

Sine-Gordon model と Massive Thirring model

筑波大 物理 高田 慧

§1. 場の理論と固体物理学

一次元量子 Sine-Gordon model (SGM) はソリト解を有する最も簡単な量子系として場の理論と固体物理学の両分野で研究されてきた⁽¹⁾⁽⁴⁾。この系は又又一層に掲げた種々の model と等価或いは関連しており、両分野の典型的 model として重要な位置を占めている。

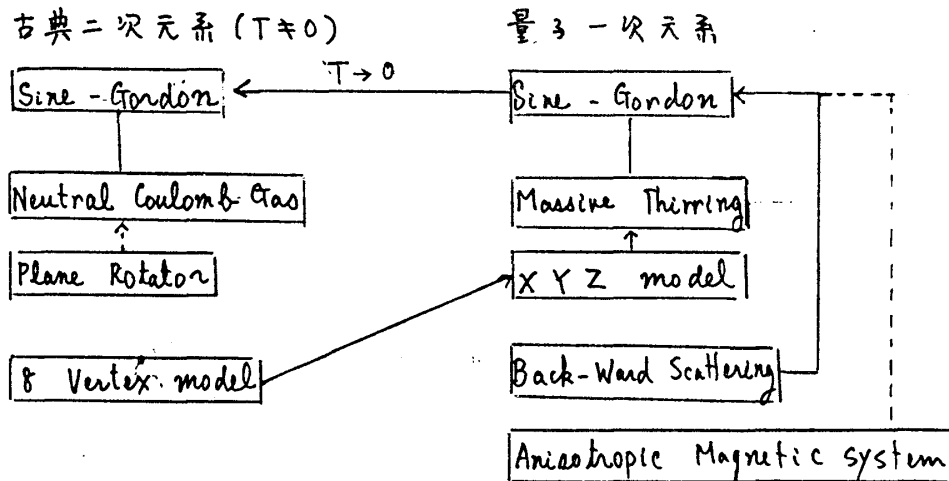


図 1

場の理論と固体物理学の相違は、前者が、本来、空間座標に対して連続的理論であり運動量空間の切断が存在せず、紫外発散によるくりこみを必要とするのに対し⁽²⁾、後者は、運動量空間に逆格子間隔程度の切断 (Λ) の存在のため、紫外発散はなく、くりこみを必要としない。これに関連して、場の理論では Hamiltonian の中のくりこまれる裸の係数、例えば裸の質量は物理的意味を持たないのに対し、固体物理学では、裸の係数に対する物理量の依存性が問題になる。

この運動量空間の切断 (Λ) の存在不在の相違は、系の安定性等幾つもの点で、両者の理論に本質的な違いを齎す。ここでは、SGM と Massive Thirring model (MTM) について、主として、切断の相違の齎す問題、Fermi-Bose 関係⁽⁵⁾、系の安定性、Kosterlitz-Thouless (K-T) 転移⁽⁶⁾、束縛状態等について述べることにする。

§2 Fermi-Bose 関係

Fermion の波動場を次のように書く。

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{i\phi_n(x)}, \quad (\phi_n(x)) = \pm i \sum_{k>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Lk}} \left\{ \begin{pmatrix} b_{1k}^\dagger \\ b_{2-k} \end{pmatrix} e^{-ikx} - \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2-k}^\dagger \end{pmatrix} e^{ikx} \right\} e^{-\epsilon|x|/2} \quad (2-1)$$

ここで b_{nk} ($b_{nk}^\dagger$) は Boson の消滅 (生成) 演算子、 ϵ は正の無限小の量、 n は 1 と 2 を取ることをする。通常のように b_{nk} と $b_{nk}^\dagger$ を Fermion の密度演算子で書かないのは、 ϵ 和 Λ の程度で適用する場合に、密度演算子は厳密には Boson の交換関係に従わないため、このように取る方が、拡張する場合に便利だからである。⁽⁷⁾ (2-1) より、 $[A, B]$ や C -数の場合に成立つ公式 $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$ を用いて、以下の表式が成立つことが解る。

$$\begin{aligned} \psi_n^\dagger(x) \psi_n(x') &= \frac{i\epsilon}{(-1)^{n+1}(x-x') + i\epsilon} : \psi_n^\dagger(x) \psi_n(x') : \\ \psi_n(x') \psi_n^\dagger(x) &= \frac{i\epsilon}{(-1)^n(x-x') + i\epsilon} : \psi_n^\dagger(x) \psi_n(x') : \end{aligned} \quad (2-2)$$

ここで: : は Bose 演算子の N 積を表わしてあり

$$: \psi_n^\dagger(x) \psi_n(x) : = \frac{1}{2\pi\epsilon} e^{G_n^\dagger(x, x')} e^{-G_n(x, x')}, \quad (2-3)$$

$$G_1(x, x') = \sum_{k>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Lk}} b_{1k} (e^{ikx} - e^{-ikx'}) e^{-\epsilon k/2}, \quad (G_2(x, x') \text{ は同様})$$

と書ける。(2-2), (2-3) より 反交換関係 $\{\psi_n(x), \psi_m^\dagger(x')\} = \delta(x-x')$ が導出される。(2-2) に見られるように, $\psi_n^\dagger(x) \psi_n(x)$ のように同じ空間座標 x を持つ演算子の積は, 極限によってしか定義されない量で, 然し極限の取り方に依る。ここで以下のように定義する。

$$\psi_n^\dagger(x) \psi_n(x) \equiv \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x + \eta(x)} (\psi_n^\dagger(x) \psi_n(x') - \psi_n(x) \psi_n^\dagger(x')) \quad (2-4)$$

$\eta(x)$ は $\eta(x) \gg \epsilon$ なる無限小の量である。これより

$$\psi^\dagger(x) \psi(x) = \sum_{k>0} \sqrt{\frac{k}{2\pi L}} (b_{1k} e^{ikx} + b_{1k}^\dagger e^{-ikx}) = \frac{1}{L} \sum_{k>0} p_1(k) e^{-ikx} \quad (2-5)$$

この式の最後の式に表われる $p_1(k)$ は 密度演算子である。上式は $k=0$ を含みないので $\psi^\dagger(x) \psi(x)$ は N 積と理解される。(2-5) 式の最後の二式を比較すると $b_{1k} = \sqrt{2\pi/Lk} p_1(k)$ となり, 密度演算子は Boson 演算子となっていることがわかる。固体物理学では切断 Λ が存在する為, 以上のような関係式を見直す必要がある。(2-1) の ϵ は運動量空間を滑らかに切断する ϵ であり, $\epsilon = 1/\Lambda$ とおく。(2-2) より, 運動量空間の消滅演算子 $a_{nk} = L^{-1/2} \int \psi_n(x) e^{-ikx} dx$ に対して, $\{a_{nk}, a_{nk'}^\dagger\} = e^{-k/\Lambda} \delta_{k,k'}$ となり, $k \ll \Lambda$ では, Fermi-Bose 関係は近似的に成立していることがわかる。

これより (2-3) 式で定義される N 積に関する問題に触れないで済む。実はこの N 積は, 全 Hilbert 空間では, 良く定義されない量で $x \rightarrow x'$ で一般的には解析的でない。即ち, 全 Hilbert 空間では $G_1(x, x')$ は極限の取り方に依って違う値を取る演算子である。然し, 我々の与えている物理的状態は, b_{nk} の真空に十分近いもの(励起した Boson の数 $\Lambda \pi$ とくらべて十分小さいもの), Fermi-Bose 関係は充分正確であると云える。相互作用によって, 真の基底状態は b_{nk} の真空と異なるときは, 相互作用が強ければなるほど, Fermi-Bose 関係はより不正確な関係になってしまう。これは簡単な Luttinger model に於て正確なものとすることができる。

以上のように見ると, Fermi-Bose 関係は, 弱い相互作用の場合で, 小さな波数長を持つ低い励起状態に対して 良い近似であることがわかる。実際一次元電子系について, ϵ は ϵ 群の結果と Fermi-Bose 関係を用いた結果を比較すると ϵ 群の結果と ϵ 群の結果と Boson 表示の結果が一致することがわかる。

ϵ が無限小の場合には, 例え ϵ が, 次のような恒等式を導くこともできる。*)

$$-i \int (\psi_1^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x) - \psi_2^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x)) dx = \frac{1}{2} \int : \pi^2(x) + (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 : dx$$

$$\int \psi_1^\dagger(x) \psi_1(x) \psi_2^\dagger(x) \psi_2(x) dx = -\frac{1}{4\pi} \int : \pi^2(x) - (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 : dx \quad (2-6)$$

$$\psi_1^\dagger(x) \psi_1(x) + \psi_2^\dagger(x) \psi_2(x) = \frac{1}{\pi\epsilon} \cos 2\sqrt{\pi} \varphi(x)$$

ここで $\varphi(x) = 1/(2\sqrt{\pi}) (\phi_1(x) - \phi_2(x))$ と $\pi(x)$ は, $[\pi(x), \varphi(x')] = -i\delta(x-x')$ を満足する $\varphi(x)$ と共軛な演算子である。(2-6) を用いると Sine-Gordon model (3-1) より, Scale 変換を含む適当な変換により Massive Thirring model (4-1) に変換することが出来る。

§ 3 Sine-Gordon model に於ける不安定性と Kosterlitz-Thouless 転移
SGM を次のような Hamiltonian で定義する。

$$H_{SG} = \frac{1}{2} \int dx \left\{ \pi^2(x) + \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)^2 - \frac{2m_0^2}{g^2} \cos g\varphi(x) \right\} \quad (3-1)$$

§ 3-1 不安定性

a) Coleman の不安定性²⁾: Coleman は $g^2 > 8\pi$ で系が不安定であることを次のように示した。 $|m\rangle$ を質量 m の Boson の真空と考えると

$$\begin{aligned} E(m) &= \langle m | H_{SG} | m \rangle = \frac{\Lambda}{4\pi} \sqrt{\Lambda^2 + m^2} - \frac{m_0^2}{g^2} e^{-\frac{g^2}{2} \langle m | \varphi^2 | m \rangle} \\ &= \frac{\Lambda^2}{4\pi} + \frac{m^2}{8\pi} - \frac{m_0^2}{g^2} \left(\frac{m}{2\Lambda} \right)^{g^2/4\pi} = \frac{\Lambda^2}{4\pi} + \frac{m^2}{8\pi} - \frac{m_0^2}{g^2} \left(\frac{m}{\mu} \right)^{g^2/4\pi} \end{aligned} \quad (3-2)$$

ここで $m_0^2 = m_B^2 (\mu/2\Lambda)^{g^2/4\pi}$ で、 m_0, μ は共に有限の量と考える。上式は $g^2 > 8\pi$ で $E(m)$ は m を小さく取ればいくつでも小さくなり、基底状態が存在しないことを示す。これは系の不安定性を意味する。然しこれは、 φ -行目から φ^2 -行目の式に行く時に $\Lambda \gg m$ を使っており、又最後の式に行く時には $\mu < m$ を使っており、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の議論である。

Λ が有限の場合は、 $dE(m)/dm = 0$ なる $E(m)$ が最小となる m が存在する。これは self-consistent harmonic 近似を与え、 $m_0/\Lambda \ll 1$ と仮定すると $dE(m)/dm = 0$ より

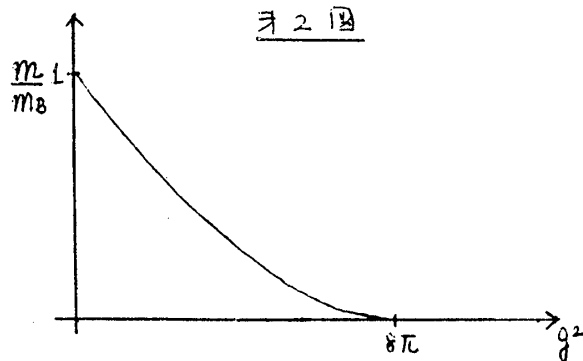
$$\frac{m}{m_B} = \left(\frac{m_B}{2\Lambda} \right) \frac{g^2}{8\pi - g^2} \quad (3-3)$$

となり、 φ 2 図に示すように $g^2 > 8\pi$ で $m=0$ となる。この $m=0$ の状態は後の議論で解きようには Kosterlitz-Thouless 相である。

摂動論の立場で言うと、Coleman の不安定性は、Single loop にある紫外発散に関連しており、self-consistent harmonic 近似は、この single-loop の寄与を全部加えたものである。

b) Fröhlich の不安定性: Fröhlich は $g^2 > 4\pi$ で系は不安定になり、つづけることを示した。詳しく説明する級数の余裕は無いが、これも Coleman の不安定性と同様に $\Lambda \rightarrow \infty$ の紫外発散に関連する問題である。 $T=0$ の SGM 系は、二次元古典中性フリードマン系と等価な系であるが、Fröhlich の不安定性はこの系では恒温で正負の対がつかれることに対応する。このように格点系の問題では明らかになることを注意しておく。又、 $g^2 > 4\pi$ の MTM 系では引力の場合に対応することは興味深い。§ 4.2 で述べるようにこの不安定性は MTM 系では超電導的不安定性と解釈される。

c) その他の紫外発散: 摂動論を進めて行くと、場の理論の波動場のくりこみが必要となる発散が生じる。これは、摂動の 2 次で、例えば Green 関数の自己エネルギーの 2 次ループが $g^2 > 8\pi$ で紫外発散を起すことに表われる。このような紫外発散自体は Λ 有限の時に起すもの。然し、K-T 転移近傍のくりこみ、例えば Wilson 流のくりこみを進めて行くと、くりこみすべき変数を教えることになる。前に self-consistent harmonic 近似で $g^2 > 8\pi$ で $m=0$ となることを示したが、上記の発散はこの点で、同時に波動場のくりこみに対応して、 g もくりこまなければならないことを示している。実際、 $m=0$ の K-T 転移のくりこみでは、 m と g の 2 つの変数をくりこまなければならない。



§ 3.2 Kosterlitz-Thouless 転移

Feynmann 経路積分⁸⁾を用いると SGM の分配関数 Z は

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_{SG}} = \int D\varphi(x, y) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^\beta dy \int dx \left\{ (\nabla \varphi)^2 - \frac{2m_0^2}{g^2} \cos g\varphi \right\} \right] \quad (3-4)$$

と書くことができる。ここで $\varphi(x, 0) = \varphi(x, \beta)$ である。この表式より、1次元 SGM の $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$) の問題は 2次元古典 SGM の有限温度の問題と等価であることが解る。2次元古典 SGM は 2次元古典中性 ϕ - ρ システムと等価であるが、 ϕ - ρ システムの変数 fugacity y と相互作用定数 K は SGM の変数と

$$y = (m_0 a / g)^2, \quad K = g^2 / 4\pi \quad (3-5)$$

の関係にあることが解る。 α は Λ^{-1} の程度の格子間隔を与える。Wilson 流のくりこみ群の方法を用いると^{9,10)}くりこみの微分方程式は

$$\frac{dy}{d\ell} = (2 - \pi K) y, \quad \frac{dK}{d\ell} = -C K^3 y^2 \quad (3-6)$$

で与えられる。ここで C は定数である。この両式より、ある図の流れ図に示すように、 $g^2 > 8\pi$ ($K > 3/4\pi$) で $m=0$ の固定線となっており、これは (g^2, m_0) より出発して、くりこみを行う時、 $(g^2 > 8\pi, m=0)$ に到達する (g^2, m_0) の斜線の領域では、 $m=0$ の K-T 相にあることを示している。K-T 相では SGM 系はくりこまれた自由の ϕ システムで表わされ、coherence length ξ は ∞ となる。転移点は (g^2, m_0) が $(8\pi, 0)$ を通る流れ線上にある時であり、 g^2 が 8π より大きい或る値であることが解る。¹¹⁾

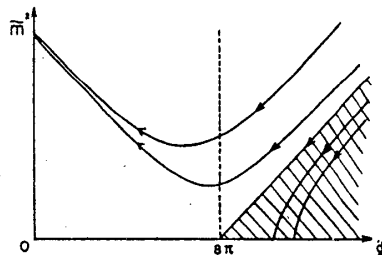


図 3

量子系での K-T 相の存在は、古典系では g が ∞ までソリトンが存在するに代り、量子系では K-T 相にある時ソリトン励起が無くなることを示している。これは量子系の特徴と考えられる。

§ 4 Massive Thirring model と束縛状態

MTM は場の理論に於ては Coleman²⁾ と Mandelstam³⁾ により SGM との等価性が証明された。固体論の場合には切断 Λ が存在する為、§ 2 で述べたように Fermi-Bose 関係が近似的となり、この model の対応が正確さを失う。然し、MTM の相互作用が弱い場合は、質量のくりこみや束縛状態である Breather mode のエネルギー等、相互作用の最低次元両者は等しい結果を与えることを示すことができる。ここでは特に束縛状態について検討してみることとする。

§ 2 で述べた変換により、SGM のハミルトニアン (3-1) は次の MTM に変換される。

$$H_{MT} = \sum_k k (a_{1k}^\dagger a_{1k} - a_{2k}^\dagger a_{2k}) - M_0 \sum_k (a_{1k}^\dagger a_{1k} + a_{2k}^\dagger a_{2k}) + \frac{V_0}{L} \sum_{q \neq 0} a_{1k+q}^\dagger a_{1k} a_{2k-q}^\dagger a_{2k} \quad (4-1)$$

ここで

$$M_0 = \pi m_0^2 \epsilon / g^2, \quad V_0 = 2\pi (4\pi/g^2 - g^2/4\pi) / (4\pi/g^2 + g^2/4\pi). \quad (4-2)$$

(4-1) で 1 部分 ϵ Bogolubov 変換の形の変換により対角化すると

$$H_{MT} = H_0 + H' + \text{const}, \quad H_0 = \sum_k E(k) (\alpha_k^\dagger \alpha_k + \beta_k^\dagger \beta_k) \quad (4-3)$$

$$E(k) = \sqrt{k^2 + M^2}, \quad M = M_0 + \frac{V_0}{L} \sum_k u_k v_k \quad (4-4)$$

$$\frac{u_k^2}{v_k^2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{k}{E(k)} \right) \quad (4-5)$$

となる。 H' は $\alpha, \beta, \alpha^\dagger, \beta^\dagger$ の N 積よりなる相互作用の部分である。 α は下
の分枝の hole の消滅演子、 β は上の分枝の particle の消滅演子である。

(4-2) より $g^2 = 4\pi$ で $V_0 = 0$ 、 $g^2 < 4\pi$ で $V_0 > 0$ で斥力、 $g^2 > 4\pi$ で $V_0 < 0$ の引力
である。

§ 4.1 Soliton-Antisoliton bound state (Breather mode) $g^2 \leq 4\pi$ ($V_0 \geq 0$) の

$\psi_k^+(x)$ と $\varphi(x)$ の交換関係より、ソリトンと反ソリトンの励起に相当することと解る。こ
のこじから、ソリトンと反ソリトンの束縛状態である Breather mode に対応する
束縛状態は、MTM では Exciton 型 particle-hole bound state であることと
解る。このように束縛状態は $V_0 > 0$ ($g^2 < 4\pi$) で存在することと明かであり、又
DHN の結果もそうである。

$V_0 (> 0)$ が充分小さいと (2) Tam-Dankoff 近似の最低次で計算する。このよ
うな束縛状態 $|\Phi_0(q)\rangle$ は次のように表わされる。

$$|\Phi_0(q)\rangle = \sum_k f_k(q) \alpha_k^\dagger \beta_{-k+q}^\dagger |0\rangle \quad (4-5)$$

ここで $|0\rangle$ は α, β の真空を表わす。束縛状態のエネルギー $E_0(q)$ は V_0 及び $g^2 - 4\pi$
の最低次で

$$E_0(0)/2M = 1 - V_0^2/8 + O(V_0^3) = 1 - (g^2 - 4\pi)^2/32 + O((g^2 - 4\pi)^3) \quad (4-6)$$

となる。これは当然であるが Bergknoff-Thacker の厳密解の展開の V_0^2 迄の展開と
一致する。一方 DHN によると

$$E_0^{DHN}(0)/2M^{DHN} = \sin \pi q^2/16, \quad q'^2 = g^2/(1 - g^2/8\pi) \quad (4-7)$$

であるが、 $g^2 \sim 4\pi$ では、 $\pi=1$ の束縛状態のみ存在し、上式を $g^2 - 4\pi$ で展開すると

$$E_0^{DHN}(0)/2M^{DHN} = 1 - (g^2 - 4\pi)^2/32 + O((g^2 - 4\pi)^3) \quad (4-8)$$

となる。この展開は、Fermi-Bose 関係を用いた (4-6) の最後の式に一致する。

以上のことは Fermi-Bose 関係が弱い相互作用の場合に、有限の場合でも相互
作用の最低次では正しい結果を与えることを示している。

§ 4.2 Soliton-Soliton bound states $g^2 \geq 4\pi$ ($V_0 < 0$)

$g^2 > 4\pi$ ($V_0 < 0$) に対応する MTM の引力の領域のソリトン-ソリトンの束縛
状態を問題にする。このような束縛状態が存在すれば、古典論には存在しない
ので興味深い。ソリトン-ソリトンの束縛状態は Tam-Dankoff の最低次では

$$|\Phi_0(q)\rangle = \sum_k g_k(q) \beta_k^\dagger \beta_{-k+q}^\dagger |0\rangle \quad (4-9)$$

と表わされる。 $q=0$ の場合は、束縛状態のエネルギー E_0 を与える式は分離形とな
り、正確に次のように計算される。

$$1 = \frac{|V_0|}{2\pi} \left(H(E_0/2M) + \ln \frac{\Lambda}{2M} \right) \quad (4-10)$$

$$H(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (4-11)$$

$H(x)$ は単調増加関数で $-1 = H(0) \leq H(x) \leq H(1) = \pi/2$ の値をとる。このことより束縛状態は

$$V_S < |V_0| < V_C, \quad V_S = 2\pi/(\ln 2\Lambda/M + \pi/2), \quad V_C = 2\pi/(\ln 2\Lambda/M - 1) \quad (4-12)$$

で存在することになる。 V_0 が $-V_S$ より小さくなると、 $E_S(0)$ はギャップの上端 $2M$ より顕われ、 $|V_0|$ が大きくなると、小さくなり、 $V_0 = -2V_C$ で $E_S(0) = 0$ となり、系は超電導的転移を起こす。この転移は近似によるもので一次元系では long range-order は存在し得ないから、このようになっているのは実際は起らない。然し超電導の order-parameter は複素数で成分2であること、又一次元量と系の $T=0$ の問題は、二次元古典系の問題に対応することと考えると、 $|V_0|$ が大きくなると成る。成分2の二次元古典系で起る転移、K-T転移が起ることと期待される。§3.2 で示したように SGM では有限 Λ の場合 K-T転移が存在する。有限 Λ では Fermi-Bose 関係は近似的ではあるが、SGM で起る K-T転移に対応する転移が MTM でも起ると考えられることは、二つの系の対応が有限 Λ の場合も成立することと示している。

(4-12) で $\Lambda \rightarrow \infty$ と考えると、 $V_S = V_C = 0$ となる。これは $V_0 = 0$ ($g^2 = 4\pi$) で超電導的不安定性を起こすことを意味する。この不安定性は §3.1 で述べた $g^2 = 4\pi$ で起る Fröhlich の不安定性と考えることと意味する。

上で説明したように Tam-Danforth の近似ではソリトン-ソリトンの束縛状態は存在する。然し、 $|V_0|$ が有限の値にたつと始めに顕われることは、摂動的なこの取り扱いでは顕われないことが、Bethe-Ansatz に基づく厳密な取り扱いで示すことを必要とする。

§4.3 Bergnoff-Thacker の厳密解

Bergnoff-Thacker は MTM の Bethe-Ansatz に基づく粒子数 ∞ の場合 $(\Lambda \rightarrow \infty)$ の厳密解を求めた。彼等の解は $V_0 > 0$ の場合は Breather mode が正しくなる等正当な形をしていいる。然し $V_0 < 0$ の引力の場合には、くりこまれた値量に寄外発散以外の発散が顕われる等満足な形をしていない。実際、引力の場合には、極限 $\Lambda \rightarrow \infty$ の取り方に問題があるとして、解くことを断念している。

§4.2 で述べたように引力の場合には $\Lambda \rightarrow \infty$ とすると系は不安定になると思われる。 Λ 有限の場合はこのようになっている筈である。実際 Λ 有限とし粒子数を一定として、Bethe-Ansatz を適用すると、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の場合に起る困難、例えは値量に顕われる寄外発散以外の発散は消える。

現在 Λ 有限の場合の計算を進めており、それによつて引力の場合 ソリトン-ソリトンの束縛状態が存在するかどうかとも明かにするを考えている。

参考文献

- 1) R. F. Dashen, B. Hasslacher and N. Neveu, Phys. Rev. D10 (1974), 4130.
- 2) S. Coleman, Phys. Rev. D11 (1975), 2088.
- 3) S. Mandelstam, Phys. Rev. D11 (1975), 3026.
- 4) K. Maki and H. Takayama, Phys. Rev. B15 (1976), 403.
- 5) A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B9 (1974), 2911.
- 6) J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. of Phys. C6 (1973), 1181.
- 7) S. Takada and S. Misawa, Prog. Theor. Phys. 66 (1981), 101.
- 8) R. P. Feynman, Statistical Mechanics (Benjamin, Massachusetts, 1972)
- 9) T. Ohta, Prog. Theor. Phys. 60 (1978), 968.
- 10) J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. 51 (1979), 659.
- 11) S. Takada, T. Sakaguchi, and S. Misawa, Prog. Theor. Phys. 66 (1981), 820.
- 12) H. Bergnoff and H. B. Thacker, Phys. Rev. D19 (1979), 3666.