

マルティンゲールへのポテンシャル論的アプローチ

東大理 篠原昌彦

§ 1 P. A. Meyer は [1] の中でマルティンゲールとポテンシャル論的に扱う方法を与えている。即ち、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subset \mathcal{F}$ の n に関して単調増加な sub- σ -field とする。但し $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ は time parameter である。 $S = \Omega \times \mathbb{N}^+$ なる直積空間を考え、 S 上の σ -field として、 S の部分集合の中で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times \{n\}$ なる形の部分集合 (但し $A_n \in \mathcal{F}_n$) 全体を考える。各 $\mathcal{F}_n$ が σ -field である故、この形の部分集合全体が σ -field を成す。この σ -field を $\mathcal{F}$ と置く。 S の上で定義され、実数値 ($\pm\infty$ をも許す) をとる $\mathcal{F}$ -可測関数 $X(\omega, n)$ に対して、 n を固定して、これを Ω の上の関数と考えると、 $\mathcal{F}_n$ -可測関数となる。逆に $\{X_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ なる Ω 上の実数値可測関数列が与えられて、各 X_n は $\mathcal{F}_n$ -可測であるとする、これを直積空間 S の上の関数と考えれば $\mathcal{F}$ -可測となる。従って、状態空間 $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$ とした $\{\mathcal{F}_n\}$ に関する確率過程と、 S から $[-\infty, +\infty]$ への $\mathcal{F}$ -可測関数と

の間に一対一の対応がつか、両者は同一視できる。(以下 Ω , $\mathcal{F}$, P , $\mathcal{F}_n$ を固定し、確率過程と言えは $\{\mathcal{F}_n\}$ に関するものを意味するものとする。) 今、各 $\mathcal{F}_n$ に関しての条件付確率が意味をもつような確率過程 $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ に対して、新しい確率過程 $\{(N \cdot X)_n\}$ を $(N \cdot X)_n \equiv E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ で定義すると確率過程から確率過程への写像 N は各 n に対して、その値を P -a.e で定める。言い換えれば $\mathcal{O}$ を $\mathcal{F}$ の sub-family で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times \{n\}$ (但し $A_n \in \mathcal{F}_n$, $P(A_n) = 0$) なる形の集合全体とすれば、 S 上の $\mathcal{F}$ -可測関数は写像 N に依って、 $\mathcal{O}$ の集合の上での値の不正確土 ~~を~~ 別の $\mathcal{F}$ -可測関数に写される。この N に関してのポテンシャル論を考えると、excessive function (又は invariant function) には supermartingale (又は martingale) が対応する。

§2. 上の N を一般化して、次の formulation を行う。即ち、 S をある抽象空間、 $\mathcal{F}$ をその上の σ -field とする。 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{F}$ の sub-family で、可算無限個の和集合をとる操作に関して閉じているものとする。 P^0 を S から $[0, +\infty]$ への $\mathcal{F}$ -可測関数の全体とする。 P^0 の元に次の同値関係を入れる。

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists A \in \mathcal{O}, f(s) = g(s) \text{ on } S - A$$

この同値関係に依って $P = P^0 / \sim$ と定義する。 $\mathcal{O}$ が測度空間の測度零の集合全体である場合に、その測度空間上の関数空

同に対して行う様に、 $\mathcal{P}$ が可算無限個の和で閉じている故に、 $\mathcal{P}$ の上の加法、乗法、可算極限操作等が自然に定義される。以下では関数空間の場合と同じく、 $\mathcal{P}^0$ の元とその元が属する同値類を区別しない。又 $\mathcal{P}$ の集合に因しても、その定義関数が同値になる様なクラスと、それに属する集合は同一視することとする。この formulation での potential 論的な定理を述べる。

(定義1) $\mathcal{P}$ から $\mathcal{P}$ への写像 N は次の条件 (1), (2) を同時に満たす時、sub-markov pseudo kernel (以下単に kernel) と呼ぶ。

$$(1) \lambda_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3, \dots \quad \text{に対して} \quad N\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i N f_i$$

(2) $N1 \leq 1$, 但し 1 は値が 1 の定数値関数。

(定義2) $\mathcal{P}$ の f は $f < +\infty$ で且つ $Nf \leq f$ の時 (N に因して) excessive であると言う。不等号が等号の時 invariant と呼ばれる。又条件 $f < +\infty$ を除いた時には広義に excessive (又は広義に invariant) と呼ばれる。

(定義3) 写像 $G = \sum_{n=0}^{\infty} N^n$ (但し $N^0 = I$: 恒等写像) は N の potential kernel と呼ばれる。 $f \in \mathcal{P}$ に対して Gf を f の potential と呼ぶ。

(定理1) $f \in \mathcal{P}$ の時 f の potential Gf は広義に excessive である。又 f が excessive であつて、且つ $N^\infty f = 0$ が成立する時 f は $h = f - Nf$ の potential として表わされる。

(定理2) excessive な f は次様に分解される。即ち $f = g + h$ で g は excessive 且つ $N^\infty g = 0$ を満たし、 h は invariant。

定理1に依れば g はある $\mathcal{P}$ の元の potential として表わされる。(Riep の分解定理)

(定理3) $f \in \mathcal{P}$ に対して $A = \{s; f(s) > 0\}$ と置く。 $a \in \mathbb{R}$ 非負な定数として、広義に excessive な g に対して、集合 A の上で $a + g \geq Gf$ が成立すれば、この不等式は S 全体の上で成立する。

(系) f は excessive で $N^\infty f = 0$ とする。又 g は広義に excessive とする。 $A = \{s; f(s) > (Nf)(s)\}$ と置く時、集合 A の上で $a + g \geq f$ が成立すればこの不等式は S 全体の上で成立する。但し a は $a \geq 0$ なる定数である。

(定義4) $A \in \mathcal{F}$ に対して I_A は A の定義関数を掛ける演算子を表わす。又 $N_A \equiv N \cdot I_A$ とし $H_A \equiv I_A + I_{A'} \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} (N_A)^p \right) \cdot N_A$ と定義する。但し A' で A の余集合を表わす。

(定理4) f を広義に excessive であるとする。 $A \in \mathcal{F}$ に対して $f_A \equiv H_A \cdot f$ は A の上で $g \geq f$ なる広義に excessive な g の中で最小なものである。

(定理5) $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ なる定数とする。広義に excessive な f に対して $A = \{\omega; f(\omega) \leq a\}$ $B = \{\omega; f(\omega) \geq b\}$ と置くと、次の不等式が成立する。

$$(1) \quad 1_B \leq \frac{f}{b}$$

$$(2) \quad 1_{AB} + 1_{ABAB} + 1_{ABABAB} + \dots \leq \frac{\min[f, b]}{b-a}$$

$$(3) \quad 1_{BA} + 1_{BABA} + 1_{BABA BA} + \dots \leq \frac{\min[f, a]}{b-a}$$

但し 1 は値1をとる定数値関数で、 1_A は定理4に於ける f_A と同じ定義で、又 $1_{AB} = (1_A)_B$ 等とする。

以上定理1~4は Meyer[1] と同じであり、定理5は Doob[2] と同じ様にして証明される。

§3. 上に得られた potential 論の形での定理を martingale の言葉に書き替えてみる。この§での定理の番号は前の§でのそれに対応する。例

(補題1) $f \in \mathcal{P}$ はこれを§2の意味で考えて excessive であることと、確率過程と考えると、有限値 supermartingale となることとは同値である。excessive を invariant とすれば supermartingale は martingale と書き替えればよい。又広義の excessive 又は広義の invariant とすれば「有限値」が除かれる。但し $\mathcal{P}^0$ は状態空間 $E[0, \infty]$ とする $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に関する process 全体を考え、 S, F, O, M は§1で述べたものとする。

(定理1) $\{X_n\}$ を有限非負値 supermartingale とし、任意の n に対して $\lim_{m \rightarrow \infty} E(X_m | \mathcal{F}_n) = 0$ とする。この時 $Y_n = X_n - E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ とおくと、 $X_n = \sum_{m=0}^{\infty} E(Y_{n+m} | \mathcal{F}_n)$ と表わせる。

(定理2) $\{X_n\}$ を有限値 非負 supermartingale とすると $\{X_n\}$ は $X_n = Y_n + Z_n$ と分解される。ここで $\{Y_n\}$ は $\lim_{m \rightarrow \infty} E(Y_m | \mathcal{F}_n) = 0$ なる supermartingale であり Z_n は martingale である。

(定理3) $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ を非負値確率過程とする。又 α を非負定数とする。 $A_n = \{\omega; X_n(\omega) > \alpha\}$ と置きある 非負値 supermartingale $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ が 各 n に対して A_n の上で

$$\alpha + Y_n \geq \sum_{m=0}^{\infty} E(X_{n+m} | \mathcal{F}_n)$$

が成立てばこの不等式は P -a.e. で Ω 全体の上で成立つ。

(系) $\{X_n\}$ は非負有限値 supermartingale で $\lim_{m \rightarrow \infty} E(X_m | \mathcal{F}_n) = 0$ とする。 $\{Y_n\}$ は supermartingale で $A_n = \{\omega; X_n > E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)\}$ と置く時、 $\alpha + Y_n \geq X_n$ が A_n の上で成立すれば、この不等式は Ω 全体で P -a.e. で成立する。

(定理4) $\{X_n\}$ を非負値 supermartingale とし $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ を $A_n \in \mathcal{F}_n$ なる集合の族とする。各 A_n の上で $Z_n \geq X_n$ となる様な supermartingale $\{Z_n\}$ の集合の中に最小のものが存在して、それは $X_n^A \equiv E\left(\sum_{m=n}^{\infty} I_{A_m}^A X_m | \mathcal{F}_n\right)$ と表わされる。但し、 $I_{A_n}^A$ は A_n の定義関数、 $I_{A_m}^A (m > n)$ は $A_m \cap \left(\bigcup_{i=n}^{m-1} A_i\right)'$ の定義関数を掛ける演算子を表わすものとする。

(補題 2) $\{X_n\}$ を非負値 supermartingale とする。 $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ なる定数とし、 $A_n = \{\omega; X_n(\omega) \leq a\}$, $B_n = \{\omega; X_n(\omega) \geq b\}$ とおくと次の三つの等式が成立する。

$$(1) \mathbf{1}_n^B = P(\{\omega; \exists m \geq n, X_m(\omega) \geq b\} | \mathcal{F}_n)$$

$$(2) \mathbf{1}_n^{AB} + \mathbf{1}_n^{ABAB} + \mathbf{1}_n^{ABABAB} + \dots = E(D_n | \mathcal{F}_n)$$

$$(3) \mathbf{1}_n^{BA} + \mathbf{1}_n^{BABA} + \mathbf{1}_n^{BABABA} + \dots = E(U_n | \mathcal{F}_n)$$

但し D_n, U_n はそれぞれ時刻 n 以後での $\{X_m\}$ の区間 $[a, b]$ に対する down-crossing number 及び up-crossing number である。又 $\mathbf{1}$ は値が 1 の定数値 process で $\mathbf{1}_n^A$ は定理 4 に於ける X_n^A と同じ意味とし、 $\mathbf{1}_n^{AB} = (\mathbf{1}^A)_n^B$ 等ととする。

(定理 5) $\{X_n\}$ を非負 supermartingale とする時次の三つの不等式が成立する。

$$(1) P(\{\omega; \exists m \geq n, X_m(\omega) \geq b\} | \mathcal{F}_n) \leq \frac{X_n}{b}$$

$$(2) E(D_n | \mathcal{F}_n) \leq \frac{\min[X_n, b]}{b-a}$$

$$(3) E(U_n | \mathcal{F}_n) \leq \frac{\min[X_n, a]}{b-a}$$

(文献)

[1] P. A. Meyer. Probabilités et Potentiel

[2] J. L. Doob. Proc. 4-th Berkeley Symp. vol 2. 1961 95-102.