

Bifurcations for skew tent maps I (Stair type)

お茶の水女子大学 理学研究科 市村圭子 (Keiko Ichimura)

城西大 理学部 西沢清子 (Kiyoko Nishizawa)

1. 序

近年、力学系の研究が盛んになった。そのうちのひとつとして、パラメータを含む関数族の力学系の分岐が挙げられる。分岐とは、パラメータを変化させたときに起こる力学系の変化を意味する。よく知られたものとして、ロジスティック方程式 $g_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$ の分岐が挙げられる。この関数族は、倍周期分岐をくりかえしつつ、やがて $3 < \mu < 4$ 内にカオス領域と呼ばれる領域を生むこともよく知られている。

ところが、次に挙げる $\mathbf{R}$ 上の区分的に滑らかな *skew tent map* の族では、これとは様子が異なった分岐過程を見せる：

$$F_\mu(x) = \begin{cases} ax + \mu, & \text{for } x \leq 0 \\ -bx + \mu, & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ただし, } 0 < a < 1, b > 1.$$

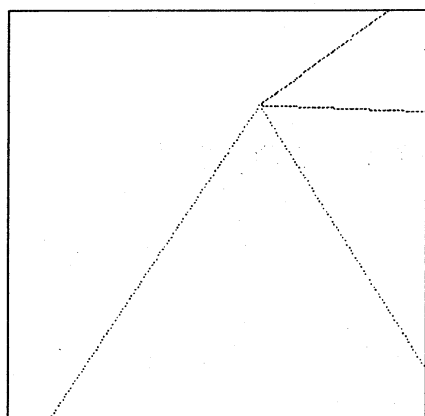
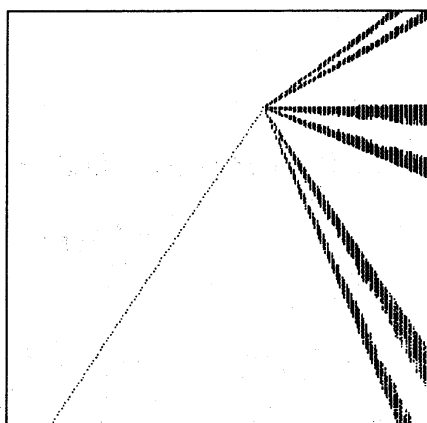
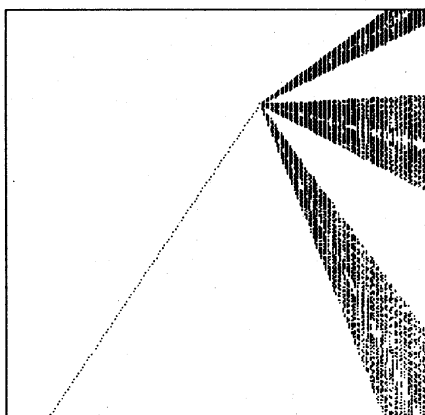
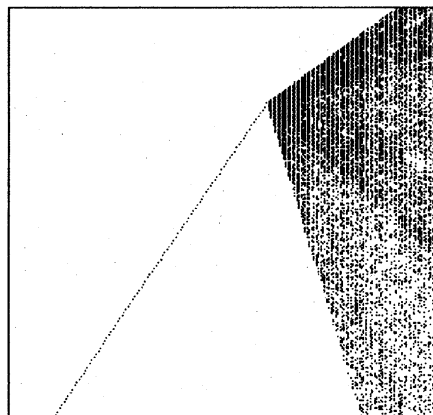
まず、パラメータ (a, b) を固定し、 F_μ を μ についての関数族とみる。 μ の値を負から正に変化させていくと、 $\mu = 0, x = 0$ において、 F_μ は分岐を生じる [NY95]。 $\mu > 0$ で、力学系がどのように変化するかは (a, b) に依存しており、 (a, b) をいくつか変えた分岐ダイアグラムを Fig.1 から Fig.4 に示した。§3 でこの分岐ダイアグラムについて述べる。

§2 では、いくつかの言葉の定義と既に知られている結果を、§4 には得られた結果を述べる。

グラフィックスは、Mathematica 2.2, Wolfram Research, Inc. と Risa/Asir, symbolic and algebraic computation system, Version 940420, FUJITSU LABORATORIES LIMITED. による。

2. 準備

以下、 f を $\mathbf{R}$ 上の連続写像とし、写像 f の反復合成、 $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ times}}$ を f^n で表す。

Fig. 1. $a = \frac{1}{2}, b = 3.2$ Fig. 2. $a = 0.5, b = 4.14$ Fig. 3. $a = 0.5, b = 4.42$ Fig. 4. $a = 0.5, b = 5.5$

- 数列 $\{f^n(x)\}_{n \geq 0} = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ を x の f による軌道といい、 $O(x)$ や $O_f(x)$ で表す。
- $f^k(x) = x$ かつ、 $0 \leq i \leq k-1$ に対し $f^i(x) \neq x$ ならば、 x を f の周期 (素周期) k の周期点 (k -periodic point) という。特に $k=1$ のとき x を固定点という (fixed point)。また、 x が f の k -周期点のとき、 $O(x) = \{x, f(x), \dots, f^k(x)\}$ を k -周期軌道または、 k -サイクルという。

次に、他の点の軌道を引きつけるような集合であるアトラクターの定義を J. Milnor [Mil85] に従って行なう。

Definition 1 集合 A が以下の 4 条件をみたすとき A はアトラクターであるという。

1. A は閉集合。
2. $f(A) = A$ 。
3. 適当な A の近傍 U で、任意の $x \in U$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \in A$ となる。
4. A の元 x で、 $O(x)$ が A で稠密であるものが存在する。

特にアトラクターが k 個の点から成る点集合のとき、その要素である点を周期 k の吸引的周期点 (*attracting k -periodic point*) とよぶ。

x が f の k -周期点で、 $O(x)$ の近傍で f が微分可能であるとする。もし、 $|(f^k)'(x)| < 1$ ならば、 x は吸引的である。

次の、力学系がカオス的であることの定義は R.L.Devaney[Dev89] に従う。

Definition 2 関数 f の力学系が X 上カオス的 (*chaotic*) であるとは、 f が次の 3 条件を満たすときである。

1. f が、初期値に対する敏感な依存性を持つ; ある正数 δ が f に対し決まり、 x を X の任意の点とすると、その任意の近傍 U_x 内に、 $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ となるような点 y と自然数 n が存在する。
2. f は、位相推移的である; 任意の開集合 U, V に対してある自然数 n が存在し、 $f^n U \cap V \neq \emptyset$ となる。
3. f の周期点の集合は、 V 上稠密である。

力学系に対する位相不変量である位相共役 (*topologically conjugate*) という同値関係の定義を述べる。

Definition 3 ふたつの力学系 $f: V \rightarrow V$, $g: U \rightarrow U$ に対して同相写像 $h: V \rightarrow U$ が存在して、 $h \circ f = g \circ h$ が成り立つとき、 f と g は位相共役であるといい、 $f \sim g$ と書く。また、写像 h を共役関数 (*topological conjugacy*) と呼ぶ。

$f \sim g$ であることと、下の図式が可換であることは同値である。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ U & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

f がカオス的であるならば、 f と共役な任意の関数 g はカオス的である。

3. 分岐現象

次で定義される *skew tent map* の族の力学系について考える。

まず a, b は固定し、 μ をパラメータとする族とみると、Fig.1 から Fig.4 の分岐ダイアグラムを得る。どれも $\mu = 0$ でダイアグラムに変化が見られるが、実際この関数族は $\mu = 0$ で分岐を生じる [NY95]。

Fig.1 では、吸引的固定点から周期 3 の吸引点への分岐が生じている。Fig.2 から Fig.4 では、吸引的固定点から力学系がカオス的になるような区間がいくつか現われている。

Fig.1 から Fig.4 で示されているように、この関数族に起こる分岐にはいくつかのタイプがあり、どんなタイプの分岐がおこるかは a, b の値に依存している。一方、 a, b がどんな値であってもひとつに固定して考えているかぎり $\mu > 0$ では新たな分岐は起こらない。なぜなら、このとき $F_\mu \sim F_1$ だからである。

$$F_\mu(x) = \begin{cases} ax + \mu, & \text{for } x \leq 0 \\ -bx + \mu, & \text{for } x \geq 0, \end{cases}$$

$$0 < a < 1, b > 1.$$

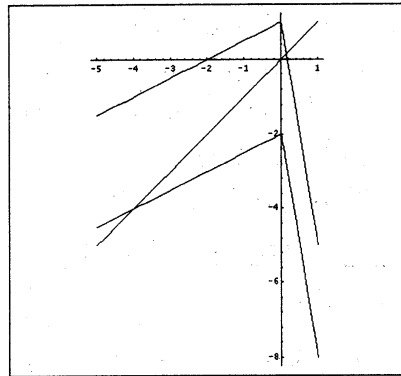


Fig. 5. $a = \frac{1}{2}, b = 6, \mu = 1, \mu = -2$

従って、以後 $\mu = 1$ とし、一般性を失うことなく a, b をパラメータとする関数族の力学系の解析を行なうことができる:

$$D = \{(a, b); a > 0, b > 1, a + b \geq ab\}.$$

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{for } x \leq 0 \\ -bx + 1, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}, (a, b) \in D.$$

扱う関数族は範囲を広げ、 a は正数全体とする。 $a + b < ab$ のときは、ほとんどすべての点の軌道は $-\infty$ に発散する。

又、区間 $I_{a,b}$ を $I_{a,b} = [f_{a,b}^2(0), f_{a,b}(0)]$ とおくと、 $a + b \geq ab$ のもとでは、 $I_{a,b}$ 上での解析だけすればよいことが分かる。というのは、区間 $I_{a,b}$ 以外での力学系は軌道がいずれ $I_{a,b}$ に収束するか、 $-\infty$ に発散するかまたは固定点であるかのどれかであるからである。以下、区間 $I_{a,b}$ での $f_{a,b}$ の力学系の特徴によって領域 D を分割していく。一般に、領域とは連結開集合のことであるが、以下境界を含んでいるような集合でも領域と呼ぶことにする。

4. 結果

まず、 $f_{a,b}$ において記号力学系の概念を導入する。 $I_0 = [f_{a,b}^2(0), 0], I_1 = (0, f_{a,b}(0)]$ とおく。 $f_{a,b}^j(x), (x \in I_{a,b}, j \geq 0)$ に対し、記号 $s^j(x)$ を次のように定める。

$$s^j(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } f_{a,b}^j(x) < 0 \\ C, & \text{for } f_{a,b}^j(x) = 0 \\ 1, & \text{for } f_{a,b}^j(x) > 0 \end{cases}$$

Definition 4 $x \in I_{a,b}$ の旅程 (itinerary) とは $S_{a,b}(x) = \{s^j(x)\}_{j \geq 0}$ で定義される無限列のことである。

D の分割を吸引的周期軌道を持つような a, b の領域を決定することから始める。このために次のような領域を用意する。

$$D_k = \left\{ (a, b) \in D; 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^{k-2}} < b \leq 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^{k-1}} \right\},$$

$$D_k^A = \left\{ (a, b) \in D_k; a^{k-1}b \leq 1 \right\}, k \geq 2.$$

Proposition 1 D_k^A の境界は次の代数曲線

$$a^{k-1}b = 1, \quad b = 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^{k-2}}$$

で決定される。この2曲線はただ1点 P_k で交わり、 $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = (\frac{1}{2}, \infty)$ である。

証明 2曲線の交点の a の値は $a^{k-1} + \cdots + a = 1$ の解である。この方程式の解は、 $a > 0$ では唯ひとつ存在し、それは $k \rightarrow \infty$ のもとで $a = \frac{1}{2}$ に収束する。このとき b は ∞ に発散する。 $\square$

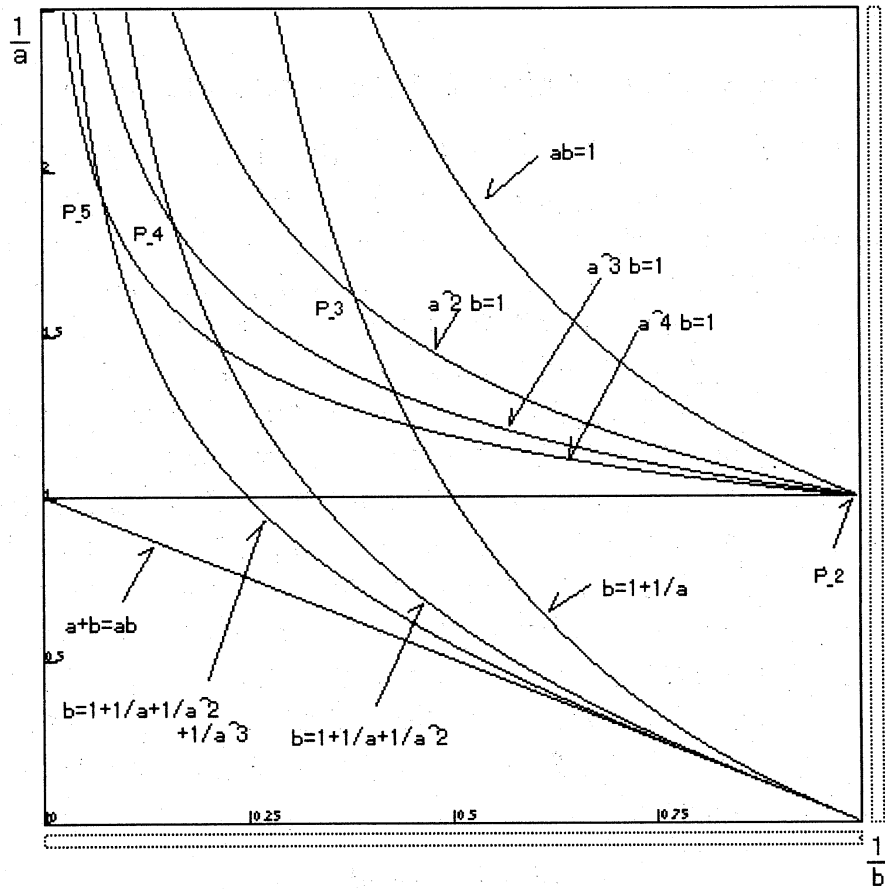


Fig. 6. D の分割図

Remark (a, b) が D_k^A の内部に属するとき、以下のことが [ITN79] によって得られている:

- $C_0 = [f_{a,b}^2(0), x^*]$, $x_* = \frac{1-a-b+a^{k-1}b}{(1-a)(1+a^{k-1}b)}$, $x^* = \frac{-a^{k-2}b^2+b^2-b+ab+1-a}{(1-a)(1-a^{k-2}b^2)}$

とおくと、 x_* , x^* は $f_{a,b}$ の k -周期点であり $f_{a,b}^2(0) < x_* < x^*$ である。さらに $I_{a,b}$ のほとんどすべての点は $f_{a,b}$ の何回目かの反復で区間 C_0 に収束する。

- C_0 は $f_{a,b}^k$ によって不変である。 $f_{a,b}^k|_{C_0}$ の力学系を解析するために新たに関数 $g_{\alpha,\beta}$ を

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha x, & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{\alpha} \\ -\beta x + \frac{\alpha+\beta}{\alpha}, & \text{for } \frac{1}{\alpha} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \alpha > 1, \beta > 0, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 1$$

と定義する。 $g_{\alpha,\beta}$ は「 $\beta < 1$ ならば、 $[0, 1]$ のほとんどすべての点の軌道は、固定点 $x = \frac{\alpha+\beta}{\alpha(\beta+1)}$ に収束する」という性質をもち、 $f_{a,b}^k|_{C_0}$ は $\beta < 1$ であるような $g_{\alpha,\beta}$ と位相共役である。 $g_{\alpha,\beta}$ の吸引的固定点に対応するのは x_* である。従って C_0 内の点の $f_{a,b}^k$ による軌道は x_* に収束する。

Definition 5 f を区間 $I = [c_0, c_l]$ 上の連続写像とする。 I が有限個の部分区間 $I_1 = [c_0, c_1], \dots, I_l = [c_{l-1}, c_l], (c_0 < c_1 < \dots < c_{l-1} < c_l)$ に分割され、各部分区間への f の制限が単調であるとする。このとき点 $c_0, \dots, c_l$ を f の *turning point* とよぶ。

skew tent map $f_{a,b}$ の *turning point* は $x = 0$ である。この *turning point* に関する次の事実を注意しておく。

Lemma 1 $f_{a,b}$ の *turning point* が周期的なとき、それは吸引的ではない。

Proof. $f_{a,b} = f$ と略記する。区間 I_0, I_1 を $I_0 = [f^2(0), 0], I_1 = [0, f(0)]$ とおく。 $D_0 = \{(a, b) \in D; \frac{a+b-ab}{b} \geq \frac{b}{b+1}\}, D_1 = \{(a, b) \in D; \frac{b}{b+1} > \frac{a+b-ab}{b} \geq 1 - \frac{1}{b}\}$ 、上で定義した D_k に対し $D_k^B = \{(a, b) \in D_k; a^{k-1}b > 1, a+b \geq a^{k-1}b^2\}, D_k^* = D_k \setminus (D_k^A \cup D_k^B)$ とし、 $D^* = \{(a, b) \in D; a > 1, \frac{a+b-ab}{b} < \frac{b}{b+1}\}$ とする。もし、ある j に対し f^j の *turning point* が f^j の固定点であるならば $x = 0$ の軌道は周期 j をもつことに注意する。

- $(a, b) \in D_0$ のとき、 $L_0 = [f^2(0), f^4(0)], L_1 = [f^3(0), f(0)]$ とおくと、 $L_0 \cap L_1 = \emptyset, fL_0 = L_1, fL_1 = L_0$ が成り立ち、かつ区間 $I_{a,b} \setminus \{1 - \frac{1}{b}\}$ の点の軌道は L_0 または L_1 に収束する。従って、 $(f^4(0), f^3(0))$ に f の吸引的周期点は存在しない。よって、存在するとしたら $L_0 \cup L_1$ 内であるが、 L_0, L_1 は f によって互いにうつり合うからその周期点は偶数周期を持つ。いま、 $x = 0$ が周期 $2j$ をもつと仮定する。微分可能な $L_0 \cup L_1$ 上の点 x における微分係数は、 $(a, b) \in D_0$ より、 $fL_0 \subset I_1$ であるから、 $|(f^{2j})'(x)| \geq (ab)^j > 1$ である。従って、 $x = 0$ が周期点ならば、吸引的ではない。その近傍での f^{2j} のグラフは、Fig.7 か Fig.8 のようになる。
- $(a, b) \in D_1$ のとき、 f は奇数周期をもつかもされないが、 $fI_0 \subset I_1, b > 1$ が成り立っているため、任意の $j \geq 2$ に対して微分可能な点 x での微分係数は $|(f^j)'(x)| > 1$ をみたす。従って、 $x = 0$ は吸引的ではない。その近傍での f^j のグラフは、Fig.7 か Fig.8 のようになる。
- $(a, b) \in D_k^B$ のとき、 f の k 周期点

$$x^* = \frac{-a^{k-2}b^2 + b^2 - b + ab + 1 - a}{(1-a)(1-a^{k-2}b^2)}$$

が存在する。 $C_0 = [f^2(0), x^*]$ とおく。 C_0 は f^k によって不変なので C_0 にある周期点の周期は k の倍数である。もし、 $x = 0$ が吸引的な周期点になっているならば、その軌道は C_0 を通る。従って、その周期はある j があって $j \times k$ とかける。 C_0 内の f^{jk} が微分可能である点 x での微分係数は、 f による C_0 のうつりかたと $(a, b) \in D_k^B$ より、 $|f^{jk}(x)| \geq (a^{j-1}b)^k > 1$ である。従って $x = 0$ は吸引的ではない。その近傍での f^{jk} のグラフは、Fig.7 か Fig.8 のようになる。

- $(a, b) \in D_k^*$ のとき $x = 0$ の軌道が周期的であるならば、 $x' = f^2(0)$ も周期的になる。 x' が j -周期点であるとする。 $(a, b) \in D_k^*$ より、 $f^{k-1}(x') \geq 0$ かつ、 $i \leq k-2$ に対しては $f^i(x') < 0$ である。 $f^{k-1}(x') = 0$ のときは $j = k$ であるが、区間 I_0 上の点 x' が I_0 に留まれる f の反復の

回数は高々 $k-2$ である。 x' の近傍の微分可能な点 x においては $|(f^j)'(x)| > 1$ が成り立つ。 $f^{k-1}(x') < 0$ のときは、任意の $x < 0$ の軌道が区間 I_0 上に留まるのは高々 $k-2$ 回の f の反復だけである。従って、 $x=0$ の軌道が周期 j をもつとすると $j > k$ であり、 x' の近傍の f^j が微分可能な点 x においては $|(f^j)'(x)| > 1$ となる。従って、 $x=0$ は吸引的ではなく、グラフは Fig.7 か Fig.8 のようになる。

• $(a, b) \in D^*$ のとき $a > 1, b > 1$ より、周期的な *turning point* $x=0$ の近傍では、グラフは Fig.7 か Fig.8 のいずれかのようにになるので、 x は吸引的ではない。

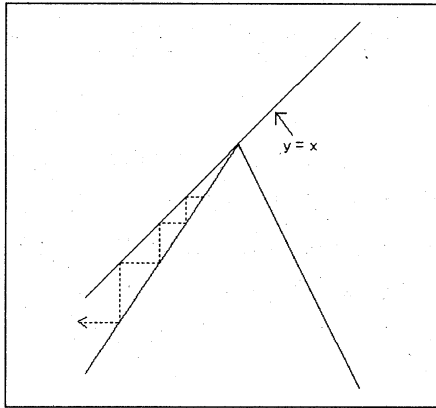


Fig. 7.

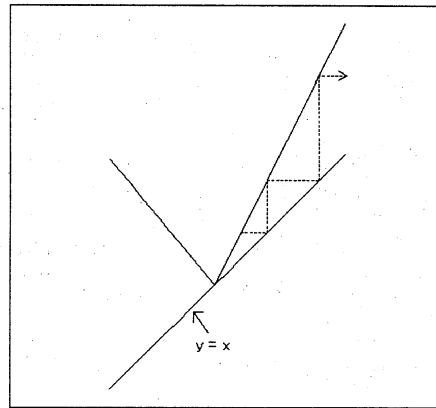


Fig. 8.

• $(a, b) \in D_k^A$ のときで $a^{k-1}b \neq 1$ のとき、

$$x_0 = \frac{-1 + a^{k-2}}{a^{k-2}(1-a)}$$

とおく。 x_0 は $k-2$ 回の f の反復で $x=0$ にうつされる点である。 $a^{k-1}b \neq 1$ のときは **Remark** により、 x_0 の f^k による軌道は、前述の x_* に収束する。従って、*turning point* は吸引的にならない。次に $a^{k-1}b = 1$ のときは $x=0$ の軌道は周期 $2k$ を持つが、その近傍ではグラフは Fig.9 か Fig.10 のようになっていて吸引的ではない。□

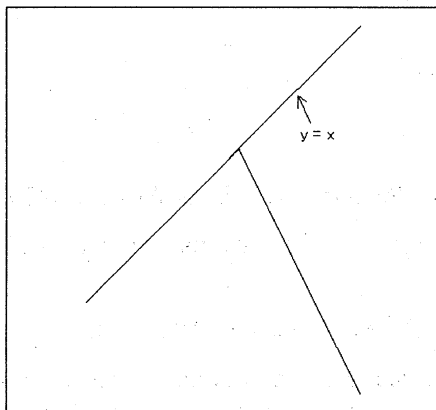


Fig. 9.

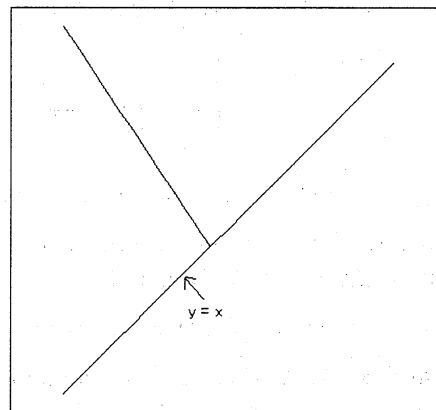


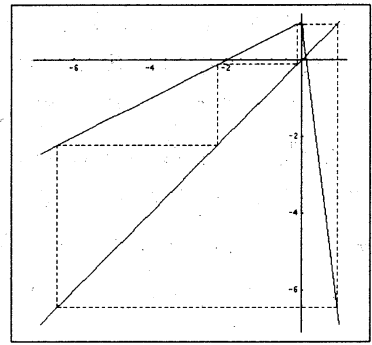
Fig. 10.

吸引的周期軌道を特徴づけるために次の定義をする。

Definition 6 階段型 (stair type) 軌道とは次の条件を満たすときである。

$$O(x) = \{x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\},$$

$$f^k(x) = x < f(x) < \dots < f^{k-2}(x) \leq 0 < f^{k-1}(x).$$



Lemma 2 skew tent map $f_{a,b}$ が吸引的 k -周期軌道を持つための必要十分条件は、パラメータ (a, b) が D_k^A の内部に属することである。

Proof. (a, b) が D_k^A の内部に属するならば、**Remark** により $f_{a,b}$ は吸引的 k -周期点 x_* を持つ。特に、その軌道は階段型である。逆に、 $f_{a,b}$ が吸引的 k -周期点を持つのは (a, b) が D_k^A の内部に属するときに限ることを示す。**Lemma 1** より turning point は吸引的にはならないことから、その近傍の内部に、記号力学系から見て同じ旅程を持つような開区間が取れる。一方、Ito et al [ITN79] により、 $(a, b) \notin \bigcup_{k=2}^{\infty} D_k^A$ ならば旅程との対応は 1 対 1 になる。故に、 $f_{a,b}$ が吸引的周期軌道をもつとしたら、ある k が一意に決まって、 $(a, b) \in D_k^A$ となる。しかし、 D_k^A の境界では J. Milnor [Mil85] の意味での吸引的周期点は存在しない (Fig.9, Fig.10 を参照)。□

又、 $f_{a,b}$ がもつ吸引的周期軌道の個数について次の結果が得られる。

Lemma 3 $f_{a,b}$ は吸引的周期軌道を高々ひとつ持つ。

Proof. $f_{a,b}$ が吸引的 k -周期軌道をもつとする。それは **Lemma 2** により、前述の x_* に他ならない。このことと **Remark** により、 $f_{a,b}$ は吸引的周期軌道を高々ひとつしか持たない。□

Theorem 1 $f_{a,b}$ の吸引的周期点は階段型である。

Proof. 証明は **Lemma 2**、**Lemma 3** から得られる。□

参 考 文 献

- [Dev89] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 1989.
- [ITN79] S. Ito, S. Tanaka, and H. Nakada. On unimodal linear transformations and chaos II. *TOKYO J. MATH.*, 2(2):241–259, 1979.
- [Mil85] J. Milnor. On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.*, 99:177–195, 1985.
- [NY95] H. E. Nusse and J. A. Yorke. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(1):189–207, 1995.