

海棚又は灣の振動に對する海底形狀の影響

理學士 岡 本 元 治・ 郎

緒 言

海底地震等に依つて生ずる津浪などの長波が海棚や入江に到達する場合には其處に固有振動と強制振動とを生ずる。この問題は從來海棚振動として論じられて居る。⁽¹⁾

本論文に於ては、海棚又は矩形の灣の海底の形狀が凹なるか凸なるかに依つて振動の様式に如何なる差異を生ずるかを検討せんとするものである。

海岸は長い直線狀をなし、海岸に近づくに伴ひて深度が減少する海を考へる。即ち海棚の長さを l とし、其の先端での深さを h_0 とすれば、海岸からの距離 x なる點での深さを $h_0\left(\frac{x}{l}\right)^v$ で表はし得るものと假定する。但し v は一つの正數である。

斯くの如き境界の海棚に長波が到達したときの振動の一般式を Stokes の方法にて定める。而して v の種々の値に對する解を可及的廣い範圍にて求める。

次に v が種々の値をとる場合に於て振動の諸要素即ち固有振動の週期並に波長及び強制振動の振幅等を計算して、 v の値に依つて如何なる差異があるかを研究する。特に海底が凹狀をなす場合と凸狀をなす場合との強制振動を比較する。

此の結果は水面が矩形なる灣の場合には其の儘適用出来る。

尙簡單のため、海水の粘性及び地球自轉の效果を無視することにする。

I. 振動の一般式

1. 基本式及び諸條件：一 海岸線は非常に長い直線狀をなし、夫に直角に沖の方へ x 軸をとる。

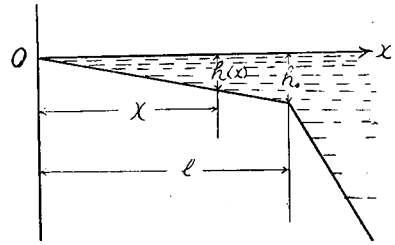
海棚の長さを l とし、其の先端での深さを h_0 とする。 x なる地點での深さ $h(x)$ を $h_0\left(\frac{x}{l}\right)^v$ にて表はし得るものとする。

(1) Nomitsu and Habu: Proper Oscillations of the Sea of Continental Shelf, Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ., 18 (1935), 247.

野滿隆治：棚振動の成立條件と Merian 週期の修正：本誌，本號，38 頁。

今海岸線に直角なる方向の波だけ考へる。

圖 (1)



又、海水の粘性及び地球自轉の效果を無視

(2) し、水平方向の水分子の速度 u が小にして其の乗積の項を無視し得るならば、運動方程式及び連続方程式は夫々次の如く與へられる。

但し ζ は平均海面からの昇降にして、 $h(x)$ に

比して小なりと假定する。即ち

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (hu) \quad (1.2)$$

上の二式より次の關係式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial^2}{\partial x^2} [hu] \quad (1.3)$$

$$\text{又} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \quad (1.4)$$

海岸の間近では深度が小であるから $h(x)$ に比して ζ を無視することが出来ない。それ故に連続方程式は次の如くとすべきである、即ち

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(h+\zeta)u] \quad (1.2')$$

しかし海棚の大部分に於ては式(1.2)が成立するから基本式は式(1.4)を用ふることにする。

海棚の先端に到達したる波による振動の式は次の如くとする。即ち種々の週期の單一弦運動に分解し得られるものとする。依つて

$$|\zeta|_{x=l} = f(t) = \sum_r a_r \sin \tau_r t \quad (1.5)$$

海岸では振動の腹と考へられるから

$$|h(x)|_{x=0} = 0, \quad |\zeta|_{x=0} \neq 0 \quad (1.6)$$

なる條件を満足する。

(2) Proudman は其の著 The Effects on the Sea of Changes in Atmospheric Pressure, M. N. R. A. S. Geophys. Supplement, 2 (1929), 201 に於て、地球自轉のみならず氣壓效果を含めた研究をして居るが、均一深度及び $h(x) = h_0 \left(\frac{x^2}{a^2} \right)$ なる海峡の場合だけを論じて居る。

又、最初の條件としては、水面が靜止して居たものとし

$$|\zeta|_{t=0}=0 \dots\dots\dots(1.7)$$

2. 振動の式：— 微分方程式

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[gh(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \dots\dots\dots(2.1)$$

を次の條件の下に解かんとする。即ち

$$|\zeta|_{x=l} = f(t) = \sum_r a_r \sin \sigma_r t, \dots\dots\dots(2.2)$$

$$|\zeta|_{x=0} \neq 0, \quad |h(x)|_{x=0} = 0, \dots\dots\dots(2.3)$$

$$|\zeta|_{t=0} = 0, \dots\dots\dots(2.4)$$

之を解くのに Stokes の方法を適用する。微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left[gh(x) \frac{dX_s}{dx} \right] + \alpha_s^2 X_s(x) = 0, \dots\dots\dots(2.5)$$

を満足して次の條件を満足する法化されたる直交函數 $X_s(x)$ を考へる。即ち

$$X_s(0) \neq 0, \quad X_s(l) = 0, \dots\dots\dots(2.6)$$

但し α_s は $X_s(l) = 0$ なる條件より決定される常數である。

而して $\zeta(x, t)$ を次の如き級數に展開し得られるものと考へる。即ち

$$\zeta(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} T_s(t) X_s(x) \dots\dots\dots(2.7)$$

$$\text{茲に } T_s(t) = \int_0^t \zeta(\lambda) X_s(\lambda) d\lambda, \quad s=1, 2, 3, \dots\dots\dots(2.8)$$

又次の展開を考へる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[gh(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] = \sum_{s=1}^{\infty} X_s(x) \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[gh(\lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right] X_s(\lambda) d\lambda$$

右邊の積分 I_s は

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[gh(\lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right] X_s(\lambda) d\lambda \\ &= \left| X_s(\lambda) gh(\lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}^t - \int_0^t gh(\lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \frac{dX_s}{d\lambda} d\lambda \\ &= \left| X_s(\lambda) gh(\lambda) \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}^t - \left| \zeta(\lambda) gh(\lambda) \frac{dX_s}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}^t \\ &\quad + \int_0^t \zeta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[gh(\lambda) \frac{dX_s}{d\lambda} \right] d\lambda \end{aligned}$$

式 (2.2), (2.3), (2.5) 及び (2.6) から

$$T_s = -\zeta(l)gh_0X_s'(l) - \alpha_s^2 T_s(l) \dots \dots \dots (2.9)$$

が得られる。依つて $\sqrt{gh_0} \equiv v_0$ とすれば

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[gh(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] = \sum_{s=1}^{\infty} [-v_0^2 X_s'(l) f(l) - \alpha_s^2 T_s(l)] X_s(x) \dots \dots \dots (2.10)$$

式 (2.7) を l に就いて二回微分して

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial l^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d^2 T_s}{dl^2} X_s(x) \dots \dots \dots (2.11)$$

式 (2.10), (2.11) を式 (2.1) に代入して

$$\frac{d^2 T_s}{dl^2} + \alpha_s^2 T_s(l) = -v_0^2 X_s'(l) \left[\sum_r \alpha_r \sin \sigma_r l \right] \dots \dots \dots (2.12)$$

$$s=1, 2, 3, \dots \dots \dots$$

なる微分方程式が得られる。是は強制振動の場合の運動方程式である。

長波が海棚の先端 $x=l$ に到達したる瞬間 $t=0$ なるとき $|\zeta|_{t=0}=0$ なる條件を満足する上の微分方程式の一般解は

$$T_s(l) = c_s \sin \alpha_s l - \sum_r \frac{v_0^2 X_s'(l)}{\alpha_s^2 - \sigma_r^2} \alpha_r \sin \sigma_r l \dots \dots \dots (2.13)$$

である。此の解は強制振動と固有振動との和であつて、固有振動の週期は後段に於て決定する様に $\frac{2\pi}{\alpha_s}$ である。

それ故に振動の一般式は

$$\zeta(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ c_s \sin \alpha_s t - \sum_r \frac{v_0^2 X_s'(l)}{\alpha_s^2 - \sigma_r^2} \alpha_r \sin \sigma_r t \right\} X_s(x) \dots \dots \dots (2.14)$$

強制振動の中固有振動と其の週期が近接するものほど其の振幅が大なることは式 (2.13) にて明示されて居る通りである。

α_s と最も近接せる σ_r を σ_s とし、其の振幅を a_s とする。而して $\sigma_s \equiv \alpha_s + \delta_s$ と置けば $|\delta_s|$ は非常に小である。然るときは

$$- \sum_r \frac{v_0^2 X_s'(l)}{\alpha_s^2 - \sigma_r^2} \alpha_r \sin \sigma_r t \approx \frac{v_0^2 X_s'(l)}{2\delta_s \alpha_s} a_s \sin(\alpha_s + \delta_s) t$$

依つて

$$T_s(l) \approx c_s \sin \sigma_s t + \frac{v_0^2 X_s'(l)}{2\delta_s \alpha_s} a_s \sin(\alpha_s + \delta_s) t \dots \dots \dots (2.13')$$

となる。故に振動の一般式は次の如くなる。即ち

$$\zeta(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ c_s \sin \sigma_s t + \frac{\tau_0^2 X'_s(l)}{2\delta_s \alpha_s} a_s \sin(\alpha_s + \delta_s) t \right\} X_s(x). \quad (2.14')$$

3. 直交函数 $X_s(x)$ の決定: — 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left[gh(x) \frac{dX_s}{dx} \right] + \alpha_s^2 X_s(x) = 0 \quad (3.1)$$

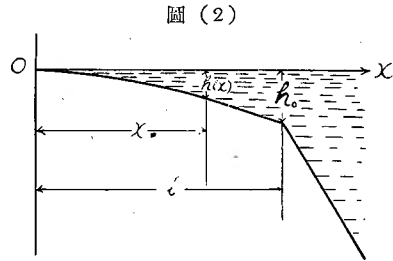
の解にして $X_s(0) \neq 0$ 及び $X_s(l) = 0$ なる条件を満足する法化されたる直交函数 $X_s(x)$ を求めんとする。

今 $h(x) = h_0 \left(\frac{x}{l} \right)^\nu$ と假定し, (i) $\nu > 1$ 及び (ii) $1 > \nu > 0$ の二つの場合に分つて解を求める。

(i) 海底が凸状をなす場合 ($\nu > 1$): — この場合の解を

$$X_s(x) = B_s \left(\frac{x}{l} \right)^{-\frac{m}{n}} J_{\frac{1}{n}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{m}{n}} \right\}$$

とする。但し m, n は正數にして μ_s は $J_{\frac{1}{n}}(\mu_s) = 0$ の s 番目の正根を表はす。又 B は式 (2.8) にて定め得る常數である。然るときは $X_s(0) \neq 0, X_s(l) = 0$ なる条件を満足すること明である。



$$X_s(x) = B_s \left(\frac{x}{l} \right)^{-\frac{m}{n}} J_{\frac{1}{n}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{m}{n}} \right\}, \quad \mu_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{m}{n}} \equiv z$$

として微分方程式 (3.1) に代入して整頓すれば

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_{\frac{1}{n}}(z)}{dz^2} + \frac{\nu + m - \frac{2m}{n} - 1}{m} \frac{1}{z} \frac{dJ_{\frac{1}{n}}(z)}{dz} \\ + \left[\frac{\alpha_s^2 l^{\nu+2m}}{\tau_0^2 m^2 \mu_s^2} z^{2-2m-\nu} - \frac{1}{n} \left(\frac{\nu-1}{m} - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{z^2} \right] J_{\frac{1}{n}}(z) = 0 \end{aligned}$$

となる。依つて

$$\frac{\nu-1}{m} = \frac{2}{n}, \quad 2-\nu=2m, \quad \frac{\alpha_s^2 l^{\nu+2m}}{\tau_0^2 m^2 \mu_s^2} = 1 \quad (3.2)$$

を同時に満足する正數 ν, m, n を決定し得ればよいことになる。

先づ此等の關係より $2 > \nu$ なる範圍での ν でなければならぬことが知られる。而して

$$m = \frac{2-\nu}{2}, \quad \frac{1}{n} = \frac{\nu-1}{2-\nu} \dots\dots\dots (3.3)$$

斯くの如き m, n は幾通も決定される。 ν の種々の値に對する例は表 (I) に示す通りである。

又式 (3.2) より

$$\alpha_s = m\mu_s \frac{v_0}{l} \dots\dots\dots (3.4)$$

茲に μ_s は $J_{\frac{1}{n}}(\mu_s) = 0$ の s 番目の正根である。

(ii) 海底が凹状をなす場合 ($1 > \nu > 0$):

この場合には (i) の場合に於て $1/n$ とある所を $-1/n$ に代替すれば其の他は全然上の場合と同様である。即ち

$$X_s(x) = B_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{m}{n}} J_{-\frac{1}{n}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

にして

$$\frac{\nu-1}{m} = -\frac{2}{n}, \quad 2-\nu=2m, \quad \frac{\alpha_s^2/\nu+2m}{\nu_0^2 m^2 \mu_s^2} = 1 \dots\dots\dots (3.2')$$

を同時に満足する正数 ν, m, n を決定し得ればよいことになる。依つて

$$m = \frac{2-\nu}{2}, \quad \frac{1}{n} = \frac{1-\nu}{2-\nu} \dots\dots\dots (3.3')$$

$$\text{又 } \alpha_s = m\mu_s \frac{v_0}{l} \dots\dots\dots (3.4')$$

茲に μ_s は $J_{-\frac{1}{n}}(\mu_s) = 0$ の s 番目の正根である。

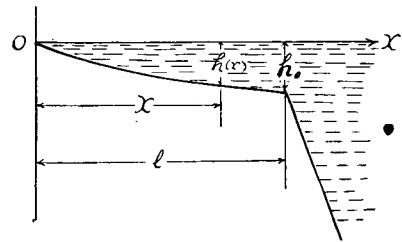
(i) 又は (ii) の特別の場合として $\nu=1$ のときの解, (ii) の特別の場合として $\nu=0$ のときの解が得られる。それ故に $2 > \nu \geq 0$ の範圍に於て所要の解が得られる。

次に係数 B_s を決定する。式 (2.7) より

$$\begin{aligned} T_s &= \int_0^l \zeta(\lambda) X_s(\lambda) d\lambda = B_s \sum_{r=1}^{\infty} T_r B_r \int_0^l J_{\frac{1}{n}} \left\{ \mu_s \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} J_{\frac{1}{n}} \left\{ \mu_r \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{-\frac{2m}{n}} d\lambda \\ &= B_s \sum_{r=1}^{\infty} T_r B_r \frac{l}{m} \int_0^1 \xi J_{\frac{1}{n}} \{ \mu_s \xi \} J_{\frac{1}{n}} \{ \mu_r \xi \} d\xi \end{aligned}$$

然るに $\frac{1}{n} + 1 > 0$ なるときは

圖 (8)



$$\int_0^1 \xi J_{\frac{1}{n}}(\mu_s \xi) J_{\frac{1}{n}}(\mu_r \xi) d\xi = 0, \quad \mu_r \neq \mu_s$$

$$\int_0^1 \xi [J_{\frac{1}{n}}(\mu_s \xi)]^2 d\xi = \frac{1}{2} [J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)]^2.$$

依つて

$$B_s = \left(\frac{2m}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)}$$

となるから

$$X_s(x) = \left(\frac{2m}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{m}{n}} J_{\frac{1}{n}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{m}{n}} \right\}}{J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)} \dots \dots \dots (3.5)$$

$1 > \nu \geq 0$ の場合も同様にして

$$X_s(x) = \left(\frac{2m}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{m}{n}} J_{-\frac{1}{n}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{m}{n}} \right\}}{J_{1-\frac{1}{n}}(\mu_s)} \dots \dots \dots (3.5')$$

上に得たる解の例は表 (I) に示す通りである。

表(I) $X_s(x)$ 及び α_s の例

$h(x)$	$X_s(x)$	α_s
$h_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{5}{3}}$	$\left(\frac{1}{3l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{3}} J_{\frac{2}{3}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}}{J_{\frac{5}{3}}(\mu_s)}$	$\frac{v_0}{6l} \mu_s$
$h_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{1}{2l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} J_1 \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}}{J_{\frac{3}{2}}(\mu_s)}$	$\frac{v_0}{4l} \mu_s$
$h_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}}$	$\left(\frac{2}{3l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{2}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}}{J_{\frac{3}{2}}(\mu_s)}$	$\frac{v_0}{3l} \mu_s$
$h_0 \left(\frac{x}{l}\right)$	$\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_0 \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}}{J_1(\mu_s)}$	$\frac{v_0}{2l} \mu_s$
$h_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{4}{3l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{6}} J_{-\frac{1}{3}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}}{J_{\frac{1}{3}}(\mu_s)}$	$\frac{2v_0}{3l} \mu_s$

$h_0 \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{3}{2l} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}}{J_{\frac{3}{2}}(\mu_s)}$	$\frac{3v_0}{4l} \mu_s$
$h_0 \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{5}{3l} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{4}{3}} \right\}}{J_{\frac{5}{2}}(\mu_s)}$	$\frac{5v_0}{6l} \mu_s$
h_0	$\left(\frac{2}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \mu_s \left(\frac{x}{l} \right) \right\}}{J_{\frac{1}{2}}(\mu_s)}$	$\frac{v_0}{l} \mu_s$

II. 海 棚 の 振 動

4. 計算の方針:—海棚の深度を $h(x)=h_0 \left(\frac{x}{l} \right)^v$ と假定して $2 > v \geq 0$ の範圍に於ての解を得たのである。實測の結果に依つて大觀するに、實際の海は吾人が解を得たる範圍に屬するものと考へられる。

I に於て得たる振動の一般式を適用して振動の諸要素に關する數計算をなさんとする。其等の計算に當つては“ v の値に依つて如何なる差異があるか”といふ點を念頭に置いて計算する。特に(i)海底が凹狀をなす場合と(ii)海底が凸狀をなす場合とを比較する。

海棚の先端に節、海岸に腹があつて、途中で節も腹もない最大週期の振動に就いて考へる。即ち最も生じ易い振動に就いて検討することにする。

それで $s=1$ のときを主として取扱ふことにする

5. 固有振動の週期:—固有振動の最大週期を τ_1 とすれば式(3.4)又は式(3.4')より

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} = \frac{2\pi}{m\mu_1} \frac{l}{v_0} \dots\dots\dots (5.1)$$

茲に μ_1 は $J_{\frac{1}{2}}(\mu_s)=0$ の最小の正根である。

海棚の平均の深さを $\bar{h}$ とすれば

$$\bar{h} = \frac{1}{l} \int_0^l h_0 \left(\frac{x}{l} \right)^v dx = \frac{1}{v+1} h_0.$$

然るに海棚が一様なる深さ $\bar{h}$ にして、其の先端で節、海岸で腹であるときの振動の週期 τ はよく知られて居る如く

$$\tau = \frac{4l}{\sqrt{gh}} = 4 \sqrt{v+1} \frac{l}{v_0} \dots\dots\dots (5.2)$$

又海棚が一様なる深さ h_0 であるときの最大週期 τ_0 は同様に

$$\tau_0 = \frac{4l}{v_0} \dots\dots\dots (5.3)$$

v の種々の値をとるときの $\tau_1/\bar{\tau}$ 及び τ_1/τ_0 を示せば表 (II) の如くである。

表(II) 固有振動の週期

v	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
τ_1/τ_0	1.886	1.640	1.500	1.310	1.157	1.112	1.076	1.000
$\tau_1/\bar{\tau}$	1.125	1.037	0.983	0.927	0.898	0.903	0.923	1.000

表(II)に示せる計算の結果に依つて次の事柄が知られる。

- (1) $v=0$ 即ち一様なる深さ h_0 なる場合の週期 τ_0 に比して他の何れの場合の週期も大にして、 v の値が大なるほど其の時の週期が大である。

海底が凸状をなす場合には τ_0 の1.31倍より大にして、2 倍近くにまで及ぶ時がある。

- (2) 平均の深さ $\bar{h}$ で一様の深度と假定せる場合の週期 $\bar{\tau}$ に比しては10%程度の大小がある。

v が略 $\frac{4}{3}$ より小なるとき τ_1 は $\bar{\tau}$ より小である。而して v が大略 $\frac{2}{3}$ のとき $\tau_1/\bar{\tau}$ が最小である。

6. 固有振動の波長：— 海棚に於ても長波であるから其の傳播速度は $\sqrt{g h(x)}$ である。

故に固有振動の波長を λ_s とすれば

$$\lambda_s = \sqrt{g h(x)} \tau_s = v_0 \left(\frac{v}{l} \right)^{\frac{v}{2}} \tau_s = \frac{2\pi}{m v_s} \left(\frac{v}{l} \right)^{\frac{v}{2}} l \dots\dots\dots (6.1)$$

である。斯く波長 λ_s は場所に依つて異なり、海棚の先端で最も大にして、海岸では小さく數學的には零である。

平均の波長を $\bar{\lambda}_s$ とすれば

$$\bar{\lambda}_s = \frac{2\pi}{m v_s} \cdot \frac{2}{v+2} l \dots\dots\dots (6.2)$$

v の種々の値に對する $(\lambda_1)_{x=l}$ 及び $\bar{\lambda}_1$ を計算すれば表(III)に示す通りの結果となる。

表(III) 固有振動の波長

ν	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
$(\lambda_1)_{x=l}$	7.34 <i>l</i>	6.66 <i>l</i>	6.00 <i>l</i>	5.24 <i>l</i>	4.63 <i>l</i>	4.46 <i>l</i>	4.31 <i>l</i>	4 <i>l</i>
$\bar{\lambda}_1$	4.01 <i>l</i>	3.75 <i>l</i>	3.60 <i>l</i>	3.50 <i>l</i>	3.47 <i>l</i>	3.56 <i>l</i>	3.69 <i>l</i>	4 <i>l</i>

上の表に示せる結果に依れば次の事項が知られる。

- (1) 海棚の先端に於ての波長は $\nu=0$ のときの波長 $4l$ より大である。 ν が2に近きときは $\nu=0$ のときの波長の二倍近くである。
- (2) 平均の波長 $\bar{\lambda}_1$ は深さが一様に h_0 なる場合に比して、小なる場合が多い。而して $\bar{\lambda}_1$ は $\nu=0$ のときの波長 $4l$ に比して10%程度の差異がある。

7. 強制振動の振幅：— 強制振動の振幅を A_s とすれば式(2.14')

$$A_s = \frac{\tau_0^2 X_s'(l)}{2\delta_s \alpha_s} a_s X_s(1) \dots\dots\dots (7.1)$$

にて與へられる。 $\frac{2\pi}{\alpha_s + \delta_s} = \tau_s - \Delta\tau_s$ とすれば $\Delta\tau_s = \frac{\delta_s}{\alpha_s} \tau_s$ であるから

$$\frac{1}{\delta_s \alpha_s} = \frac{1}{\alpha_s^2} \frac{\tau_s}{\Delta\tau_s} = \frac{l^2}{m^2 \mu_s^2 \tau_0^2} \frac{\tau_s}{\Delta\tau_s} \dots\dots\dots (7.2)$$

然るに式(3.5)から

$$X_s(1) = \left(\frac{2m}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_s}{l}\right)^{-\frac{m}{n}} \frac{J_{\frac{1}{n}}\left\{\mu_s \left(\frac{\tau_s}{l}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}}{J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)} \dots\dots\dots (7.3)$$

但し $0 < \nu < 1$ のときは $\frac{1}{n}$ を $-\frac{1}{n}$ に替へる。依つて

$$X_s'(l) = -\frac{2^{\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{2}}}{l^{\frac{3}{2}}} \mu_s \dots\dots\dots (7.4)$$

式 (7.2), (7.3), 及び (7.4) を式 (7.1) に代入すれば

$$A_s = \frac{1}{\mu_s^{1-\frac{1}{n}} J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)} \left(\frac{\tau_s}{\Delta\tau_s}\right) a_s \frac{J_{\frac{1}{n}}\left\{\mu_s \left(\frac{\tau_s}{l}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}}{\left\{\mu_s \left(\frac{\tau_s}{l}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{\frac{1}{n}}} \dots\dots\dots (7.5)$$

が得られる。故に海岸に於ける振幅を $|A_s|_{x=0}$ とすれば

$$|A_s|_{x=0} = \frac{1}{\mu^{1-\frac{1}{n}} \int_{1+\frac{1}{n}}^{\nu_s} (\nu_s)} \frac{\tau_s}{\Delta\tau_s} a_s \dots\dots\dots (7.6)$$

$|A_1|_{x=0} / \frac{\tau_1}{\Delta\tau_1} a_1$ を數例に就いて計算すれば次の如くなる。

ν	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{ A_1 _{x=0}}{a_1 \tau_1 / \Delta\tau_1}$	2.620	1.292	0.801	0.768	0.803	0.859

$|A_1|_{x=0}$ は他の要素が同様なれば海底が凸狀をなす場合に大となる傾向が認められる。

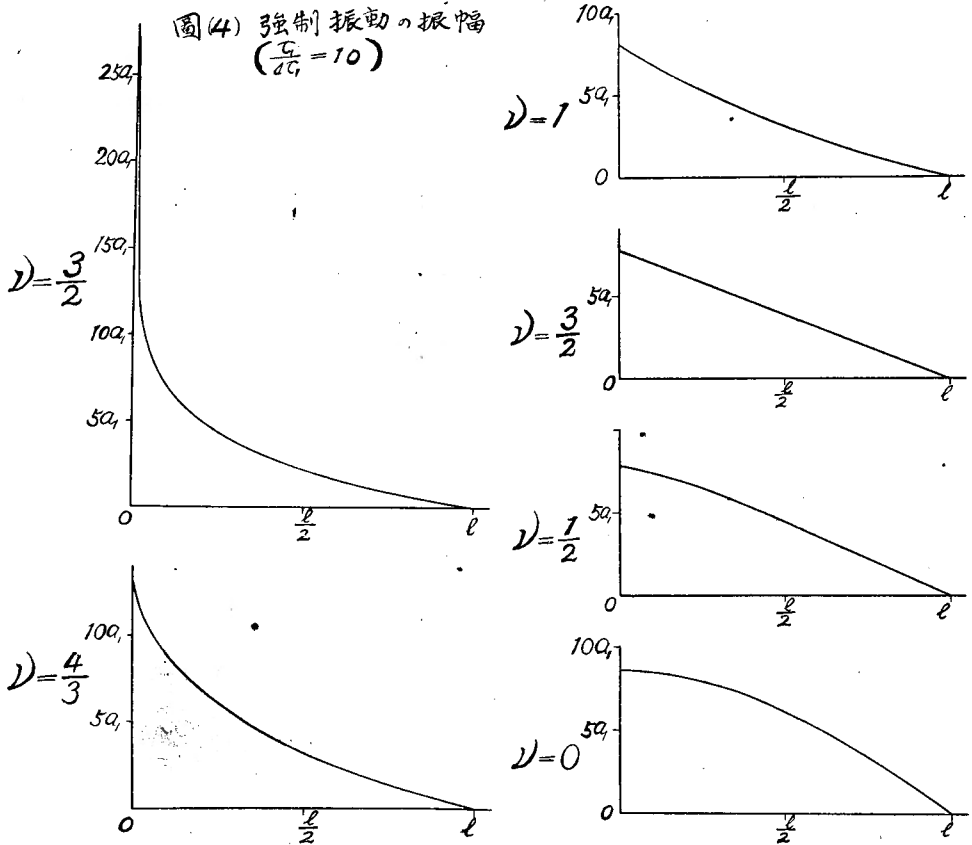
強制振動の振幅は主として $\frac{\tau_s}{\Delta\tau_s}$ にて倍加される。而して海棚に於ての振幅の分布は

$$J_{\frac{1}{n}} \left\{ \nu_s \left(\frac{x}{l} \right)^m \right\} / \left\{ \nu_s \left(\frac{x}{l} \right)^m \right\} \text{ に比例する。}$$

最大週期の強制振動の振幅 A_1 を數例に就いて $\frac{x}{l} = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ の 11 の地點での値を計算する。但し $\frac{\tau_1}{\Delta\tau_1}$ は 10 にとることとする。その計算の結果を示せば表(IV)の通りである。又夫を圖示すれば圖(4)の通りになる。

表(IV) 強制振動の振幅 $|A_1|/a \left(\frac{\tau_1}{\Delta\tau_1} = 10 \right)$

$\frac{x}{l} \backslash \nu$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
0.0	26.20	12.92	8.01	7.58	8.03	8.59
0.1	6.81	8.80	6.89	6.83	7.17	8.48
0.2	4.93	6.77	5.86	6.23	6.61	8.17
0.3	3.69	5.31	4.87	5.52	6.01	7.65
0.4	2.78	4.13	4.01	4.69	5.30	6.88
0.5	2.07	3.15	3.19	3.81	4.34	6.07
0.6	1.49	2.30	2.44	3.05	3.47	5.05
0.7	1.02	1.59	1.75	2.23	2.69	3.90
0.8	0.63	1.02	1.11	1.47	1.75	2.65
0.9	0.29	0.48	0.53	0.71	0.88	1.34
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



強制振動の振幅の分布に關して次の事柄が知られる。即ち

- (1) 一般に沖合より海岸に近づくに伴ひて漸次増大して、海岸にて最大となる。
- (2) 長波が沖合より海岸に近づくに伴ひて其の強制振動の振幅が増大する模様を此等の六つの例に就いて見れば次の通りである。
- (i) $\nu > \frac{2}{3}$ なるときは沖合での増加の割合が比較的に小で海岸に近づいて増加の割合が大である。

海岸の附近で急激に其の振幅を増大する傾向は ν が大なるほど顯著である。

- (ii) 大略 $\nu = \frac{2}{3}$ なるときは略一樣なる割合で増大する。
- (iii) $0 \leq \nu < \frac{2}{3}$ なるときは沖合での増加の割合が大にして海岸の附近では小である。

海岸の附近で緩慢に其の振幅を増大する傾向は ν が小なるほど顯著である。

他の例に就いて推算せる結果も上の六つ例と同様の傾向が認められる。

8. 水分子の速度：— 強制振動 ζ_s に對應する水分子の速度 u_s を考へる。式(2.14')より

$$\zeta_s = \frac{v_0^2 X'_s(l)}{2\delta_s \alpha_s} a_s X_s(v) \sin(\alpha_s + \delta_s) l \dots \dots \dots (8.1)$$

にして、式(7.5)を代入すれば

$$\zeta_s = -\frac{1}{\mu^{1-\frac{1}{n}} J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)} \cdot \frac{J_{\frac{1}{n}}\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}}{\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{\tau_s}{\Delta \tau_s}\right) a_s \sin(\alpha_s + \delta_s) l$$

となる。依つて

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial v} = \frac{m}{l} \mu_s \frac{\mu^{\frac{1}{n}}}{J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)} \cdot \left(\frac{v}{l}\right)^{2m-1} \frac{J_{1+\frac{1}{n}}\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}}{\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^{1+\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\tau_s}{\Delta \tau_s} a_s \sin(\alpha_s + \delta_s) l \dots \dots \dots (8.2)$$

然るに式(1.1)より

$$\frac{\partial u_s}{\partial l} = -g \frac{\partial \zeta_s}{\partial v}$$

式(8.2)を l に就いて積分して、 $\alpha_s = m\mu_s \frac{v_0}{l}$ の關係を代入すれば

$$u_s(v, l) = -\frac{\mu^{\frac{1}{n}}}{J_{1+\frac{1}{n}}(\mu_s)} \left(\frac{v}{l}\right)^{2m-1} \frac{J_{1+\frac{1}{n}}\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}}{\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^{1+\frac{1}{n}}} \sqrt{\frac{g}{h_0}} \frac{\tau_s}{\Delta \tau_s} \cdot \frac{\alpha_s}{\alpha_s + \delta_s} a_s \cos(\alpha_s + \delta_s) l \dots \dots \dots (8.3)$$

となる。水分子の速度は海面上昇と $\frac{\pi}{2}$ 丈の位相の差で振動する。其の振動の振幅は海棚の各點に於て異なる。其の振幅の分布は次の因子に比例する。即ち

$$\left(\frac{v}{l}\right)^{2m-1} \frac{J_{1+\frac{1}{n}}\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}}{\left\{\mu_s \left(\frac{v}{l}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^{1+\frac{1}{n}}}$$

にて振幅の分布は與へられる。

第二の因子は海棚の先端に於て最小値をとりて、海岸に近づくに伴つて單一に増大し、海岸で最大値をとる。而して其の増大する割合は強制振動の振幅の分布と同様にして、海

岸附近での増大の割合が ν が大なるときほど急激であり、 ν が小なるときほど緩慢である。

第一の因子は m の値、從つて ν の値に依つて其の事情が異なる。

式(3.3)又は式(3.3')によれば $2m=2-\nu$ であるから

$$2m-1=1-\nu$$

である。故に

(i) $\nu > 1$ の場合

$2m-1=1-\nu < 0$ であるから $\left(\frac{\nu}{l}\right)^{2m-1}$ は海棚の先端にて 1 にして海岸に近づくに伴ひて増大し海岸では非常に大となる。而して其の傾向は ν が大なるほど顯著である。

(ii) $\nu = 1$ の場合

$2m-1=0$ であるから $\left(\frac{\nu}{l}\right)^{2m-1} = 1$ である。

(iii) $0 < \nu < 1$ の場合

$2m-1=1-\nu > 0$ であるから $\left(\frac{\nu}{l}\right)^{2m-1}$ は海棚の先端にて 1 にして海岸に近づくに伴ひて減少し海岸では非常に小となる。而して其の傾向は ν が小なるほど顯著である。

(iv) $\nu = 0$ の場合

$2m-1=1$ であるから $\left(\frac{\nu}{l}\right)^{2m-1}$ は海棚の先端にて 1 にして海岸に近づくに伴ひて直線的に減少し、海岸では非常に小である。

實際の津浪は海岸間近にて振動は破れて、流動となるべきも次の如き傾向があると結論することが出来る。

(1) 海底が凸狀をなす海では、海岸の近くに於て非常に強い水勢となる可能性が大であると考へられる。從つて斯くの如き海では、津浪が發達し易い。

(2) 海底が凹狀をなす海では、海岸の近くに於て水勢が非常に弱い。從つて斯くの如き海では津浪が發達する可能性が少ない。

各節の計算の結果は其の儘矩形の灣に適用される。

總 括

以上の計算の結果の中、主なる事柄を列擧すれば次の通りである。

(1) 固有振動の週期は ν が大なるほど大である。

(2) 強制振動の振幅は「強制振動と固有振動との週期の差 $\Delta\tau$ の固有振動の週期 τ に對

する逆比 $\frac{\tau}{\Delta\tau}$ 」に依つて倍加される。

海岸に近づくに伴ひて其の振幅が増大する模様は (i) 海底が凸狀をなす海では、海岸の近くで急激に増大し、其の反對に (ii) 海底が凹狀をなす海では海岸の近くで緩慢に増加する。

(3) 水分子の速度は振動し、其の振幅は (i) 海底が凸狀をなす海では海岸に近づくに伴ひて非常に増大する。其の反對に (ii) 海底が凹狀をなす海では海岸に近づくに伴ひて減少する。

されば海底が凸狀をなす海では長波が沖合より海岸に近づくに伴ひて非常に大なる水勢となりて、津浪が大に發達するものと考へられる。

此の見地に於て三陸地方の津浪に對して、現著者は非常に興味を感じるものである。

終に本研究中、野滿教授より種々懇切なる御忠言を賜はり、深く感謝の意を表する。