

無限分解可能な確率過程

東京教育大 丸山 儀四郎

§1 無限分解可能な確率過程と Lévy 過程

確率空間 $(S, \mathcal{F}, P)$ 上の 実数値 確率過程 $\xi = (\xi_t(x), t \in T, x \in S)$, $T = (-\infty, \infty)$ に対し, 任意の T の部分集合 $\lambda = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ に対して, $\xi_\lambda = (\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n})$ が無限分解可能な法則に従うとき, ξ は無限分解可能な確率過程 (infinitely divisible process)

(IDP と略記) とよぶ。今後は便宜上 Gauss 成分の IDP を対象とする。

T の有限部分集合の全体 Λ に包含関係 $\lambda \subset \mu$ によって $\lambda \leq \mu$ と順序づけられた有向集合と見做す。 $\mathbb{R}^T$ (又は $\mathbb{R}^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$) の t -成分を $f(t, x)$ とかく。 ξ は

$$(1.1) \quad X = \bigcup_{t \in T} \{x : f(t, x) \neq 0\}$$

$$X_\lambda = \bigcup_{t \in \lambda} \{x : x \in \mathbb{R}^\lambda, f(t, x) \neq 0\}$$

とかく。 $\mathbb{R}^\lambda$ は集合 $\mathbb{R}^n$ と同一。

$f_{\lambda\mu}$ ($\lambda \leq \mu$) は $\mathbb{R}^\mu$ から $\mathbb{R}^\lambda$ への射影, $f_{\lambda\mu}$

$\in R^T$ から R^1 の射影とす; $\lambda, \mu \in I$ は恒等変換.

(1.2) $D_{1\mu} = f_{1\mu}^{-1} X_1$, $D_{1\infty} = f_{1\infty}^{-1} X_1$, $1 \leq \mu$
 とし, $D_{1\mu}$, $D_{1\infty}$ を定義域とす写像 $g_{1\mu}$,
 $g_{1\infty}$ を

$$(1.3) \quad g_{1\mu} x = f_{1\mu} x, \quad x \in D_{1\mu}$$

$$g_{1\infty} x = f_{1\infty} x, \quad x \in D_{1\infty}$$

と定義す. すると

$$(1.4) \quad g_{1\mu} g_{\mu\nu} = g_{1\nu}, \quad g_{1\mu} g_{\mu\infty} = g_{1\infty}, \quad 1 \leq \mu \leq \nu,$$

$$(1.5) \quad D_{\mu\nu} \supset D_{1\nu}, \quad D_{\mu\infty} \supset D_{1\infty}, \quad 1 \leq \mu \leq \nu,$$

$$X = \bigcup_{1 \in I} D_{1\infty},$$

$$\alpha \cup \beta = \gamma \text{ ならば } D_{\gamma\infty} = D_{\alpha\infty} \cup D_{\beta\infty}.$$

1) Λ の増加列 (1) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ と, λ_k に対する列 (2) $\{x_i \in X_{\lambda_i}, 1 \leq i < \infty\}$ を条件

$$(1.6) \quad x_i = g_{\lambda_i \lambda_{i+1}} x_{i+1}, \quad 1 \leq i < \infty$$

を満たすように与えらる. すると $f_{\lambda\mu}$ は同様に, $g_{\lambda\mu}$ は, 条件を満たす.

(P) $x_\infty \in X$ に対して (1.7) $x_i = g_{1,\infty} x_\infty, 1 \leq i < \infty$.

5. 有有限次元空間上の特性函数を用いて表わせば

$$C_\lambda(z) = E e^{i(z, \xi_\lambda)_n}$$

$$(1.8) = \exp \left\{ \int_{X_\lambda} \left[e^{i(z, u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^n a(u_k) z_k \right] Q_\lambda(du) + i(b_\lambda, z)_n \right\},$$

ただし $\lambda = (t_1, \dots, t_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$

$b_\lambda = (b_{\lambda 1}, \dots, b_{\lambda n}) \in \mathbb{R}^n, a(x)$

$= x \quad (|x| \leq 1), = 1 \quad (|x| > 1); (\cdot)_n$

は $\mathbb{R}^n$ の内積, Q_λ は $X_\lambda = \mathbb{R}^n - \{0\}$ 上の Lévy 測度で, 従って

$$\int_{X_\lambda} \frac{|u|_n^2}{1 + |u|_n^2} Q_\lambda(du) < \infty,$$

すなわち $| \cdot |_n$ は $\mathbb{R}^n$ の距離。

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $X_\lambda \quad (\lambda = (t_1, \dots, t_n))$ 上のホールドラン過程 B_λ とする。

1° $\lambda \leq \mu$ に対して $g_{\lambda\mu}$ は $(D_{\lambda\mu}, D_{\lambda\mu} B_\mu, Q_\mu, \mathcal{L}_n(X_\lambda, B_\lambda, Q_\lambda))$ の homomorphism, $Q_\lambda = g_{\lambda\mu} Q_\mu$, 任意 T 上の実函数 $\phi(t), t \in T$,

かに存在して

$$(1.9) \quad b_{\lambda k} = b(t_k), \quad 1 \leq k \leq n, \\ \lambda = (t_1, \dots, t_n),$$

すなわち $b_{\lambda} = (b_{\lambda 1}, \dots, b_{\lambda n})$ は (1.8) に定まるもの。

証明 明らかに $\lambda = (t_1, \dots, t_n)$, $\mu = (t_1, \dots, t_n, t_{n+1})$ とおいて命題を証明すればよい。 $z' = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u' = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とおけば

$$C_{\lambda}(z) = C_{\lambda'}(z') \Big|_{z_{n+1}=0}$$

であるから

$$(1.10) \quad C_{\lambda}(z) = \exp \left\{ \int_{X_{\mu}} (e^{i(z, u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^n a(u_k) z_k) Q_{\mu}(du) \right. \\ \left. + i \sum_{k=1}^n b_{\mu k} z_k \right\}.$$

(1.10) の右辺の積分を計算して

$$(1.11) \quad \int_{X_{\mu} \cap (u_1^2 + \dots + u_n^2 \neq 0)} + \int_{X_{\mu} \cap (u_1 = \dots = u_n = 0)} \\ \times (e^{i(z, u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^n a(u_k) z_k) Q_{\mu}(du') \\ = \int_{D_{\lambda \mu}} (e^{i(z, g_{\lambda \mu} u')_n} - 1 - \sum_{k=1}^n a(u_k) z_k) Q_{\mu}(du')$$

$$= \int_{D_\lambda} (e^{i(2, u)_m} - 1 - \sum_{k=1}^n a(u_k) z_k) g_{\lambda\mu} Q_\mu(du),$$

右に
 $g_{\lambda\mu} Q_\mu$ は homomorphism $g_{\lambda\mu}$ により Q_μ から X_λ に導
 かれた測度で $\mathbb{R}^{(n)} - \{0\}$ のボレル集合 $A^{(n)}$ に対し

$$g_{\lambda\mu} Q_\mu(A^{(n)}) = Q_\mu(g_{\lambda\mu}^{-1} A^{(n)}).$$

(1.10) の右辺と (1.11) の右辺を比較して,

$$(1.12) \quad Q_\lambda = g_{\lambda\mu} Q_\mu$$

$$(1.13) \quad b_{\lambda k} = b_{\mu k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

(1.13) は, T 上の実函数 $b(t)$ が存在して (1.9)
 が成立する $= t$ である。かくて定まる $b(t)$
 を T の平均函数とよぶ。(5.6) の平均 $b(t)$ である $= t$ 意味
 する t のことはない。

上記から, Levy measure の system に對して
 n 次元空間の system $\{X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda\}$ が定ま
 る, $\mathcal{B}_\lambda$ は位相的 σ -代数, Q_λ は σ -有限
 な Radon measure, 即ち任意の $E \in \mathcal{B}_\lambda$, $\delta > 0$,
 $Q_\lambda(E) < \infty$, に對して, コンパクトな $K_\delta \subset E$
 が存在して, $Q_\lambda(E - K_\delta) < \delta$.

$\lambda \leq \mu$, $\lambda, \mu \in I$, に對して領域 $D_{\lambda\mu} \subset X_\mu$ か
 ら X_λ への連続写像から, $(D_{\lambda\mu}, D_{\lambda\mu}\mathcal{B}_\mu, Q_\mu)$
 から $(X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda)$ への準同型写像 $g_{\lambda\mu}$, i.e.
 (であるような)

$$(1.14) \quad g_{\lambda\mu}^{-1} \mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu \mathcal{D}_{\lambda\mu}$$

$$Q_\mu(g_{\lambda\mu}^{-1} E) = Q_\lambda(E), \quad E \in \mathcal{B}_\lambda,$$

$$g_{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu} \quad (\lambda \leq \mu \leq \nu);$$

す. 1.14 の要素 $\lambda \in \Lambda$ に対して 集合 $\mathcal{D}_{\lambda\infty} \subset X$ から X 上へ, 写像 $g_{\lambda\infty}$ を

$$(1.15) \quad g_{\lambda\mu} g_{\mu\infty} = g_{\lambda\infty}, \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_{\lambda\infty} = X$$

とすることができる。また $g_{\lambda\mu}, g_{\lambda\infty}$ は条件 (P) を満たす。これは容易に示される。

$$\mathcal{B}_\lambda^* = g_{\lambda\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\infty), \quad Q_\infty(A^*) = Q_\lambda(g_{\lambda\infty} A^*) \\ A^* \in \mathcal{B}_\lambda^*$$

とある。

$$\mathcal{B}_\lambda^* \subset \mathcal{B}_\mu^* \quad (\lambda \leq \mu),$$

Q_∞ の定義は consistent, i.e., $A^* \in \mathcal{B}_\lambda^* \cap \mathcal{B}_\mu^*$ であるならば $Q_\lambda(g_{\lambda\infty} A^*) = Q_\mu(g_{\mu\infty} A^*)$ である。

$$\mathcal{B}_\infty = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda^*$$

とある。これは $\mathcal{B}_\infty$ は有限加法的環であって $(X, \mathcal{B}_\infty, Q_\infty)$ は有限加法的測度空間である。次の基本定理は

定理 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}_\infty$ から生成される最小の σ -環とすれば, Q_∞ は $\mathcal{B}$ 上の測度 Q に一致する。

拡張される。一般に, $(X, \mathcal{B}, Q)$ は σ -有限ではない。

この結果は Bochner の定理 [] の変形であり、
て概略の要約を手順で証明される。

1° $\mathcal{B}_0^\lambda = \mathcal{D}_{\lambda\infty} \mathcal{B}_0$ とおけば $(\mathcal{D}_{\lambda\infty}, \mathcal{B}_0^\lambda, Q_0)$
は有限測度的な測度空間である。

2° $(\mathcal{D}_{\lambda\infty}, \mathcal{B}_0^\lambda, Q_0)$ は σ -有限, σ -加法的な測度空間 $(\mathcal{D}_{\lambda\infty}, \mathcal{B}^\lambda, Q)$ に拡張
(一意に) される。

この命題の証明は Bochner [] と同様である。
3. X_λ は σ -有限であるから, $\mathcal{D}_{\lambda\infty}$ は可数, 即ち
$$\mathcal{D}_{\lambda\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathcal{B}_0^\lambda, \quad Q_0(E_n) < \infty,$$

 E_n は互に disjoint. 証明のためにはつぎの二ことを示
せばよい: $S_n^* \in \mathcal{B}_0^\lambda, S_1^* \supset S_2^* \supset \dots, Q_0(S_1^*) < \infty,$
 $Q_0(S_n^*) \geq \alpha > 0, \alpha$ は n に無関係, ならば
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^* \neq \emptyset$$

Λ の有向性をを用いて, つぎのように整理することが出来る。
 Λ の増加列 $\lambda_n (\geq \lambda), 1 \leq n < \infty$, と $S_n \in \mathcal{B}_{\lambda_n}$ か
あって,

$$S_n^* = f_{\lambda_n \infty}^{-1} S_n, \quad 1 \leq n < \infty,$$

$$\text{コンパクトな } \tilde{K}_n \subset S_n \text{ と } Q_{\lambda_n}(S_n - \tilde{K}_n) \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}},$$

と表わすことができる),

$$K_n^* = \bigcap_{\nu=1}^n g_{\lambda_\nu \infty}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$$

と表わすことができる. $S_n^* \supset K_n^*$, また $Q_0(S_n^*) - Q_0(K_n^*) \leq \frac{\alpha}{2}$ であるから, $Q_0(K_n^*) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$. また -

$$\bigcap_{\nu=1}^n g_{\lambda_\nu \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_\nu) \quad (g_{\lambda_n \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_n) = \tilde{K}_n \text{ は 2-1-1 の場合})$$

は 2-1-1 の場合であるから

$$(1.16) \quad K_n \equiv g_{\lambda_n \infty}(K_n^*) = \bigcap_{\nu=1}^n g_{\lambda_\nu \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$$

と 2-1-1 の場合であり, $Q_{\lambda_n}(K_n) = Q_0(K_n^*) > 0$,

従って $K_n \neq \emptyset$. したがって, $(K_n, \lambda_n, 1 \leq n < \infty)$

の列 $(L_n, \mu_n, 1 \leq n < \infty)$ と $x_n \in L_n, 1 \leq n < \infty$,

に対して $x_n = g_{\mu_n \mu_{n+1}} x_{n+1}$ と表わすことができる (P)

より $x_\infty \in D_{\mu, \infty}$ に対して, $x_n = g_{\mu_n \infty} x_\infty \in L_n$

と表わす, $x_\infty \in g_{\mu_n \infty}^{-1} L_n = K_{m_n}^*$. 従って

$$x_\infty \in \bigcap_{n \geq 1} K_{m_n}^* = \bigcap_{n \geq 1} K_n^* \subset \bigcap_{n \geq 1} S_n^*.$$

明らかで $\lambda \leq \mu$ である

$$(1.17) \quad (D_{\lambda \infty}, B^\lambda, Q) \subset (D_{\mu \infty}, B^\mu, Q)$$

B, B' は M, M' 上の σ -代数とすると

は, 2つの測度空間 $(M, B, \mu), (M', B', \mu')$ に対して:

$D \equiv M \cap M' \in B \cap B', D \cap B = D \cap B', D \cap B \text{ 上 } \mu = \mu'$

と表わすとき, 両測度空間は互に延長であるという。

(1.17) の関係より, 任意の λ, μ に対して $(D_{100}, \mathcal{B}^1, Q)$ と $(D_{\mu 0}, \mathcal{B}^\mu, Q)$ は互に延長になる。2 " 2。

$$(1.18) \quad \mathcal{B} = \left\{ \Gamma \mid \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n, \Gamma_n \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}^\lambda \right\}$$

とあるは " $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}_0$ の 1 次定する最小の σ -ring である。

(1.17) の関係より, Γ_n は互に disjoint, λ_n がいずれも λ である。

$$(1.19) \quad \Gamma_n \in \mathcal{B}^{\lambda_n}, \quad 1 \leq n < \infty,$$

とある = である。2。2。2。

$$(1.20) \quad Q(\Gamma) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\lambda_n}(\Gamma_n)$$

とある Q は定義する。2 と Q の定義は consistent であり, Q は σ -additive である。2。2。2。

任意の $A \in \mathcal{B}$ 上で Q は σ -finite, (A, Q) は σ -有限な測度空間であり, かくして集合 $A, B \in \mathcal{B}$ は測度空間として互に延長になる。2。2。2。

函数 $f(x) \geq 0$ に対して $\text{Car } f = \{x : f(x) \neq 0\} \in \mathcal{B}$

なる $X_0 \subset X$ が $X_0 \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ を満足するものである。

これは, $\text{Car } f \subset D \in \mathcal{B}$ である D に対して

$$\int_{X_0} f(x) Q(dx) \equiv \int_{X_0 \cap D} f(x) Q(dx)$$

とある。左辺を定義すれば" (右辺は通常の素数で定まる)
 との他は $\mathbb{D}$ のヒルベルト空間保である。この左辺をもつて X 上の f の積分を定義する。

§2 Poisson random measure.

$(X, \mathcal{B}, Q)$ を測度空間, $\mathcal{B}$ は X 上の σ -ring とする (X は必ずしも σ -finite でない). $\mathcal{C} = \{A \mid A \in \mathcal{B}, Q(A) < \infty\}$ とおき, $(\pi(A), A \in \mathcal{C})$ は Q に対応する Poisson random measure, i.e. $\pi(A)$ は $E(\pi(A)) = Q(A)$ を満たし Poisson 分布に従い, $A_i \in \mathcal{C}$, A_i は互に disjoint, $1 \leq i \leq n$, ならば $(\pi(A_i), 1 \leq i \leq n)$ は独立な変数である。

$\mathcal{F}$ を条件:

$$(2.1) \quad \text{Car } f \in \mathcal{B}, \quad \int_X \frac{f^2(x)}{1+f^2(x)} Q(dx) < \infty$$

を満たす可測な実函数の族 ($\longleftrightarrow \text{Car } f \cap (f(x) \leq a) \in \mathcal{B}$) とする。 $f \in \mathcal{F}$ かつ $f \geq 0$

$$(2.2) \quad I(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{in prob.} \left(\int_{|f(x)| > \varepsilon} f(x) \pi(dx) - \int_{|f(x)| > \varepsilon} a(f(x)) Q(dx) \right)$$

が存在する。

$f_k \in \mathcal{G}$, $1 \leq k \leq n$, かつ $I(f_k)$ の値は
特性関数の対数

$$\log E \exp \left(i \sum_{k=1}^n z_k I(f_k) \right)$$

$$(2.3) = \int_X \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n z_k f_k(x) \right) - 1 - i \sum_{k=1}^n z_k a(f_k(x)) \right] Q(dx),$$

から得られる。

1° $\{I(f_k), f_k \in \mathcal{G}, 1 \leq k \leq n\}$ が独立な確率変数であるための必要充分な条件は $\text{Car } f_k$, $1 \leq k \leq n$, が Q -測度 Q の集合と無視して, 互に disjoint になることである。

このことは (2.3) を用いて容易に証明される。

定理 (1.12), (1.13) をみたす関数 $\ell(t)$, $t \in T$, と X_λ 上の測度 Q_λ , $\lambda \in \Lambda$ から成るものは, $Q_\lambda, \ell(t) \in \text{Lévy 測度, 平均関数とする IDP が存在する。 IDP } \xi \text{ から成るものは, Poisson random measure を用いて } \xi \text{ と同じ法則に従う IDP を構成する} \text{ こと} \text{ ができる。}$

証明 $\pi \in \mathcal{Q}$ に対して Poisson random measure とする。すると $x \in X$ の t -座標 $f(t, x)$,

は

$$\int \frac{f^2(t, x)}{1 + f^2(t, x)} Q(dx) = \int \frac{x^2}{1 + x^2} Q_{\{t\}}(dx) < \infty,$$

$\mathbb{R} \cap (x \neq 0)$

である。

さらに $f(t, x) \in \mathcal{G}$.

$$y_t = I(f(t, x)) + b(t), \quad t \in T$$

とある。 $\lambda = (t_1, \dots, t_m) \subset T$, $x = (x_{t_1}, \dots, x_{t_m})$,

$z = (z_{t_1}, \dots, z_{t_m}) \in \mathbb{R}^m$ に対して, $y_\lambda = (y_{t_1}, \dots, y_{t_m})$

の特性函数, 対数函数は

$$\log C(z) = \int \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^m f(t_k, x) z_{t_k} \right) - 1 \right.$$

$$(2.4) \quad \left. - i \sum_{k=1}^m a(f(t_k, x)) z_{t_k} \right] Q(dx) + i \sum_{k=1}^m b(t_k) z_{t_k}$$

$$= \int g(x) Q(dx) + i \sum_{k=1}^m b(t_k) z_{t_k}$$

すなわち

$$h(x) = \exp \left(i (x, z)_\lambda \right) - 1 - i \sum a(x) z_k, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

とある。これは $g_{\lambda \infty} x = (f(t_1, x), \dots, f(t_m, x))$, $x \in X$

であり, 従って

$$\begin{aligned} \int g(x) Q(dx) &= \int h(g_{\lambda \infty} x) Q(dx) = \int_{X_\lambda} h(x) g_{\lambda \infty} Q(dx) \\ &= \int_{X_\lambda} h(x) Q_\lambda(dx), \end{aligned}$$

$\pi \in (2, 4)$ の右側に代入すれば $C(x)$ は与えられた
 IDP の有限次元の射影空間の特性函数に等し
 くなる。

以上、一般の IDP の構成を述べたが、これより
 "regularity" をもつ IDP を与える。これに精
 く (おける) といはてゐる。この条件は 確率連続な
 のを与えてくれる。

2° IDP が 確率連続であるための必要条
 件は

(a) $b(t)$ は連続

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} Q_{s,t}(|x-y| > \delta, x^2+y^2 \neq 0) = 0$

(c) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\substack{|x-y| \leq 1 \\ x^2+y^2 \neq 0}} (x-y)^2 Q_{s,t}(dx, dy) = 0$

が成立するといふことである。これより $Q_{s,t}$ は (ξ_s, ξ_t) の
 Lévy measure である。

2° の (a) (b) (c) が満足され、かつ ξ が
 確率連続になるときは Q は σ -有限である。

以下に証明を述べる。

3° $\mathcal{F}_0$ の $(A), (B), (C)$ が満足されるは, つぎのよう
な $X_0 \in \mathcal{B}$ かとれる: 任意の $A \in \mathcal{B}$ と $\varepsilon > 0$ に対し,
 ε の $B_\varepsilon \in X_0 \cap \mathcal{B}$ が存在して

$$Q(A - B_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$\mathcal{F}$ が確率連続であることは Q は有限に σ -
有限になる。これとは $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ が独立な
変数系である, Q は X の分割な部分集合の上
に集中するといふことができる, このとき Q は σ -有限
になる。

さて $\mathcal{F}$ が確率連続であるとき, 3° で述べた
 X_0 に Q が制限するといふことで $\mathcal{F}_0$ の $\mathcal{B}$ の元
は一般に σ -有限であるから, Q は $(X_0$ 上に制
限) σ -有限になる, $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $Q(E_n)$
 $< \infty$. また容易にさように, $f(t, x) \in E$
 $= E_n$, $1 \leq n$, かつ制限したものが $f_0(t, x)$, Q
が E に制限したものが Q_E とかかは

$\lim_{t \rightarrow 0} Q_E(|f_0(t, x) - f_0(0, x)| > \delta) = 0$
が成立する。これより $f_0(t, x)$, Q が可測変形かと
れる。従って $f(t, x)$, $x \in X_0$, Q が可測変形かと
とれる。

$\mathcal{F}$ が定常過程である, $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_1'$ (法則

同値), $\tau \in \mathbb{R}$ $\lambda = (t_1, \dots, t_n)$, $\lambda' = (t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$. $\tau = \varepsilon$ から $b(t) = \text{constant}$, $Q_\lambda = Q_{\lambda'} = Q$,
 従って, $x \in X$, $x = \{f(t, x), t \in T\} \rightarrow$
 $T_\tau x = \{f(t + \tau, x), t \in T\} \in X$ とおけば
 T_τ は可算 X 上の flow (measure 変換) であり,
 任意の可算集合 $E \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対して,
 $Q((f(t_1, x), \dots, f(t_n, x)) \in E)$
 $= Q((f(t_1 + \tau, x), \dots, f(t_n + \tau, x)) \in E).$

また $T_\tau \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ であることは証明される。 $Q_\lambda = Q_\lambda$
 から $Q(T_\tau A) = Q(A)$, $A \in \mathcal{B}$, であり, 従
 って T_τ は測度空間 $(X, \mathcal{B}, Q)$ 上の flow
 であり, 定常過程 S は $I(f(0, T_\tau x)) + b$
 と法則同値に存在する, T_τ on X は可測
 とは限らない。また $T_\tau \in X_0$ に制限すると, 正確
 な意味で, これは flow になる。 — T_τ は X_0 の
 1-1 変換である。これは技術的な問題で
 あるが, 別に " T_τ と同等な可測な flow S_τ " を適
 当な空間 Ω 上にとり, その上に Poisson random
 measure を移して $y_t(\omega) = I(f(S_t \omega)) + b$ とし
 形で S と法則同値な定常過程を構成する。
 定常な IDP の種の性質については別の機会
 に述べる。