

可換偏微分作用素環の構成と Abel 多様体上の層の Fourier 変換について

神戸大学自然科学 中屋敷 厚
(Nakayashiki Atsushi)

§0 背景

可換常微分作用素環 (ODO's) を決定する問題は 100 年程の歴史を持ち (c.f. Intro. of [2]) その研究の初めから、代数曲線と関連することが、その具体形の決定を通して示されてくる (ref. [2]). これら初期の研究はしばらく孤立していたが、'70-'80 に発展した Soliton 理論の中で (初期の研究とは独立に) 復活し、ODO's を決定する問題は、決定的な進歩を遂げることになった。すなわち、Novikov S.P. Krichever I. Drinfeld V. Mumford D. その他 の人々等の研究を経て、1989 年 Mulase M. により、ODO's の "geometric objects" による分類が完成された。この "geometric objects" の詳しい研究又は、深い意味は、これからの研究で明らかにされていくであろうと期待される。ODO's の具体形を決

定する問題について分かっていることは、 $\text{rank} \geq 2$ の場合は、非常に少ない。(rank $\approx$ 対応する geometric object の一部である sheaf の rank) (c.f. [5] and ref. of [5]).

ここでは、話を高次元化することをも目的とし、ある種の geometric objects から、可換偏微分作用素環 (CPDO's) を構成する1つの一般的方法を示す。

§1 例と概念

例 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ を楕円曲線

$\wp(x)$ を Weierstrass の $\wp$ -関数
($\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$ を満たす)

$$P = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - 2\wp(x)$$

$$Q = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 - 3\wp(x)\frac{d}{dx} - \frac{3}{2}\wp'(x)$$

とする。と、

$$[P, Q] = 0$$

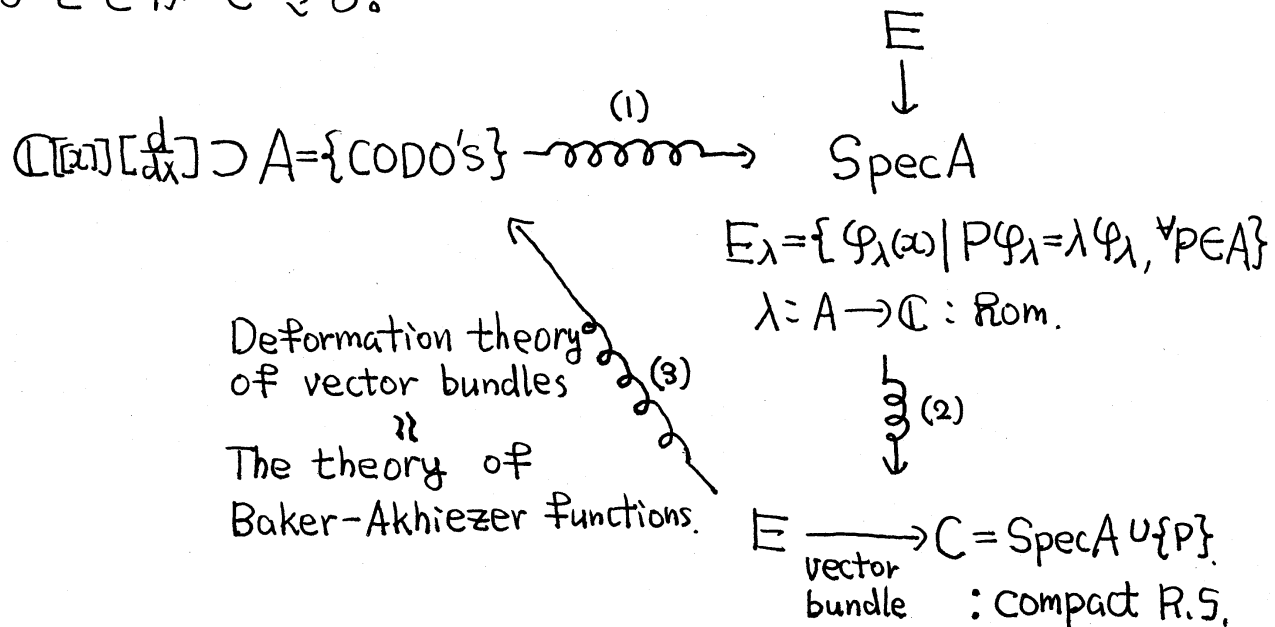
$$(2Q)^2 = 4P^3 - g_2P - g_3$$

$$\{R \in \mathbb{C}[[x]][\frac{d}{dx}] \mid [R, P] = 0\} \triangleq \mathbb{C}[P, Q]$$

最後の式は、左辺が可換環となり、右辺と同型であることを意味する。特に、 $\mathbb{C}[P, Q]$ は極大可換微分作

用素環である。

さて、可換常微分作用素環と Geometry との関係は、非常に単純化して言うとな次のような図にまとめることができる。



意味

(1): A の同時固有関数も考えることで、 $\text{Spec } A$ 上の sheaf を構成する。

(2): コンパクト化。

(3): geometric objects から $\overset{C}{\text{CODOs}}$ の構成。概念的には、ここが一番 non-trivial な process である。以下は、この部分の高次元への拡張である。

§2 Baker-Akhiezer (BA)-module

以下話はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上とする。

$X = V/\Gamma$: abelian var. $V: \mathbb{C}$ -vect. space, $V \supset \Gamma$: lattice

$\hat{X} = \bar{V}^*/\Gamma^*$: the dual abelian var. $\bar{V}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-anti-linear}}(V, \mathbb{C})$

$\Gamma^* = \{ \varphi \in V^* \mid \text{Im } \varphi(\gamma) \in \mathbb{Z}, \forall \gamma \in \Gamma \},$

P : the Poincaré bundle s.t. $P_0 \triangleq 1_{\hat{X}}$ $P_{\hat{0}} \triangleq 1_X$

$\square\square\square$. $P_x = P|_{\{x\} \times \hat{X}}$, $P_{\hat{x}} = P|_{X \times \{\hat{x}\}}$ とおく。

$X^q = \{ (P_x, \nabla) \mid \nabla: P_x \rightarrow P_x \otimes \Omega_x^1 : \text{hol. flat connection} \} \rightarrow X$
 $(P_x, \nabla) \xrightarrow{\psi} x$

: an affine bundle (fibre $\triangleq H^0(\hat{X}, \Omega_{\hat{X}}^1)$)

D : an ample irred. divisor.

Prop. $\exists! \Delta_D: X - D \rightarrow X^q$: meromorphic section

s.t. Δ_D は、 D に高々 1 位の pole しか持たない。

Cocycle によつてすべてを記述することにより
 Δ_D を具体的に決定する。まず ρ は、次の cocycle で
 与えられる:

$$\bar{\rho}((\gamma, \ell), (x, y)) = e^{-\pi i \text{Im} \langle \gamma, \ell \rangle} \cdot e^{\pi (\langle \bar{x}, \ell \rangle + \langle \gamma, y \rangle) + \frac{\pi}{2} (\langle \bar{\gamma}, \ell \rangle + \langle \gamma, \ell \rangle)}$$

$(\gamma, \ell) \in \Gamma \times \Gamma^*$, $(x, y) \in V \times \bar{V}^*$, $\langle, \rangle: V \otimes \bar{V}^* \rightarrow \mathbb{C}$ pairing

Lemma Γ の $V \times \bar{V}$ への作用を次で定義する:

$$\gamma: (x, \xi) \mapsto (x + \gamma, \xi - \bar{\gamma}).$$

$$\Rightarrow X^q \triangleq V \times \bar{V} / \Gamma$$

証明: $V = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{C} e_i$, $\bar{V}^* = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{C} e_i^*$ $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$
 と base をとり, その座標を使って

$\nabla(\alpha, y) = dy + \pi \langle \bar{z}(\alpha), dy \rangle : P_\alpha \rightarrow P_\alpha \otimes \Omega_X^1$
 と書く。ただし, $V \ni \alpha = \sum_{i=1}^g x_i e_i$, $\bar{V}^* \ni y = \sum_{i=1}^g y_i e_i^*$,
 $\langle \bar{z}(\alpha), dy \rangle = \sum_{i=1}^g \bar{z}_i(\alpha) dy_i \in H^0(\hat{X}, \Omega_X^1) \simeq \bar{V}$ である。
 $U(\alpha, y)$ を $V \times \bar{V}^*$ 上の関数で

$$U(\alpha + \gamma, y + l) = \bar{j}_P((\gamma, l), (\alpha, y)) U(\alpha, y) \quad \dots (*)$$

を満たすものとする。 $\nabla(\alpha, y)$ が X^g の section となるための必要十分条件は

$$(\nabla U)(\alpha + \gamma, y + l) = \bar{j}_P((\gamma, l), (\alpha, y)) U(\alpha, y) \quad \dots (**)$$

が (*) を満たす任意の U について 成り立つことである。
 計算により

$$(\nabla U)(\alpha + \gamma, y + l) = \bar{j}_P((\gamma, l), (\alpha, y)) (dy + \pi \langle \bar{z}(\alpha + \gamma), dy \rangle) U(\alpha, y)$$

従って $(**) \Leftrightarrow \bar{z}(\alpha + \gamma) = \bar{z}(\alpha) - \gamma \quad \text{Q.E.D.}$

divisor D に対応する line bundle を $[D]$, その Appell-Humbert の標準形で書いた cocycle を $\bar{j}_D(\gamma, \alpha)$, hermitian form を $H = (h_{ij})$ とする。 $[D]$ の section と V 上の関数で $U(\alpha + \gamma) = \bar{j}_D(\gamma, \alpha) U(\alpha)$ と変換するものとも同一視する。

Lemma $u \in \Gamma(X, [D])$ s.t. $(u=0)=D$ とする。

$f_i(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^g h^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \log u(x)$, $H^{-1} = (h^{ij})$ とおく。

$\Rightarrow (f_i(x))_{i=1}^g$ は $X^g \rightarrow X-D$ の section である。

Remark: u は cocycle に対して unique up to const.

特に, $(f_i)_{i=1}^g$ は cocycle に対して unique である。

Def. $\Delta_D = (f_i)_{i=1}^g$ を canonical section と呼ぶ。

以上で Prop は証明された。 V 上の正則関数で $g(x+y) = g(x) - \bar{y}_i$ を満たすものは存在しないので, Δ_D の各成分は D に 1 位の pole を持つことが分かる。

Cor. $\{\Delta \mid \Delta: X^g \rightarrow X-D \text{ の section}\} = \Delta_D + H^0(X-D, \mathcal{O}_X^{\oplus g})$.

§3 $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module structure on $\mathcal{P}|_{(X-D) \times \hat{X}}$

$\mathcal{O}_{\hat{X}} = \bigcup_n \mathcal{O}_{\hat{X}}(n)$ を $\hat{X}$ 上の微分作用素全体のなす環の層とする。 $\mathcal{O}_{\hat{X}}(n)$ は n 階以下の作用素のなす部分層である。 次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X^g \times \hat{X} \\
 & \nearrow \Delta_D \times \text{id} & \downarrow \pi \times \text{id} \\
 (X-D) \times \hat{X} & \xrightarrow{\iota \times \text{id}} & X \times \hat{X}
 \end{array}$$

π, ι はそれぞれ自然な projection, injection である。
 X^q の定義から, $(\pi \times \text{id})^* \mathcal{P}$ には, 自然な $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module の
 構造が入る。従って, 上の可換図式より, $(\iota \times \text{id})^* \mathcal{P}$
 は, 自然に $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module となる。

以下 π_i ($i=1, 2$) を $X \times \hat{X}$ から 第 i 成分への projection
 とする。

Def. F を coherent $\mathcal{O}_X$ -module, $F(*D) = \varinjlim_n F \otimes \mathcal{O}_X(nD)$ と
 する。この時 $\hat{X}$ 上の $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module を

$$\mathcal{F}(X, D, F) = \pi_{2*} (\pi_1^* F(*D) \otimes \mathcal{P})$$

で定義する。ただし, $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module の構造は, $(\iota \times \text{id})^* \mathcal{P}$ か
 ら誘導されるもので入れる。 $\mathcal{F}(X, D, F)$ を, 3つ組
 (X, D, F) の Baker-Arhiezer (BA)-module と呼ぶ。

Remark (1) $A = H^0(X-D, \mathcal{O}_X)$ を X の affine 環とす
 と, 定義から, $\mathcal{F}(X, D, F)$ は, 左 $\mathcal{O}_{\hat{X}}$, 右 A -bimodule になる。

(2) $\mathcal{F}(X, D, F)(n) = \pi_{2*} (\pi_1^* F(nD) \otimes \mathcal{P})$ とすると,

$\mathcal{O}_{\hat{X}}(k) \mathcal{F}(X, D, F)(n) \subset \mathcal{F}(X, D, F)(n+k)$ がすべての n, k
 について成り立つ。

§4 BA-module の構造と CPDO's

以下 (F, D) は " $\text{For}_1^{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_D) = 0$, D は non-singular "

を満たすとする。 $\text{gr} \mathcal{F}(X, D, F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{gr}_n \mathcal{F}(X, D, F)$

$\text{gr}_m \mathcal{F}(X, D, F) = \mathcal{F}(X, D, F)^{(m)} / \mathcal{F}(X, D, F)^{(m-1)}$ とおく。

Theorem 1. $\text{gr} \mathcal{F}(X, D, F)$ は coherent $\text{gr} \mathcal{O}_X$ -module である。
 特に, $\mathcal{F}(X, D, F)$ は coherent $\mathcal{O}_X$ -module となる。又, $N_F \in \mathbb{Z}$ を
 $H^i(X, F_{\hat{x}}(n)) = 0 \quad \forall i \geq 1 \quad \forall \hat{x} \in \hat{X} \quad \forall n \geq N_F - 1$ を満たす
 ものとする。 $\text{gr} \mathcal{F}(X, D, F)$ は $\text{gr} \mathcal{O}_X$ 上 $\bigoplus_{n=-\infty}^{N_F+g-1} \text{gr}_m \mathcal{F}(X, D, F)$ で
 生成される。ここで, $F_{\hat{x}}(n) = P_{\hat{x}} \otimes F \otimes \mathcal{O}_X(nD)$ 。

CPDO's に対応する 3 つ組 (X, D, F) のクラスを設定する。

Def. (X, D, F) が type(CC) for $\hat{x} \in \hat{X}$ とは

- (1) $H^i(X, F_{\hat{x}}) = 0 \quad \forall i \geq 0$
- (2) $H^i(X, F_{\hat{x}}(\mathbb{R})) = 0 \quad \forall i \geq 1 \text{ \& } \forall \mathbb{R} \geq 1$
- (3) $H^i(X, F_{\hat{x}}(-\mathbb{R})) = 0 \quad \forall i \neq g \text{ \& } \forall \mathbb{R} \geq 1$

が成り立つ時をいう。

Theorem 2. (X, D, F) を type(CC) for $\hat{x} \in \hat{X}$ とし, $r = \text{rank } F$ とする。 $\text{gr} \mathcal{F}(X, D, F)_{\hat{x}}$ は rank $r \cdot D^g$ の quasi-free $\text{gr} \mathcal{O}_{X, \hat{x}}$ module である。特に, $\mathcal{F}(X, D, F)_{\hat{x}}$ は rank $r \cdot D^g$ の free $\mathcal{O}_{X, \hat{x}}$ module である。さらに, $\text{gr} \mathcal{F}(X, D, F)_{\hat{x}}$ は $\bigoplus_{n=1}^g \text{gr}_m \mathcal{F}(X, D, F)_{\hat{x}}$ で $\text{gr} \mathcal{O}_{X, \hat{x}}$ 上生成される。ここで, D^g は D の g 回自己交点数, $g = \dim X$ である。

また L complex mfd $\mathbb{Z}$ 上の graded $\text{gr} \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$ module M が quasi-free であるとは, graded module として

$$\exists \{a_i\}, M \subseteq \bigoplus \text{gr} \mathcal{O}_Z(a_i) \quad \text{gr}_m \mathcal{O}_Z(a_i) = \text{gr}_{m+a_i} \mathcal{O}_Z$$

なる同型がある場合を言う。

Cor. Theorem 2 と同じ条件を仮定し、 $A_{X,D} = H^0(X-D, \mathcal{O}_X)$ とおく。 $\{u_i\}_{i=1}^N$ ($N = r \cdot D^*$) を $(X, D, F)_\lambda$ の 1 つの $\mathcal{O}_{\lambda, \hat{\lambda}}$ free base とし、 $\Phi = {}^t(u_1, \dots, u_N)$ とおく。この時

$$\tau_\Phi : A_{X,D} \longrightarrow \text{Mat}(N \times N, \mathcal{O}_{\lambda, \hat{\lambda}})$$

を $\# \Phi = \tau_\Phi(\#) \Phi$ ($\# \in A_{X,D}$) で定義すると、 τ_Φ は ring monomorphism となる。

$\tau_\Phi(A_{X,D})$ は、可換偏微分作用素環である。

Theorem 3. Th. 2 及び Cor. と同じ状況を仮定する。

$\lambda : A_{X,D} \rightarrow \mathbb{C}$ を ring hom. とする。同時固有値方程式系 ($\hat{\lambda}$ のまわりで local に考える)

$$M_\lambda : \quad \tau_\Phi(\#) {}^t(v_i)_{i=1}^N = \lambda_\# {}^t(v_i)_{i=1}^N \quad \# \in A_{X,D}$$

の characteristic variety $SS(M_\lambda)$ は zero section である。

§5 Type (CC) の例.

Mukai M. による Fourier 変換の定義を復習する ([1]). $\mathcal{O}_X$ -module の category から $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module の category $\wedge$ の functor $\hat{\mathcal{F}}$ を

$$\hat{\mathcal{F}}(F) = \pi_{2*}(\pi_1^* F \otimes \mathcal{P}), \quad F : \mathcal{O}_X\text{-module}$$

で定義する。

Def. (Mukai) F を coherent $\mathcal{O}_X$ -module とする。

F に対して, W.I.T of index i が成り立つとは, $R^j \hat{\mathcal{Q}}(F) = 0$ が $\forall j \neq i$ について成り立つ時を言う。又, F に対して, I.T. of index i が成り立つとは, $H^j(X, F_{\hat{x}}) = 0$ が $\forall j \neq i, \forall \hat{x} \in \hat{X}$ について成り立つ場合を言う。 F に対して, W.I.T or I.T of index i が成り立つ時, $\hat{F} := R^i \hat{\mathcal{Q}} F$ を F の Fourier 変換と呼ぶ。

Example (Homogeneous vector bundle)

F が homog. vect. bdl. とは, 次の同値な条件 (1) 及び (2) が成り立つ時を言う:

(1) $T_x^* F \cong F \quad \forall x \in X$, ここで $T_x: X \rightarrow X$ は $y \mapsto x+y$.

(2) F に対して, W.I.T of index $g = \dim X$ が成り立ち, $\text{Supp } \hat{F}$ は有限個の点になる。

Prop. H を homog. vect. bdl., D を non-sing ample irred. divisor, $\hat{x} \notin \text{Supp } \hat{H}$ とする。この時

(1) (X, D, H) は type (CC) for $\hat{x}$.

(2) $\text{gr}_r^{\mathcal{Q}}(X, D, F)_{\hat{x}} \cong \bigoplus_{i=1}^g (\text{gr}_{\hat{x}, \hat{x}}^{\mathcal{Q}}(-i)) \oplus b_i^{(g)}$

$$b_i^{(g)} = \frac{r \cdot D^g}{g!} a_i^{(g)}, \quad a_n^{(g)} = n^g - (n-1)^g - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(g)} \cdot {}_g H_{n-k}, \quad a_1^{(g)} = 1.$$

${}_g H_r$ は, g から r を取る重複組合せの数。

Example (Picard bundle)

C を genus g の compact Riemann surface, P を C の 1 点,
 X を C の Jacobian variety とする。 X の主偏極により, X
 と $\hat{X}$ とは, canonical に同型である。 C の $\hat{X}$ への埋め込みを
 1 つ固定する。 $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ ならば, $\mathcal{O}_C(nP)$ に対して, I.T. of index 1
 が成り立つので, $F_n = \widehat{\mathcal{O}_C(nP)}$ は, vector bundle であり
 rank $g-n-1$ の Picard bundle と呼ぶ。

Prop. F_n を Picard bundle, D_R を $R \oplus$ と linearly equivalent
 な non-singular irreducible divisor, $-\lambda \notin C$ とする。 ここで
 $\oplus$ は, X の主偏極 とする。 $g+nR < 0$ とする。 この時

(1) (X, D_R, F_n) は type (CC) for λ 。

(2) $\text{gr } \mathcal{F}(X, D_R, F_n) \simeq \bigoplus_{i=1}^g (\text{gr } \mathcal{O}_{\hat{X}, \lambda}(-i))^{\oplus C_i^{(g,n,R)}}$

$$C_m^{(g,n,R)} = rR^g \cdot (m^g - (m-1)^g) + gR^{g-1} \cdot (m^{g-1} - (m-1)^{g-1}) - \sum_{j=1}^{m-1} C_j^{(g,n,R)} \cdot gH_{m-j}$$

$$C_1^{(g,n,R)} = rR^g + gR^{g-1}, \quad r = g-n-1.$$

References

- [1] S. Mukai : Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, Nagoya Math. J. Vol. **81** (1981) 153-175.
- [2] M. Mulase : Category of Vector Bundles on Algebraic Curves and Infinite Dimensional Grassmanians, Intern. J. of Math. **1** (1990) 293-342
- [3] A. Nakayashiki : Structure of Baker-Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian Varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems, Duke Math. J. Vol. **62** No. 2 (1991) 315-358
- [4] A. Nakayashiki : Commuting Partial Differential Operators and Vector Bundles over Abelian Varieties, to appear in Amer. J. Math.
- [5] E. Previato and G. Wilson : Vector Bundles over Curves and Solutions of the KP equations, Proc. Sympos. Pure Math. **49**, AMS, (1989) 553-569