt と上表の γ との和で表わされる。

したがって、 γ を一定にしたとき φ = 一定の部分では、例えば

上表の (i) の場合には、角速度が $b \varphi$ につき $\omega - \omega_a \equiv -\frac{1}{2H_0} \gamma = -\frac{1}{2H_0} \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma^2)}$

また h_{2q} につき $\omega - \frac{\omega_a}{2} = \frac{\lambda}{4H_0}(1-2Y) = \frac{\lambda(H+Y^2)}{4H_0(H+Y^2)}$ をもって進行する。可なり、 b_q については中心 ($Y=0$) では $\omega - \omega_a = 0$ 、限界半径 R のところでは $\omega - \omega_a = -\frac{\omega_a}{4}$ となって leading arm ができ、 h_{2q} については $Y=0$ では $\omega - \frac{\omega_a}{2} = \frac{\omega_a}{4}$ また $Y=R$ では $\omega - \frac{\omega_a}{2} = 0$ となって trailing arm ができる。(iii) の場合には ρ や角速度が週期変で振動するが、平均的には (i) の場合と同じことがいえる。また (iii) の場合には、 $\lambda > 0$ なら角速度は時間とともに (i) の場合よりも増していく、 $\lambda < 0$ なら減っていくことになる。

さて、 $t=0$ のとき擾動による密度変化 $\delta\rho$ の極大が棒状の腕となり、 $b_0 \neq 0$ なら $\varphi = 90^\circ - \delta_{10}$ の方向の半径に沿い、また $h_{10} \neq 0$ なら $\varphi = \frac{1}{2}(90^\circ - \delta_{20})$ 方向とその反方向に延びた直径に沿って現われることは前表のいずれの場合にも可能である。そして、この腕の pattern は時が経つにつれて恒星系の微分回転によって曲げられていき、次第に巻き数の多い渦状の腕に変化していく。その渦状が leading となるか trailing となるかは上述のように入擾動の起り方によるが、2本の arms については多くの場合 trailing であろう。なお、前表 (ii) の場合に $\lambda t_1 > 0$ が十分大きく $\log(1 + \alpha e^{\lambda t_1}) \doteq \log \alpha + \lambda t_1$ とすれば $\delta_1 - \delta_{10} = \delta_2 - \delta_{20} \doteq 0$ となるから、初期に渦状構造が作られていても、この時間 t_1 に至るまでに渦状構造は微分回転により崩壊されていることである。

以上の二つと渦状恒星系の力学的モデルでは, Lindblad

のいふゆるぎ度法の誤差と、これを補正して、ゆるぎ度法より得た渦状・渦状の腕ができることになる。直径に跨る r_{24} の棒状の腕が中心と周縁との間で2本のそれぞれ腕を1巻きするに要する時間は $\frac{8\pi}{\omega_a}$ である。この年数を銀河系の太陽付近における観測値 ($\bar{\omega}_0 \sim 250 \text{ pc}/10^6 \text{ yr}$, $r \sim 10^4 \text{ pc}$, $1 - \gamma = \frac{r}{R + r\gamma^2} \sim 0.4$) から計算すると、 $\omega_a \sim 0.06 \text{ } 1/10^6 \text{ yr}$ だから $4 \times 10^8 \text{ yr}$, およそち2個の銀河回転にあたる年数となる。これはB型からA型に移る段階にある主系列星の life-time にあたる。よって、主系列星の晩期型星の空間分布に渦状構造が認められないのは、長い年数が経ち渦状の巻き数が多くなり渦状の腕の消滅が定常となるようになったためと考えることが出来る。

