

正規部分群に対する双対性

京大 理 辰馬伸孝

§1. 可換局所コンパクト群 A では, その閉部分群の全体と, A の dual 群 $\hat{A}$ の閉部分群全体の間に, 次に述べる様な, Pontrjagin の双対性がある.

命題 1. A の任意の閉部分群 H に対して, H 上で恒等的に 1 となる $\hat{A}$ の元の全体 (H の annihilator) を $\check{H}$ とすると, $\check{H}$ は $\hat{A}$ の閉部分群となるが, ここで,

(1) H は A の中で $\check{H}$ の annihilator であり, H と $\check{H}$ を対応させる対応で, A の閉部分群の全体は, $\hat{A}$ の閉部分群の全体と 1対1に対応する.

(2) 可換局所コンパクト群としての H の dual 群は, $\hat{A}$ の元の H への制限を H の表現と見る所の, 自然な対応で $\hat{A}/\check{H}$ と同型になる.

(3) 商群 A/H の dual 群は, $\check{H}$ の元を A/H の表現と見る様な対応で, $\check{H}$ と同型になる. └

小文では、此の双対性を可換とは限らない局所コンパクト群 G とその部分群に拡張する事を考える。 G の dual $\hat{G}$ には、可換群の dual 群の積演算の拡張と考えられるものは、テンソル積演算である。しかし A と異り、 $\hat{G}$ は一般には π の積演算で群にならないから、命題 1 の analogy を得るには適当な型式化を必要とする。特に、 $\hat{G}$ 自身、テンソル積で閉じて居ないので、型式化の爲には、 $\hat{G}$ の代りに G の (必ずしも既約でない) ユニタリ表現の同値類の全体 Ω (以下、 G の弱 dual と呼ぶ) を用いるのが便利である。以下先ず命題 1 を Ω の言葉に書き替える。

定義 3. G の部分集合 S が与えられた時、 S の全ての元を単位作用素で表現する様な Ω の元の全体を、 S の annihilator と呼び、 $Z(S)$ で示す。

命題 3. S の annihilator $Z(S)$ (Z と表記) では、

$$(A-1) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in Z \quad \text{で} \quad \omega_1 \oplus \omega_2 \text{ (直和)} \in Z.$$

$$(A-2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in Z \quad \text{で} \quad \omega_1 \otimes \omega_2 \text{ (テンソル積)} \in Z.$$

$$(A-3) \quad \forall \omega \in Z \quad \text{で} \quad \omega^* \text{ (}\omega\text{の共軛表現)} \in Z.$$

$$(A-4) \quad Z \text{ は Fell 位相で閉じて居る.}$$

証明は自明である。

定義 4. Ω の部分集合 Z が、(A-1) ~ (A-4) の条件を満たす時、 Z は Ω の subalgebra であると言う。

定義 5. Ω の部分集合 E に対し, E の全ての元の共通核 (E に属する全ての表現で, 単位作用素に表現される G の元の全体) を, E の annihilator と云い, $H(E)$ で示す. $\square$

補題 6. E の annihilator $H(E)$ は, G の閉正規部分群である. $\square$

証明. 一つの表現の核は閉正規部分群である事から明か. $\square$

可換群 A の場合, A の弱 dual Ω の subalgebra Z に含まれる A の元 (即ち既約な Z の元) 全体 $\hat{H}$ は, (A-4) により A の閉部分集合であるが, 同時に (A-2), (A-3) によって, $\hat{H}$ の部分群である. そして, (A-1), (A-4) は $H(Z)$ が $\hat{H}$ の annihilator と一致する事を導く.

Pontrjagin の双対性, 命題 1 (1) は, Z が $H(Z)$ の annihilator と一致し, $H(Z)$ と Z , χ は H と $Z(H)$ を対応させる対応が, A の閉部分群 (可換だから正規) の全体と, Ω の subalgebra の全体の間の 1対1対応を与えるものとして置きかえられる. そして, 命題 1 (2) は, Ω の元の H への制限を, H の弱 dual Ω_H に埋め込んで考える時, Ω_H 全体を包む (それを含む最小の subalgebra が Ω_H 全体である) 事と同値で, 命題 1 (3) は $Z(H)$ を A/H の表現の集りとする時, A/H の弱 dual $\Omega_{A/H}$ と $Z(H)$ が同型 (積, 和等を含め) である事に, 等

しい。

5.2. 一般の局所コンパクト群 G について同様の事を考える。此の場合、補題 6 により G の部分群としては、閉正規部分群のみを考える事となる。以下表現とは、ユニタリ表現の事とし、表現 ω の表現空間を $\mathcal{G}^\omega$ で、表現作用素を T_g^ω で表し、 $\omega \equiv \{ \mathcal{G}^\omega, T_g^\omega \}$ と示す。 I^ω で $\mathcal{G}^\omega$ 上の恒等作用素を示す事とする。

更に、 G の閉正規部分群 H による商群 G/H の表現 ω は、 G の元 g にその属する coset の表現作用素 T_{gH}^ω を対応させる対応で、 H 上で trivial な G の表現、すなわち $Z(H)$ の元と考えられる。又逆に、 $Z(H)$ の元は同様の解釈で、 G/H の表現と見なせる。従つて G/H の弱 dual を Ω の中の H の annihilator $Z(H)$ と同一視し、 Ω に埋め込んで考えられるから、以下断わらぬ限り、その様に考える事とする。

補題 7. G の閉正規部分群 H をとると、

$$H = H(Z(H))$$

証明. $H \subset H(Z(H))$ は自明。今 $H \neq H(Z(H))$ として、 $g \in H(Z(H)) - H$ をとると、 G/H 内での g の属する coset は単位元と異なるから、表現が十分澤山ある事を保証する所の、
I. M. Gel'fand - K. Raikov の結果により、 $T_{gH}^\omega \neq I^\omega$ となる

$\Omega_{G/H}$ の元 ω がある。 ω を Ω に埋込んで考えると $Z(H)$ に入るから、 $H(Z(H))$ の元 g に対し $T_g^{\omega} = I^{\omega}$ でなくてはならず矛盾。」

定義 8. Ω の *anbalgebra* Z の部分集合 Z_0 が、

(1) Z_0 は Ω の *anbalgebra* である。

(2) $\forall \omega \in Z \quad \forall \omega_0 \in Z_0$ について、 $\omega \otimes \omega_0 \in Z_0$ 。

を満す時、 Z_0 は Z の *ideal* であると言う。

補題 9. Ω の部分集合 Ξ と、 $\omega_0 \in \Omega$ に対して、

$\omega_0 \otimes \Xi \subset \Xi$ ならば、 $H(\omega_0) \subset H(\Xi)$ 。

証明. $H(\omega_0) \not\subset H(\Xi)$ とし、 $g \in H(\Xi) - H(\omega_0)$ をとると、

$\forall \omega \in \Xi$ について $T_g^{\omega} = I^{\omega}$ であるが、 $T_g^{\omega_0} \neq I^{\omega_0}$ である。

従って、 $T_g^{\omega_0 \otimes \omega} = T_g^{\omega_0} \otimes T_g^{\omega} = T_g^{\omega_0} \otimes I^{\omega} \neq I^{\omega_0} \otimes I^{\omega} = I^{\omega_0 \otimes \omega}$ であるが、これは、 $\omega_0 \otimes \omega \in \Xi$ 、 $g \in H(\Xi)$ の仮定に反する。

系 10. Ω の *anbalgebra* Z とその *ideal* Z_0 に対して、

$$H(Z) = H(Z_0)$$

証明. $H(Z) \subset H(Z_0)$ は自明。逆は補題 9 による。

定義 11. G の正則表現 R に弱に含まれる Ω の元全体を

G の弱 *reduced dual* と呼び Ω_R で示す。

又商群 G/H の弱 *reduced dual* を前述の、 $\Omega_{G/H}$ を $Z(H)$ と同一視する対応によって、 Ω に埋め込んだ像を $\Omega(H)$ で示す。

補題 12. (1) $\Omega(H)$ は $Z(H)$ の *ideal* である。

(2) $\Omega(H)$ はそれ自身及び $\emptyset$ 以外の *ideal* を持たない。

証明. $\Sigma(H)$ を $\Omega_{G/H}$ に基づいて考える事により, はじめから $H=\{e\}$ であるとして, $\Omega(H)=\Omega(\{e\})=\Omega_R$ と, $\Sigma(H)=\Omega$ の場合について示せばよい. そして此の場合については,
 $\forall \omega \in \Omega$ に対して, $\omega \otimes R$ が R の multiple と $\varepsilon = \tau$ 同値となる事と, Fell 位相に対し, テンソル積が連続である事より明らかである. ┌

系 13. Ω の相異なる subalgebra Σ_1, Σ_2 で,

$$H(\Sigma_1) = H(\Sigma_2) \quad , \quad \text{となるものが存在する } G \text{ がある.}$$

証明. G/H を non-amenable な群とすると, subalgebra $\Omega(H) \neq \Omega_{G/H} = \Sigma(H)$ であるが系 10, 補題 12.5) $H(\Omega(H)) = H(\Sigma(H))$ 補題 7 は用正規部分群と, その annihilator である Ω の subalgebra との間の 1対1対応を保証するものであるが, 系 13 は, Ω の subalgebra が全て, ある用正規部分群の annihilator になるのではなく, 特定の条件を満たすものに限る事を示す.

定義 14. Ω の subalgebra Σ_0 が自分自身と ϕ 以外の ideal を持たない時, Σ_0 は small であると言う. ┌

定義 15. Ω の subalgebra Σ に対して,

$$\tilde{\Sigma} \equiv \{ \omega \in \Omega \mid \omega \otimes \Sigma \subset \Sigma \}$$

を, Σ の ideal closure と呼ぶ. ┌

定義 16. Ω の subalgebra Σ が, Ω のある small subalgebra Σ_0 の ideal closure になって居る時, Σ を big であると言う. ┐

補題 17. Ω の 2 つの small subalgebra Z_1, Z_2 について,

$$\widetilde{Z}_1 = \widetilde{Z}_2 \quad \text{なら} \quad Z_1 = Z_2.$$

証明. $\widetilde{Z}_1 = \widetilde{Z}_2 \supset Z_1, Z_2$ より $Z_1 \otimes Z_2$ (Z_1, Z_2 の各元のテンソル積で) は Ω の subalgebra だが, Z_1, Z_2 両方の ideal になるから, small 性の仮定により, $Z_1 = Z_1 \otimes Z_2 = Z_2$. $\square$

補題 18. G の 用正規部分群 H に対して,

(1) $\Omega(H)$ は Ω の small subalgebra である.

(2) $Z(H)$ は Ω の big subalgebra である. $\square$

証明. (1) は補題 12, (2) と定義 14 から, $\Delta(\Omega)$ は定義 16.

より $Z(H) = \widehat{\Omega(H)}$ を示せばよいが, 補題 12, (1) は, $Z(H) \subset \widehat{\Omega(H)}$

を示し, 更に 系 10. によって, $H = H(\Omega(H)) = H(\widehat{\Omega(H)})$

が導かれるから, $\Omega(H)$ の元は H 上 trivial であり $\widehat{\Omega(H)} \subset Z(H)$. $\square$

系 19. G の部分集合 S で, $Z(S)$ は Ω の big subalgebra. $\square$

証明. S で生成される G の 用正規部分群 H で $Z(S) = Z(H)$. $\square$

定義 14, 16 の言葉を用いると, Pontryagin の双対性の一般化は次の様にとえられる.

主定理 20. G の任意の 用正規部分群 H に対して, H の Ω の中での annihilator $Z(H)$ は, Ω の big subalgebra となるが,

(1) H は G の中で $Z(H)$ の annihilator であり, H と $Z(H)$ を対応させる対応で, G の 用正規部分群の全体は, Ω の big

subalgebra の全体と 1対1に対応する。

(2) Ω の元を H に制限したものの全体は, H の弱 dual を生成する。

(3) 商群 G/H の弱 dual $\Omega_{G/H}$ は $Z(H)$ と同型である。┘

補題 17. Ω の small subalgebra と big subalgebra の対応を考えると,

主定理 21. G の任意の閉正規部分群 H に対して, G/H の弱 reduced dual $\Omega(H)$ は, Ω の small subalgebra であるが,

(1) H は G の中で $\Omega(H)$ の annihilator であり, H と $\Omega(H)$ を対応させる対応で, G の閉正規部分群の全体は, Ω の small subalgebra の全体と 1対1に対応する。

(2) $\Omega_{G/H}$ の元を H に制限したものの全体は, H の弱-reduced dual を生成する。

(3) 商群 G/H の弱 reduced dual は $\Omega(H)$ と同型である。┘

定理 20 (1), 定理 21 (1) の大々の前半の H が annihilator となる事は, 補題 7 と系 10 により示した。又両定理の (3) も与えの最初の説明により殆ど自明である。そして, 定理 21 (2) は次の長く知られた補題より明かである。

補題 22. G の正則表現を, その閉部分群 L に制限したものは, L の正則表現の multiple とユニタリ同値である。┘

定理 20(2) は, 次の補題より直ちに出来る.

補題 23. G の正規部分群 H の表現 σ から G に誘導した表現 $\omega \equiv \text{Ind} \{ \sigma | H \rightarrow G \}$ を H に制限したものは σ を弱に含む.

証明. ω は, $\mathfrak{g}^\sigma$ -ベクトル値函数 $f(g)$ で, $f(hg) = T_h^\sigma f(g)$ を満すもののうえに, $(T_{g_1}^\omega f)(g) \equiv f(gg_1)$ として定義される. 特に H が正規であるから, $T_{h_1}^\omega f(g) = f(gg_1) = f(gg_1g_2^{-1}) = T_{gg_1g_2^{-1}}^\sigma f(g) = T_{h_1}^{g(\sigma)} f(g)$ ($h, h_1 \in H, g, g_1 \in G$) となる事から, ω の H への制限は $\int_H g(\sigma) d\tilde{g}$ と直積分に分解される. $g \rightarrow g(\sigma)$ は明かに弱位相に対し連続であるから, [1] p252 Lemma 3.1 により σ は $\int_H g(\sigma) d\tilde{g}$ に弱に含まれる. $\square$

残っているのは, 両定理の(1)の後半で, $\Rightarrow$ を与えた対応が onto である事を示すだけであるが, 此れは補題 17, 18 によって, 任意の small subalgebra Z_0 がある正規部分群 H により $\Omega(H)$ の形に書ける事, 特に次を証せば十分である.

補題 24. Ω の任意の small algebra Z_0 で, $\Omega(H(Z_0)) = Z_0$. $\square$

此の補題 24. は, Z_0 の small 性の仮定と, 補題 12(1) より, 次の補題 25 が判れば, $G/H(Z_0)$ の正規表現から得られる subalgebra $\Omega(H(Z_0))$ が Z_0 の ideal となり, 従って Z_0 と一致し, 証了となる.

補題 25. Ω の中の任意の subalgebra Z に対し, $G/H(Z)$ の正規表現は Z に入る. $\square$

§3. 命題25を証明する為、次の定義をする。

定義26. G 上の正定符号函数の全体 Φ の部分集合 Φ_0 が次の (B-1) ~ (B-4) を満す時、 Φ_0 は Φ の subalgebra と云う。

$$(B-1) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi \quad \text{で} \quad \varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi.$$

$$(B-2) \quad \forall a > 0, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi \quad \text{で} \quad \varphi_1 \times \varphi_2 \in \Phi, \quad a\varphi_1 \in \Phi.$$

$$(B-3) \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \text{で} \quad \overline{\varphi} \in \Phi.$$

(B-4) Φ の有向集合 $\{\varphi_\alpha\}$ が、 φ に広義一様に収束するならば、 $\varphi \in \Phi$. ┐

定義27. Φ の subalgebra Φ_0 の部分集合 Φ_0 が、

(1) Φ_0 は Φ の subalgebra である。

(2) $\forall \varphi \in \Phi, \forall \varphi_0 \in \Phi_0$ について、 $\varphi \times \varphi_0 \in \Phi_0$.

を満す時、 Φ_0 は Φ の ideal である と云う。 ┐

定義28. G の部分集合 S の (Φ での) annihilator とは、
 $\Phi(S) \equiv \{\varphi \in \Phi / \varphi(g) = \varphi(e), \forall g \in S\}$, を云う。 ┐

定義29. Φ の部分集合 Λ の (G での) annihilator とは、
 $H(\Lambda) \equiv \{g \in G / \varphi(g) = \varphi(e), \forall \varphi \in \Lambda\}$, を云う。

特に、 $\Lambda = \{\varphi\}$ の時 $H(\{\varphi\})$ を $H\varphi$ と書く事とする。 ┐

命題30. (1) Λ の annihilator $H(\Lambda)$ は G の閉部分群。

(2) S の Φ での annihilator $\Phi(S)$ は Φ の subalgebra である。 ┐

証明. (2) は自明。(1) は正定符号函数 φ を、ある表現 $\omega = \{\varphi^\omega, T_g^\omega\}$ と、 φ^ω のベクトル v によつて、

$\varphi(g) = \langle T_g^w v, v \rangle$ と書くと, $\varphi(g) = \varphi(e)$ より $T_g^w v = v$ を得る. 即ち H_g は v の isotropy 群として内部分群であり,

$H(\Lambda) = \bigcap_{g \in \Lambda} H_g$ はその intersection として同様である. $\square$

系 31. (1) $\mathfrak{A}$ の ambalgebra Σ に属する正定符号函数の全体 Φ_Σ は $\mathfrak{A}$ の ambalgebra である.

(2) Σ の ideal Σ_0 に属する正定符号函数の全体 Φ_{Σ_0} は Σ の ideal である. $\square$

証明. (1) は補題 30, (2) より. (2) は, 表現のテンソル積に属する正定符号函数は, 夫々の函数の積なる事より従う. $\square$

系 32. $\forall h_1, h_2 \in H_g, \forall g \in G$ で $\varphi(h_1 g h_2) = \varphi(g)$. $\square$

証明. H_g は, $\varphi(g) = \langle T_g^w v, v \rangle$ の v の isotropy 群であるから. $\square$

補題 33. $\forall \varphi \in \Phi$ に対し, φ でけられる ambalgebra Φ_φ の元 φ_0 で, (1) $\varphi_0(e) = 1$, (2) $H_{\varphi_0} = \{g \in G \mid |\varphi_0(g)| = 1\}$

(3) $\varphi_0 \geq 0$, となるものがある. $\square$

証明. $\varphi_0 \equiv \{(\varphi + \bar{\varphi})^2 + \varphi + \bar{\varphi}\}^2 / 4\{\varphi(e)^2 + \varphi(e)\}^2$ が上を満たす. $\square$

補題 34. $\mathfrak{A}$ の可算部分集合 Λ のはる ambalgebra Φ_Λ の元 φ_0 で $H_{\varphi_0} = H(\Lambda)$ となるものがある. $\square$

証明. $\Lambda = \{\varphi_j\}$ とする. 補題 33 により, 各 φ_j は, $\varphi_j \geq 0$, $\varphi_j(e) = 1$ としてよい. こゝで, $\varphi_0 \equiv \sum 2^{-j} \varphi_j$ と置くとよい. $\square$

補題 35. G を σ -コンパクトとする. G の巡回表現 ω に属する正定符号函数の全体のはる ambalgebra Φ_ω の元 φ_0 をとり

$$H(\{\omega\}) = H(\Phi\omega) = H\varphi_0 \quad \text{と出来る.}$$

証明. G が σ -コンパクトの仮定から, ω の表現空間 $\mathcal{G}^\omega$ は separable である. 従って $\mathcal{G}^\omega$ 中の可算な稠密集合 $\{v_j\}$ をとって,

$$g_0(g) \equiv \sum_j 2^{-j} \|v_j\|^{-2} \langle T_g^\omega v_j, v_j \rangle$$
 とすればよい.

補題 36. G の開部分集合の族 $\{F_\alpha\}$ が $\bigcap_\alpha F_\alpha = \{e\}$ を満たすとする. この時, G の任意のコンパクト集合 C と, e の近傍 Π に対し, 有限個の F_j を $\{F_\alpha\}$ からとり $\bigcap_j F_j \cap C \subset \Pi$ と出来る.

証明. Π は開集合としてよい. $C - \Pi$ はコンパクトで $\{e\}$ を含まないから, $\bigcup_\alpha F_\alpha^c \supset G - \{e\} \supset C - \Pi$ で有限開被覆 $\{F_j^c\}$ をとり, $\bigcup_j F_j^c \supset C - \Pi$. すなわち $\bigcap_j F_j \cap C \subset \Pi$.

補題 37. G を σ -コンパクト, $H(\Lambda) = \{e\}$ とする. この時 G 上の一様連続函数 f に対して, Λ の可算部分集合 $\{g_j\}$ をとり, f は $\bigcap_j H_{g_j}$ -cozeroise の函数と出来る.

証明. f は一様連続だから, G の e の近傍の列 V_n を $V_n \supset V_{n+1}$ と取って, $g_1, g_2 \in V_n$ なら $|f(g_1) - f(g_2)| < 1/n$ と出来る. $G = \bigcup_n C_n$ を $C_n \subset C_{n+1}$ となるコンパクト被覆とすると, 補題 36 より各 n について, Λ の有限部分集合 $\{g_{n,j}\}_{n,j}$ があり, $\bigcap_j H_{g_{n,j}} \cap C_n \subset V_n$ と出来る. $\{g_{n,j}\}_{n,j}$ を並べ直して $\{g_j\}$ と書くと, $\bigcap_j H_{g_j} = \bigcap_j H_{g_j} \cap G \subset \bigcap_n V_n$ となる. 即ち,
 $g_1, g_2 \in \bigcap_j H_{g_j}$ なら $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(g_1) - f(g_2)| < 1/n \quad \text{i.e.}$
 $f(g_1) = f(g_2) \quad \text{となる.}$

系38. 補題37の $\{q_j\}$ は, Λ のはる ambalgebra Φ_Λ の1つの元 φ_0 で表されうる. すなわち f は G/H_0 上の函数となる.

証明. 補題37に補題34を適用すればよい. ┌

系39. 補題37で $\exists \varphi \in \Phi/H_0$ は正規且 $f \in C(G/H_0)$. ┌

証明. 系38に補題35を適用すれば $H_0 = H(\{w\})$ としてよい. ┌

補題40. Ω の ambalgebra Σ に属する正定符号函数の全体 Φ_Σ の元 φ と, G の有限 γ の元 $\{g_j\}$, 有限 γ の数の組 $\{a_j\}$ に対して, $\sum_{j \in \gamma} a_j \bar{a}_k \varphi(g_j g_k^{-1})$ は又 Φ_Σ に入る. ┌

証明. φ を Σ の元 ω と $\mathcal{H}^\omega$ のベクトル v とで $\varphi(g) = \langle T_g^\omega v, v \rangle$ と示せば, $\sum_{j \in \gamma} a_j \bar{a}_k \varphi(g_j g_k^{-1}) = \langle T_g^\omega (\sum_{j \in \gamma} a_j T_{g_j^{-1}}^\omega v), (\sum_{j \in \gamma} \bar{a}_j T_{g_j}^\omega v) \rangle$ は又 ω に属する正定符号函数である. ┌

系41. $\forall \varphi \in \Phi_\Sigma, \forall f \in C_0(G)$ について,

$$f^* * \varphi * f(g) = \iint f(g_1) \overline{f(g_2)} \varphi(g_2 g_1^{-1}) dg_1 dg_2 \text{ は又 } \Phi_\Sigma \text{ に入る.}$$

証明. G の任意のコンパクト部分集合 C と $\forall \varepsilon > 0$ に対し, C の近傍 V を, $\forall g \in G, \forall g_1 \in V$ で $|f(g_1 g) - f(g)| < \varepsilon$ 及び, $\forall g_1, g_2 \in V, \forall g \in [f]C[f]^{-1}$ で $|\varphi(g_1 g g_2^{-1}) - \varphi(g)| < \varepsilon$ を満す様にとる. コンパクト集合 $[f]$ を $g_j \in [f]$ をとって, $[f] \subset \bigcup_j V g_j$ と有限被覆し, それにより $[f] = \sum E_j$ (disjoint) と $E_j \subset V g_j$ なる可測集合の有限和に分割する. この時

$$\varphi_\varepsilon^C(g) = \sum_{j,k} (\mu(E_j) f(g_j)) \overline{(\mu(E_k) f(g_k))} \varphi(g_k g g_j^{-1}) \text{ は } \Phi_\Sigma \text{ に入り, } C \text{ 上で一様に } f^* * \varphi * f \text{ に近い.}$$
 ┌

補題 42. $\varphi(e) = 1$ なる正定符号函数 φ で $H_\varphi = \{e\}$ であつたとする. $\Pi_n \equiv \{g \in G \mid |1 - \varphi(g)| \leq 1/n\}$ とおけば, 任意の e のコンパクト近傍 C に対して, $\{C \cap \Pi_n\}_n$ は e の基本近傍系となる. ┐

証明. Π_n は e を内点として含み, 又 $H_\varphi = \bigcap_n \Pi_n = \{e\}$ であるから, 補題 36. より任意の e の近傍 V で $\exists n / C \cap \Pi_n \subset V$. ┐

補題 43. $\mathfrak{A}$ の $\ast$ -algebra Σ が $H(\Sigma) (= H(\Phi_\Sigma)) = \{e\}$ であつたとすれば, Φ_Σ は G の正則表現 Ω に属する正定符号函数を全て含む. ┐

証明. (1) Ω に属する正定符号函数は, $\langle R_g v, v \rangle$ ($v \in L^2(G)$) の形の函数の広義一様極限である. そして $Co(G)$ が $L^2(G)$ で稠密である事から, v としては $Co(G)$ の元 f としてよい. つまり $\forall f \in Co(G)$ で $\langle R_g f, f \rangle \in \Phi_\Sigma$ を示せば十分である. そしてその爲には, G の任意のコンパクト集合 C について, $\forall \varepsilon > 0$ で, C 上で $f^* * f$ に一様に ε 以下の差で近い Φ_Σ の元の存在を云えよ.

(2) C と $[f]$ により生成される G の閉部分群 G_0 を考える. G_0 は σ -コンパクトであるから, 補題 37, 系 39 により Φ_Σ の一々の元 φ によつて, $f \in Co(G_0 / G_0 \cap H_\varphi)$ としてよい. $\Rightarrow$ で $H_0 \equiv G_0 \cap H_\varphi$ は G_0 の閉正規部分群にとれる. ($\varphi \geq 0$)

(3) 以下適宜に $a_n > 0$ をとれば, C 上で $\{a_n (f^* \varphi^n * f)\}_n$

が $f^* * f$ に一様に近づく事を示す. 系41より $f^* * \varphi * f$ は $\overline{\Phi_2}$ に入り, 是れより補題43. は直ちに従う. 先ず, $C, [f]$ は G_0 に入つて居るから, φ^n も G_0 に制限して G_0 上の正定符号函数と考えれば, 元々 $G = G_0$ であつたとしてよい.

(4) 又 G_0 の閉正規部分群 H_0 の coset 上で, f も φ も一定値をとるから, G_0/H_0 上の函数として考えて, すなわち $H_0 = \{e\}$ として証明すれば十分である.

(5) $\forall \varepsilon > 0$ を固定し, e のコンパクト近傍 V を, $\forall g \in G, \forall g_1 \in V$ で $|f(g_1 g) - f(g)| < \varepsilon$ となる様にとる.

$$C_1 \equiv [f] C^{-1} [f]^{-1}, \quad a_n \equiv \left(\int_V (\varphi(g))^n dr g \right)^{-1} \text{ とおく.}$$

補題42. より $\exists m \quad \Pi_m \cap C_1 \subset V$, 但し $\Pi_m \equiv \{g \in G /$

$$1 - \varphi(g) \leq 1/m\} \quad , \quad \text{そこで } b \equiv \mu(\Pi_{m+1} \cap C_1) > 0$$

とおく. $M_f \equiv \max_{g \in G} |f(g)|, \quad \|f\|_1 \equiv \int |f(g)| dr g \text{ とする.}$

$$\int_V \varphi^n(g) dr g \geq \int_{\Pi_{m+1} \cap C_1} \left(1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)\right)^n dr g = b \left(\frac{m}{m+1}\right)^n.$$

従つて, $a_n \leq b^{-1} \left(\frac{m+1}{m}\right)^n$. 一方 $\forall g \in C_1 - V$ で

$$(\varphi(g))^m < \left(1 - \left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \text{ より,}$$

$$a_n (\varphi(g))^m < b^{-1} \left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n, \quad \forall g \in C_1 - V.$$

さて,

$$|\langle R_g f, f \rangle - a_n (f^* * \varphi^n * f)(g)| \leq$$

$$\leq \left| \int f(g_2 g) \overline{f(g_2)} dr g_2 - a_n \iint f(g_1) \overline{f(g_2)} (\varphi(g_2 g g_1^{-1}))^n dr g_1 dr g_2 \right|$$

$$\leq \int |f(g_2)| dr g_2 \left| f(g_2 g) - a_n \int f(g_1 g g_1^{-1}) (\varphi(g_1^{-1}))^n dr g_1 \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int |f(g_2)| dg_2 \left\{ \int_V a_n f(g_2 g) (\varphi(g_1))^n dg_1 - a_n \int_V f(g_1 g_2 g) (\varphi(g_1))^n dg_1 \right. \\
&\quad \left. - a_n \int_{V^c} f(g_1 g_2 g) (\varphi(g_1))^n dg_1 \right\} \\
&\leq \int |f(g_2)| dg_2 \left\{ a_n \int_V |f(g_2 g) - f(g_1 g_2 g)| (\varphi(g_1))^n dg_1 + a_n \int_{C_1 \cap V^c} M_f (\varphi(g_1))^n dg_1 \right\} \\
&\leq \|f\|_1 \left\{ \varepsilon + a_n \int_V (\varphi(g))^n dg + \int_{C_1 \cap V^c} M_f b^2 \left(\frac{m^2-1}{m^2} \right)^n dg \right\} \\
&= \|f\|_1 \left\{ \varepsilon + M_f \mu(C_1) b^{-1} \left(\frac{m^2-1}{m^2} \right)^n \right\}.
\end{aligned}$$

$\left(\frac{m^2-1}{m^2} \right) < 1$ より, m を十分大にとれば, 右辺の第 2 項は十分小となり, ε は任意であつたから求める結果を得た。

補題 25. の証明. 半正規部分群 $H(Z)$ に対して, Z 及び $\Omega(H(Z))$ は, $Z(H(Z)) \equiv \Omega G/H(Z)$ に入り その subalgebra と考えてよい. $\Omega G/H(Z)$ での Fell 位相は, Ω に埋め込んだ時の相対位相と一致するから, $\Omega G/H(Z)$ の中で話をしてもよい. すなわち, G を元々 $G/H(Z)$ と考え, $H(Z)$ は $\{e\}$ であつたとしてよいが, 此の形にすれば, 補題 25. は補題 43. の直接の結果である. └

§4. §3 での正定符号函数の議論は, φ を $\varphi(g) = \langle T_g v, v \rangle$ ($\forall g \in G$) なる全てのベクトルの類と対応させる事にし, 表現空間のベクトルの集合の話におきかえる事が出来る. 只に φ で, $\mathfrak{A}$ の subalgebra の定義に次の条件を加えておく.

(B-5) $\varphi_1 \in \mathfrak{A}$ で, $\varphi \in \mathfrak{A}$ が $\varphi_1 > \varphi$ なら $\varphi \in \mathfrak{A}$. └

定義 44. $\tilde{\omega} \equiv \sum_{\omega \in \Omega} \omega \equiv \{ \sum_{\omega \in \Omega} \omega, \sum_{\omega \in \Omega} T_g \omega \} \equiv \{ \mathcal{H}, \tilde{T}_g \}$ と書き, natural に $\oplus, \otimes, *$ を導入して考える. ┌

定義 45. $\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{M}$ が, subalgebra であるとは,

$$(C-1) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{M} \quad \text{で} \quad v_1 \oplus v_2 \in \mathcal{M}.$$

$$(C-2) \quad \forall a \in \mathbb{C}, \forall v_1, v_2 \in \mathcal{M} \quad \text{で} \quad v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{M}, \quad a v_1 \in \mathcal{M}.$$

$$(C-3) \quad \forall v \in \mathcal{H} \cap \mathcal{M} \quad \text{なら} \quad \mathcal{H}^{\omega*} \text{ の共役ベクトル } v^* \in \mathcal{M}.$$

(C-4) $\{v_\alpha\} \subset \mathcal{M}$ で, $\langle \tilde{T}_g v_\alpha, v_\alpha \rangle$ が $\langle \tilde{T}_g v, v \rangle$ に本義一様に収束するならば, $v \in \mathcal{M}$.

$$(C-5) \quad w \in \mathcal{H} \text{ に } \exists v \in \mathcal{M} \text{ で } \langle \tilde{T}_g v, v \rangle > \langle \tilde{T}_g w, w \rangle \text{ なら } w \in \mathcal{M}. \quad \text{┐}$$

定義 46. $\mathcal{M}$ の部分集合 $\mathcal{M}_0$ が ideal であるとは,

$$(1) \quad \mathcal{M}_0 \text{ は } \mathcal{H} \text{ の subalgebra である.}$$

$$(2) \quad \forall v \in \mathcal{M}, \forall v_0 \in \mathcal{M}_0 \text{ について } v \otimes v_0 \in \mathcal{M}_0. \quad \text{┐}$$

定義 47. $S \subset G$ の $(\mathcal{H}$ での) annihilator とは,

$$\mathcal{M}(S) \equiv \{ v \in \mathcal{H} \mid \tilde{T}_g v = v, \forall g \in S \}. \quad \text{┐}$$

定義 48. $\mathcal{H}(\mathcal{H})$ の $(G$ での) annihilator とは,

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}) \equiv \{ g \in G \mid \tilde{T}_g v = v, \forall v \in \mathcal{H} \}.$$

特に $\mathcal{H} = \{v_\alpha\}$ なら, $\mathcal{H}v_0 \equiv \mathcal{H}(\{v_\alpha\})$ と示す. ┐

此れ等は, 定義 26 ~ 29 の云い替えに通じないが, 記述が簡便になるので以下此の言葉を用いる. 補題 30 以下の命題も此の用語で置き換えられる事は, 容易に示される.

補題 49. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の subalgebra とする. この時,

(1) $\mathcal{M}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である。

(2) $v \in \mathcal{G}^{\omega} \cap \mathcal{M}$ とすれば、 $\mathcal{G}^{\omega}$ と $\mathcal{G}^{\omega_1}$ の間の intertwining 作用素によって v の像となる $\mathcal{G}^{\omega_1}$ のベクトル w は $\mathcal{M}$ に入る。

証明. (1) $v_1, v_2 \in \mathcal{G}^{\omega} \cap \mathcal{M}$ として示せばよいが、更に (C-2) よりスカラー倍してよいから、 $v_1 + v_2 \in \mathcal{M}$ を示す。 $\mathcal{G}^{\omega \oplus \omega} \cong \mathcal{G}^{\omega} \oplus \mathcal{G}^{\omega} \ni w_1 \oplus w_2 = \frac{1}{2} \{ [w_1 + w_2] \oplus [w_1 - w_2] + [(w_1 - w_2) \oplus (w_2 - w_1)] \}$ と書くと、 $\mathcal{G}^{\omega \oplus \omega}$ の直交分解に対応し、 $\langle T_{\mathcal{G}^{\omega \oplus \omega}}(v_1 \oplus v_2), (v_1 \oplus v_2) \rangle \geq \frac{1}{4} \langle T_{\mathcal{G}^{\omega \oplus \omega}}[(v_1 + v_2) \oplus (v_1 + v_2)], [(v_1 + v_2) \oplus (v_1 + v_2)] \rangle$ で (C-5) により $(v_1 + v_2) \oplus (v_1 + v_2) \in \mathcal{M}$ だが (C-4) により、同じ正定符号函数に対応する $v_1 + v_2$ も又 $\mathcal{M}$ に入る。

(2) intertwining 作用素が部分等長なら (C-4) (C-5) により明らか。そうでない時は極分解して、正定値自己共役としてよい。スペクトル分解を考えると、分解の射影写像による v の像は全て (C-5) により $\mathcal{M}$ に入るから、(1) によってその和の極限も $\mathcal{M}$ に入る。

概して、 H_q や H_v が正規とは限らぬ閉部分群となる事から、52 の主定理を正規閉部分群のみではなく、一般の閉部分群に拡張出来ぬかと言う問題が生じる。主定理の(2)は補題22. がある意味で肯定的結論を与えて居ると考えられる。又(3)については、 G/H の dual の意味が明確でないので、適切な型式化を要する。此処では(1)をとり上げて見る。

例 50. $G = SL(2, \mathbb{C}) = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{C}\}.$

$H = \{h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in G\}$ とすると, G の任意の既約ユニタリ表現の H への制限は, H の表現として又既約である.

(cf. I.M. Gelfand - M.A. Naimark [3]).

例 50 は, 補題 7 の閉部分群への拡張を否定するものであり, 従って一般の閉部分群を $\mathcal{H}$ のある subalgebra の annihilator として特長づける事は出来ない. しかし特別な閉部分群については次の結果がある.

定義 51. G の正則表現の multiple の部分表現 ω の表現空間 $\mathcal{H}_\omega$ の全体から与えられる $\mathcal{H}$ の部分空間を $\mathcal{H}_\omega$ と書く. $\mathcal{H}$ の subalgebra と $\mathcal{H}_\omega$ の積集合を $\mathcal{H}_\omega$ の subalgebra という.

命題 52. (竹崎-辰馬) ([3] Theorem 9).

(1) G の任意のコンパクト部分群 H に対して,

$$H = H(\mathcal{M}(H) \cap \mathcal{H}_\mathbb{R}).$$

(2) $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ の任意の subalgebra $\mathcal{M}_\mathbb{R}$ に対し, $H(\mathcal{M}_\mathbb{R})$ はコンパクト群であり, $\mathcal{M}(H(\mathcal{M}_\mathbb{R})) \cap \mathcal{H}_\mathbb{R} = \mathcal{M}_\mathbb{R}.$

(3) 上の対応により G のコンパクト部分群の全体と, $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ の subalgebra の全体は 1-1 に対応する.

[注意] 上記の [3] Theorem 9 は少し異った形で与えられて居るが, $\mathcal{M}_*(G)$ は $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ と対応し, 定義 51 の subalgebra の条件 (C-4) は right invariant, (C-3) は self-adjoint, (C-1)(C-2)

が *subalgebra* である事を又々導く事から命題が導かれる。」

従つて次にどのような G の閉部分群や、又どのような H の *subalgebra* に対して、同様な事が成立するか？と云つた問題が生じるが、此の解決はまだ判つて居ない。

たとえば、 G の閉部分群 H について、 $\text{Ind} \{1/H \rightarrow G\} |_H$ に入る H -不変ベクトルの全体の弱閉包は $\mathcal{H}(H)$ の *ideal* を作る事は簡単に云えるが、此の事は二つ様な H -不変ベクトルが十分多くある事を保証するものではない。そして §3 の主定理の証明を真似て、 $\text{Ind} \{1/H \rightarrow G\}$ に対応する正定符号測度 $(\phi(h))^{1/2} dh$ を考え、測度の弱収束の意味でこれを極限とする正定符号函数より作られる測度の列 $\phi_j(g) dg$ をとつて、更に $c_n > 0$ を $c_n (\phi_j(g))^{1/2} dg$ が弱収束する様に定める様な事を考えても、その極限として G の正則表現が表われる例もある。

又 献

- [1] J.M.G. Fell, Weak containment and induced representations of groups, *Can. J. Math.*, 14 (1962), 237-268.
- [2] I.M. Gel'fand & M.A. Naimark, Unitary representations of the classical groups, *Trudy Math. Inst. Steklov* 36 (1950), (Russian)
- [3] M. Takesaki & N. Tatsuuma, Duality and subgroups, *Ann. of Math.* 93 (1971), 344-364.