

Schrödinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields

阪大理 吉富 和志 (Kazushi Yositomi)

1 Introduction and main results

考える作用素は、ポテンシャルが周期的な定数磁場のSchrödinger 作用素

$$H(\lambda) = (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x) \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2)$$

である。ただし $D_{x_j} = -i \partial / \partial x_j$ ($j = 1, 2$), λ は正のパラメータ、 $b \in \mathbf{R}$ は定数とする。 $H(\lambda)$ に対応する磁場は $B = -2b \, dx_1 \wedge dx_2$ である。ポテンシャル $V(x)$ には次の仮定をおく。

$$(H.1) \quad V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$$

$$(H.2) \quad V(x + \gamma) = V(x) \text{ in } \mathbf{R}^2 \text{ for any } \gamma \in \Gamma := 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$$

$$(H.3) \quad V(x) \geq 0 \text{ in } \mathbf{R}^2$$

$$(H.4) \quad V(x) = 0 \iff x \in \Gamma$$

$$(H.5) \quad V''(x) = 2 \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

Direct integral decomposition を用いるために、磁場 B に次の仮定をおく。

$$(H.6) \quad \langle B, \Gamma \wedge \Gamma \rangle \subset 2\pi\mathbf{Z} \text{ i.e. } b \in \frac{1}{4\pi}\mathbf{Z}$$

この仮定により $H(\lambda)$ のスペクトルはバンド構造を持つ。研究の目標は、 $\lambda \rightarrow \infty$ としたときの $H(\lambda)$ のスペクトルの漸近挙動を調べることである。磁場の

無い場合(すなわち、 $b=0$ の場合)に、B.Simon [1]と、A.Outassout[2]はground state bandの幅がexponential orderで減少することを示した。Simonはその証明に確率論的な方法を用い、OutassoutはB.Helffer-J.Sjöstrand [3]らによるWKB解析による方法を用いている。今回の研究では、磁場のある場合に、ground state bandの幅に対する exponential order の評価を得た。以下その内容を簡単に述べる。

$d_V(x, y)$ を $V(x)$ に対応する Agmon distance、 $s_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma) (> 0)$,

$x_0 \in \mathbf{R}^2, r > 0$ に対し $B_V(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2 : d_V(x_0, x) < r\}$ とおく。

Theorem A (H.1)から(H.6)を仮定する。このとき、 $\forall \eta > 0$ に対し $H(\lambda)$ の ground state bandの幅は $O(e^{-(s_0-2\eta)\lambda})$ (as $\lambda \rightarrow \infty$) である。

幾何学的な仮定を付け加えれば、Theorem Aの評価は次のように精密化される。

$\Lambda := \{\gamma \in \Gamma : d_V(0, \gamma) = s_0\}$ とおく。 $\gamma \in \Lambda$ に対し次を仮定する。

(H.7) There is a unique geodesic κ of length s_0 joining 0 and γ .

(H.8) $x_0 \in \kappa \cap B_V(0, s_0) \cap B_V(\gamma, s_0)$

$\Gamma_0 \subset \subset B_V(0, s_0) \cap B_V(\gamma, s_0)$: smooth curve which intersects κ transversally at x_0 where x_0 is the only point in $\overline{\Gamma_0} \cap \kappa$

$\Rightarrow \exists C > 0$ s.t.

$d_V(x, 0) + d_V(x, \gamma) \geq s_0 + C d_V(x, x_0)^2$ for any $x \in \Gamma_0$

Theorem B (H.1)から(H.8)を仮定する。このとき、 $H(\lambda)$ の ground state bandの幅は $(b_0 \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})) e^{-s_0 \lambda}$ (as $\lambda \rightarrow \infty$) である。ただし $b_0 > 0$: independent of λ

以下でこれらの証明の概略を述べる。

2 Preliminaries

$\Gamma = 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$ の fundamental domain を E , Γ の dual lattice を Γ^* , Γ^* の fundamental domain を E^* とする。すなわち、 $E = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, $\Gamma^* := \{\gamma^* \in \mathbf{R}^2 : \gamma \cdot \gamma^* \in 2\pi\mathbf{Z} \ \forall \gamma \in \Gamma\} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $E^* = [0, 1) \times [0, 1)$ とする。

$H_B^2(\mathbf{R}^2) := \{u \in L^2(\mathbf{R}^2) : T_i u, T_i T_j u \in L^2(\mathbf{R}^2) \ \forall i, j \in \{1, 2\}\}$
 $T_1 := D_{x_1} + bx_2$, $T_2 := D_{x_2} - bx_1$ とおいて,
 $Dom(H(\lambda)) := H_B^2(\mathbf{R}^2)$ と定義する。 $H(\lambda)$ は self-adjoint である。
 $H_B^2(\mathbf{R}^2)$ に内積を

$$(u, v)_{H_B^2(\mathbf{R}^2)} := (u, v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i=1}^2 (T_i u, T_i v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i,j=1}^2 (T_i T_j u, T_i T_j v)_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

$(u, v \in H_B^2(\mathbf{R}^2))$ で定義する。

$\forall \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, $u \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^2)$ に対し

$$(\mathbf{T}_\gamma^B u)(x) := e^{ib\gamma_1\gamma_2} e^{-ib(x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)} u(x - \gamma),$$

$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $\theta \in E^*$ に対し

$$(\mathcal{U}u)(x, \theta) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B u)(x) \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

とおく。

$\theta \in E^*$ に対し

$$\mathcal{H}_{B,\theta} := \{v \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^2) : \mathbf{T}_\gamma^B v = e^{-i\gamma \cdot \theta} v \text{ a.e. in } \mathbf{R}^2 \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

$$\mathcal{H}_{B,\theta}^2 := \{v \in \mathcal{H}_{B,\theta} : T_i v, T_i T_j v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \ \forall i, j \in \{1, 2\}\} \text{ と定義する。}$$

$$\mathcal{H}_{B,\theta} \text{ に内積を } (u, v)_{\mathcal{H}_{B,\theta}} := \int_E u(x) \overline{v(x)} dx, \ u, v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \text{ で定義する。}$$

$\theta \in E^*$ に対し

$$H(\lambda; \theta) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x) \text{ in } \mathcal{H}_{B,\theta} \text{ with domain } \mathcal{H}_{B,\theta}^2$$

と定義する。

Proposition 2.1

$\mathcal{U}$ は $L^2(\mathbf{R}^2)$ から $\int_{E^*}^\oplus \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$ への unitary operator に一意に拡張され、次が成り立つ

$$(2.1) \quad \mathcal{U} H(\lambda) \mathcal{U}^{-1} = \int_{E^*}^\oplus H(\lambda, \theta) d\theta$$

ただし $\mathcal{H} := \int_{E^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$ の内積は

$$(u, v)_{\mathcal{H}} := (\text{vol } E^*)^{-1} \int_{E^*} \int_E u(x, \theta) \overline{v(x, \theta)} dx d\theta \quad (u, v \in \mathcal{H})$$

で定義する。

$H(\lambda, \theta)$ は正定値で compact resolvent をもつので、spectrum は purely discrete である。 $H(\lambda, \theta)$ の多重度を込めて下から j 番目の固有値を $\mathcal{E}_j(\lambda, \theta)$ とする。 $\mathcal{E}_j(\lambda, \theta)$ は θ の連続関数であるから、次が成り立つ。

$$(2.2) \quad \sigma(H(\lambda)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) \quad \text{ただし} \quad \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) := \{\mathcal{E}_j(\lambda; \theta) : \theta \in E^*\}$$

$\mathcal{E}_j(\lambda; E^*)$ は閉区間または 1 点集合で、 $\mathcal{E}_j(\lambda; E^*)$ を j -th band、 $\mathcal{E}_1(\lambda; E^*)$ を ground state band という。従って $H(\lambda)$ の spectrum の解析は $\mathcal{E}_j(\lambda; \theta)$ の解析に帰着される。

$\Lambda_0 := \{ (2j+1)\sqrt{\mu_1} + (2k+1)\sqrt{\mu_2} : j, k \geq 0 ; \text{integers} \}$ とおき、 Λ_0 の元で重複度を込めて n 番目に小さい元を v_n とする。このとき次の定理が得られる。

Theorem 2.2

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ に対し $\mathcal{E}_n(\lambda; \theta) = v_n \lambda + o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$
 ただし error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

Outline of proof

この定理の証明には Harmonic approximation を用いる (cf. [1])。

(H.6) より $V(x) = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + O(|x|^3)$ (as $|x| \rightarrow 0$) である。

(1.1) で $V(x)$ を $\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2$ で置き換えた次の作用素:

$$(2.3) \quad H_0(\lambda) := (D_{x_1} + b x_2)^2 + (D_{x_2} - b x_1)^2 + \lambda^2 (\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2)$$

の固有値、固有関数を用いて各 $\mathcal{E}_j(\lambda; \theta)$ を近似する。

$H_0(\lambda)$ は Weyl 擬微分作用素の正準変換による不変性を用いると、次の Harmonic oscillator と unitary 同値になる。(see Appendix)

$$(2.4) \quad -\Delta + m_1(\lambda) x_1^2 + m_2(\lambda) x_2^2 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2)$$

ただし $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ は t に関する 2 次方程式

$$t^2 - ((\mu_1 + \mu_2)\lambda^2 + 4b^2)t + \mu_1\mu_2\lambda^4 = 0$$

の解で、 $m_1(\lambda) < m_2(\lambda)$ を満たすものとする。

よって $H_0(\lambda)$ の eigenvalue は $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$,
 $(j, k \geq 0; \text{integers})$ で、

$$v_{j,k} := \begin{cases} (2j+1)\sqrt{\mu_1} + (2k+1)\sqrt{\mu_2} & (\mu_2 \geq \mu_1) \\ (2j+1)\sqrt{\mu_2} + (2k+1)\sqrt{\mu_1} & (\mu_2 \leq \mu_1) \end{cases}$$

とおけば $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)} = v_{j,k}\lambda + O(1)$ (as $\lambda \rightarrow \infty$)
 である。

$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$ に対応する $H_0(\lambda)$ の固有関数を $\psi_{j,k}(\lambda; x)$
 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \geq 0} : C.O.N.S. \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2)$ とする。 $\psi_{j,k}$ は具体的に計算でき次が成り
 立つ。

(2.5) $|\psi_{j,k}(\lambda; x)| \leq C_{j,k} \lambda^{\frac{1}{2}} \exp(-c\lambda|x|^2)$, ($C_{j,k}, C > 0 : \text{const. indep. of } \lambda$)
 である。

$v_n = v_{j_n, k_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), $(j_n, k_n) \neq (j_m, k_m)$ if $n \neq m$
 とおける。

$$\psi_n := \psi_{j_n, k_n}, \quad \varphi_n(\lambda; x; \theta) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \psi_n)(\lambda; x) \quad (\theta \in E^*) \text{ とおく。}$$

(2.5) より次がなりたつ。

$$(2.6) \quad (\varphi_n(\lambda; x; \theta), \varphi_m(\lambda; x; \theta))_{\mathcal{H}_{B, \theta}} = \delta_{nm} + O(e^{-c\lambda}) \quad (\text{as } \lambda \rightarrow \infty)$$

$$(2.7) \quad (H(\lambda; \theta) \varphi_n(\lambda; x; \theta), \varphi_m(\lambda; x; \theta))_{\mathcal{H}_{B, \theta}} = v_n \lambda \delta_{nm} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{as } \lambda \rightarrow \infty)$$

ただし各 error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

Schmidt の直交化法と、Rayleigh-Ritz Principle を用いて

$$\mathcal{E}_n(\lambda; \theta) \leq v_n \lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \text{ を得る。}$$

また、Simon[1] と同様に I.M.S. localization formula を用いれば

$$\mathcal{E}_n(\lambda; \theta) \geq v_n \lambda - O(\lambda^{\frac{4}{5}}) \text{ を得る。} \quad \square$$

3 Outline of Proof of Theorem A

この章では Theorem A の証明の概略を説明する。まず、 $d_V(x, y)$ の定義を正確に述べる。

$x, y \in \mathbf{R}^2$ に対し、

$$d_V(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t))} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

ただし、 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$; piecewise C^1 path s.t. $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

と定義する。

$x_0 \in \mathbf{R}^2, r > 0$ に対し $B_V(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2 : d_V(x_0, x) < r\}$,
 $s_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma) (> 0)$ とおく。

$\eta > 0$: 十分小 に対し $W_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ として

$W_\eta = 1$ on $B_V(0, \frac{\eta}{4})$, $W_\eta \geq 0$ in $\mathbf{R}^2$, $\text{supp } W_\eta \subset B_V(0, \frac{\eta}{2})$

を満たすものを選ぶ。

$\tilde{V}(x) := V(x) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} W_\eta(x - \gamma)$ とおく。

$\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ ($\theta \in E^*$) を近似するために次の作用素を導入する:

$$(3.1) \quad \tilde{H}(\lambda) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 \tilde{V}(x) \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2) \\ \text{with domain } H_B^2(\mathbf{R}^2)$$

§2 とほぼ同様にして次のことが判る。 $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ に対し $\tilde{H}(\lambda)$ は十分大きい λ に対して、その essential spectrum の下に少なくとも n 個の固有値をもち、 $\tilde{H}(\lambda)$ の多重度を込めて j 番目の固有値は $v_j \lambda + o(\lambda)$ ($as \lambda \rightarrow \infty$) である。

$\tilde{\mathcal{E}}(\lambda)$ を $\tilde{H}(\lambda)$ の first eigenvalue ($\tilde{\mathcal{E}}(\lambda) = (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})\lambda + o(\lambda)$), $\tilde{\phi}(\lambda)(x)$ を $\tilde{\mathcal{E}}(\lambda)$ に対応する $\tilde{H}(\lambda)$ の eigenfunction で、 $\|\tilde{\phi}(\lambda)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 1$ とする。

Helfer-Sjöstrand [2] とほぼ同様に、 $\tilde{\phi}(\lambda)$ は次の decay estimate を満たす:

Lemma 3.1 $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$(3.2) \quad \|e^{\lambda(1-\varepsilon)d_{\tilde{V}}(x,0)} \tilde{\phi}(\lambda)(x)\|_{H_B^2(\mathbf{R}^2)} = O(e^{\varepsilon\lambda}) \quad (as \lambda \rightarrow \infty)$$

さらに、楕円型作用素に対する a priori estimate と Sobolev の埋込定理を用いて次が得られる。

Lemma 3.2 $\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha \in \mathbf{N}^2 \exists C_{\alpha,\varepsilon} > 0 : \text{const. s.t.}$

$$|\partial_x^\alpha \tilde{\phi}(\lambda)(x)| \leq C_{\alpha,\varepsilon} e^{-\lambda(d_{\tilde{V}}(x,0)-\varepsilon)} \text{ in } \mathbf{R}^2$$

$\chi_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ として、

$\text{supp } \chi_\eta \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$, $0 \leq \chi_\eta \leq 1$ in $\mathbf{R}^2$, $\chi_\eta = 1$ on $B_V(0, s_0 - \eta)$
を満たすものを選ぶ。

$\tilde{\psi}(\lambda)(x) := \chi_\eta(x)\tilde{\phi}(\lambda)(x)$ とおく。

$\theta \in E^*$ に対し $\tilde{\psi}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{\psi})(x) \ (\in \mathcal{H}_{B,\theta} \cap C^\infty(\mathbf{R}^2))$

とにおいて、次を得る。

$$(3.3) \quad H(\lambda; \theta) \tilde{\psi}_\theta(\lambda) = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda) \tilde{\psi}_\theta(\lambda) + \tilde{r}_\theta(\lambda)$$

ただし、 $\tilde{r}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}(\lambda))(x)$,

$$\tilde{r}(\lambda) := -\Delta \chi_\eta \tilde{\phi} - 2\nabla \chi_\eta \cdot \nabla \tilde{\phi} - 2bi((x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) \chi_\eta) \tilde{\phi}$$

(3.2),(3.3)を用いて次の評価を得る。

$$(3.4) \quad \|\tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = 1 + O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}),$$

error termは $\theta \in E^*$ に関しuniform.

$$(3.5) \quad \|\tilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}), \text{ error termは } \theta \in E^* \text{ に関しuniform.}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって、} \text{dis}(\tilde{\mathcal{E}}(\lambda), \sigma(H(\lambda; \theta))) &\leq \frac{\|(H(\lambda; \theta) - \tilde{\mathcal{E}}(\lambda)) \tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} \\ &= \frac{\|\tilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\mathcal{E}}(\lambda) = v_1 \lambda + o(\lambda)$, $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta) = v_1 \lambda + o(\lambda)$, $\mathcal{E}_2(\lambda; \theta) = v_2 \lambda + o(\lambda)$
($v_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} < v_2$, 各error termは $\theta \in E^*$ に関して一様)
を用いてTheorem Aの結論を得る。□

4 Outline of Proof of Theorem B

この章ではTheorem Bの証明の概略を述べる。§3で得た $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ の評価は
 $\theta \in E^*$ に関し一様な評価であったが、bandの幅をより精密に評価するには、 $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ の $\theta \in E^*$ に依存する評価を得ることが必要である。この定理の証明にはW.K.B.解析が本質的な役割を果たす。

まず、準備として関数解析的な定義を述べる。一般に H : Hilbert sp.
 $E, F \subset H$: closed subsp. とする。

$\Pi_F : H \rightarrow F$; orthogonal projection onto F とする。

$$\vec{d}(E, F) := \sup_{x \in E, \|x\|=1} \text{dis}(x, F) = \|(1 - \Pi_F)|_E\|_H \text{ とおく。}$$

Proposition 4.1 ([3] pp348-349)

A : self-adjoint operator in H

$I \subset \mathbf{R}$: compact interval

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N \in H$; linearly independent

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N \in I$,

$$A\psi_j = \mu_j\psi_j + r_j, \quad \|r_j\| \leq \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$I = [\alpha, \beta]$ として $\exists a > 0$ s.t. $\sigma(A) \cap [\alpha - 2a, \alpha] = \emptyset, \sigma(A) \cap [\beta, \beta + 2a] = \emptyset$

E : $\psi_1, \dots, \psi_N$ が張る subspace,

F : $\sigma(A) \cap I$ に対応する subspace とする。

このとき、次が成り立つ。

$$\vec{d}(E, F) \leq \frac{N^{\frac{1}{2}} \varepsilon}{a \sqrt{\lambda_s^{\min}}},$$

ただし $\lambda_s^{\min}$ は行列 $S = ((\psi_j, \psi_k)_H)$ の smallest eigenvalue である。

ここで、 $\theta \in E^*$ に対し $E_\theta(\lambda) := \{k\tilde{\psi}_\theta(\lambda) : k \in \mathbf{C}\}$, $F_\theta(\lambda)$ を $H(\lambda; \theta)$ の固有値 $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ に対応する固有空間とする。§3 の内容と、この命題を用いて次の補題を得る。

Lemma 4.2

$$\vec{d}(E_\theta(\lambda), F_\theta(\lambda)) = O(e^{-(s_0 - 2\eta)\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

この補題と Lemma 3.1, Lemma 3.2 から次が得られる。

Lemma 4.3

$$\mathcal{E}_1(\lambda; \theta) = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + O(e^{-(2s_0 - 5\eta)\lambda})$$

(as $\lambda \rightarrow \infty$)

$s'_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus (\Lambda \cup \{0\})} d_V(\gamma, 0) (> s_0)$ において、Lemma 3.2 より

$$(4.1) \quad \mathcal{E}_1(\lambda; \theta) = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma \in \Lambda} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \tilde{O}(e^{-s'_0 \lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

を得る。(ただし $\tilde{O}(e^{-s'_0 \lambda})$ とは $\forall \eta > 0$ に対し、 $O(e^{-(s'_0 - \eta)\lambda})$ という意味である)

(H.2) より $\gamma \in \Lambda \Rightarrow -\gamma \in \Lambda$ である。

また直接的な計算により次が判る:

$$(4.2) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \psi)_{L^2(\mathbf{R}^2)} = \overline{(\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}} \quad \forall \gamma \in \Lambda$$

$\gamma \in \Lambda$, $a > 0$ に対し

$E_\gamma^{(a)} := \{x \in \mathbf{R}^2 : d_V(0, x) + d_V(\gamma, x) \leq s_0 + a\}$ とおく。

$a > 0$: 十分小 に対し、 $E_\gamma^{(a)} \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta) \cap B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$ である。

Ω : open domain with smooth boundary を

$0 \notin \bar{\Omega}$, $\gamma \in \Omega$, $E_\gamma^{(a)} \cap \bar{\Omega} \subset B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$, $E_\gamma^{(a)} \cap \Omega^c \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$ を満たすように選ぶ。 $\tilde{\Gamma}_\gamma := \partial\Omega \cap E^{(a)}$ とおく。 $n = (n_1, n_2)$ を $\partial\Omega$ の outer unit normal とする。eigenfunction の decay estimate を用いて次の補題を得る。

Lemma 4.4

$$(4.3) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \{ \phi \frac{\partial}{\partial n} (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{\phi}}) - (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{\phi}}) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi} \} dS \\ - 2bi \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \phi \overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{\phi}} (x_2 n_1 - x_1 n_2) dS \quad \text{mod } O(\lambda^{-\infty} e^{-s_0 \lambda})$$

$(\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}$ を $\text{mod } O(\lambda^{-\infty} e^{-s_0 \lambda})$ で近似するために、 $\tilde{H}(\lambda)$ の固有関数を W.K.B. 解で近似する。以下、W.K.B. 解について述べる。(cf.[3])

微分作用素 $H(\lambda) = (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x)$ in $\mathbf{R}^2$ に対し

W.K.B. 解 $(a_0(x) + a_1(x)\lambda^{-1} + a_2(x)\lambda^{-2} + \dots)e^{-\lambda\varphi(x)}$ を構成する。

$\varphi(x)$: $\mathbf{R}$ -valued C^∞ function defined near 0 in $\mathbf{R}^2$,

$a_0(x), a_1(x), \dots, a_N(x)$: $\mathbf{C}$ -valued C^∞ function defined near 0 in $\mathbf{R}^2$,

$e_1, e_2, \dots, e_{N+1} \in \mathbf{C}$ に対し、

$$a(x) := \sum_{j=0}^N a_j(x) \lambda^{-j}, E(\lambda) := \sum_{k=1}^{N+1} e_k \lambda^{2-k}, L := x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} \text{ とおいて、}$$

次の等式を得る:

$$\begin{aligned}
(4.4) & e^{\lambda\varphi}(H(\lambda) - E(\lambda))\left(\sum_{j=0}^N a_j(x)\lambda^{-j}e^{-\lambda\varphi}\right) \\
&= \lambda^2(V - |\nabla\varphi|^2)a + \lambda(2\nabla\varphi \cdot \nabla a_0 + (\Delta\varphi)a_0 + 2bi(L\varphi)a_0 - e_1a_0) \\
&+ \sum_{l=0}^{l=N-1} \{2\nabla\varphi \cdot \nabla a_{l+1} + (\Delta\varphi)a_{l+1} + 2bi(L\varphi)a_{l+1} - xbiLa_l + b^2|x|^2a_l \\
&\quad - \Delta a_l - \sum_{\substack{j+k=l+2 \\ j \geq 0, k \geq 1}} e_k a_j\} \lambda^{-l} \\
&+ \lambda^{-N}(-2biLa_N + b^2|x|^2a_N - \Delta a_N) - \sum_{l=N}^{2N-2} \lambda^{-l} \sum_{\substack{j+k=l+2 \\ j \geq 0, k \geq 1}} e_k a_j
\end{aligned}$$

そこで、原点の近傍で次の方程式を考える：

$$\left\{ \begin{array}{l}
(4.5) \quad V - |\nabla\varphi|^2 = 0 \\
(4.6) \quad 2\nabla\varphi \cdot \nabla a_0 + (\Delta\varphi)a_0 + 2bi(L\varphi)a_0 - e_1a_0 = 0 \\
(4.7)_l \quad 2\nabla\varphi \cdot \nabla a_{l+1} + (\Delta\varphi)a_{l+1} + 2bi(L\varphi)a_{l+1} - 2biLa_l - \Delta a_l \\
\quad - \sum_{\substack{j+k=l+2 \\ j \geq 0, k \geq 1}} e_k a_j = 0 \\
(0 \leq l \leq N-1)
\end{array} \right.$$

(4.5)をeikonal equation、(4.6)をfirst transport equation、
(4.7)_lを(l+2)-th transport equation と言う。

これらを解けば、(4.4)は原点の近傍で $O(\lambda^{-N})$ (as $\lambda \rightarrow \infty$)となり、W.K.B.解が構成できる。

まず、eikonal equationについて説明する。

$\varepsilon \geq 0$: 十分小に対し

$\Omega_\varepsilon :=$ the set consists of $\{0\}$ and the union of the interiors of all minimal geodesics from 0 to some point in $\mathbf{R}^2$, of length strictly less than $s_0 - \varepsilon$.

とおく。

ただし、geodesicは次を満たすものだけを考える。

$$\left\{ \begin{array}{l}
\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbf{R}^2; \text{piecewise smooth curve,} \\
\gamma(t) \notin \Gamma \quad \forall t \in (0, a] \\
\gamma(t) \rightarrow 0 \quad (\text{as } t \rightarrow +0) \\
\gamma|_{(0, a]} \text{ は } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \text{ with } V dx^2 \text{ の geodesic である}
\end{array} \right.$$

Ω_0 はopen setである。 $d(x) := d_V(x, 0)$ とおいて、次が成り立つ:

$$d(x) \in C^\infty(\Omega_0), \quad |\nabla d(x)|^2 = V(x) \text{ in } \Omega_0$$

すなわち、 $d(x)$ はeikonal equation (4.5)の解である。

次にtransport equationについて説明する。

$$\begin{aligned} X &:= 2\nabla d \cdot \nabla \\ &= 2\left(\frac{\partial d(x)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial d(x)}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \quad \text{in } \Omega_0 \text{ とおく。} \end{aligned}$$

このとき、次の補題が成り立つ。

Lemma 4.5 $a(x), b(x) : \mathbf{C}$ -valued C^∞ function in Ω_0 ,

$a(0) = b(0) = 0$ とする。このとき、

$\forall \gamma \in \mathbf{C}$ に対し、初期値問題

$$\begin{cases} Xu = au + b \text{ in } \Omega_0 \\ u(0) = \gamma \end{cases}$$

の解は存在して一意である。

まず、first transport equation (4.6)を考える。

(4.6)は $2\nabla\varphi \cdot \nabla a_0 + (\Delta\varphi + 2biL\varphi - e_1)a_0 = 0$ と書ける。

$$e_1 = (\Delta\varphi)(0) + 2bi(L\varphi)(0)$$

$$= (\Delta\varphi)(0) \text{ とおく。}$$

Lemma 4.5 より (4.6)は初期条件 $a_0(0) = 1$ の下で、 Ω_0 で定義された解をもつ。

次に(4.7)₀を考える。

$$(4.7)_0 \text{ は } 2\nabla\varphi \cdot \nabla a_1 + (\Delta\varphi + 2biL\varphi - e_1)a_1 = 2biLa_0 + \Delta a_0 + e_2 a_0$$

$$\text{と表わされる。 } e_2 = -\frac{1}{a_0(0)}(2bi(La_0)(0) + (\Delta a_0)(0))$$

$$= -(\Delta a_0)(0) \text{ とおく。}$$

Lemma 4.5 より (4.7)₀は初期条件 $a_1(0) = 0$ の下で、 Ω_0 で定義された解を持つ。

以下inductiveに(4.7)_l ($l = 1, 2, \dots$)は、 $e_{l+2} = -(\Delta a_l)(0)$ とおけば

初期条件 $a_{l+1}(0) = 0$ の下で、 Ω_0 で定義された解をもつ。

以上より次の補題を得る。

Lemma 4.6 $\exists e_1, e_2, \dots \in \mathbf{R}$ ($e_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}$)
 $\exists \mathcal{E}(\lambda) \sim e_1 \lambda + e_2 + e_3 \lambda^{-1} + \dots$ ($\lambda \rightarrow \infty$)
 $\exists a_0(x), a_1(x) \dots$: $\mathbf{C}$ -valued C^∞ function in Ω_0
 with $a_0(x) \neq 0$ in Ω_0 , $a_0(0) = 1$, $a_j(0) = 0$ ($j \geq 1$)
 $\exists a(x, \lambda)$: $\mathbf{C}$ -valued C^∞ function of x in Ω_ϵ
 s.t. $a(x, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \lambda^{-j}$
 $, (H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}$ in Ω_ϵ
 where $\theta(\lambda) := \lambda^{\frac{1}{2}} a(x, \lambda) e^{-\lambda d(x)}$
 $\left(\text{i.e. } \max_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \Omega_\epsilon} |\partial_x^\alpha (a(x, \lambda) - \sum_{j=0}^N a_j \lambda^{-j})| = O(\lambda^{-(N+1)}) \quad \forall N \in \mathbf{N}, \right.$
 $\left. \sup_{x \in \Omega_\epsilon} |e^{\lambda d(x)} (H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda)| = O(\lambda^{-\infty}) \right)$

$\epsilon > 0$ を固定する。 $\|\theta(\lambda)\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} = 1$ と normalizeしておく。

$K \subset \Omega_\epsilon$: compact とする。 $\eta > 0$ を十分小さく取って、 $\Omega_\epsilon \subset B_V(0, s_0 - \eta)$ とする。

$\widehat{K}$ を K の点と $\{0\}$ とを結ぶminimal geodesic 全体のなす集合とする。 $\widehat{K} \subset \Omega_\epsilon$ である。

$\tilde{\Omega}$: $\widehat{K}$ の開近傍を $\tilde{\Omega} \subset \subset \Omega_\epsilon$ となるように選ぶ。

$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を、 $\chi = 1$ in nbd. of $\widehat{K}$, $\text{supp } \chi \subset \tilde{\Omega}$ を満たすように選ぶ。

Proposition 4.1を用いて、 $|(\chi\theta(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)}| = 1 + O(\lambda^{-\infty})$ を得る。

このことから、十分大きい λ に対して、 $\tilde{\phi}(\lambda)$ は $(\chi\theta(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)} > 0$ を満たすとしてよい。

$\omega(\lambda) = \chi(\tilde{\phi}(\lambda) - \theta(\lambda))$ とおく。

Lemma 4.7 $\widetilde{K}$: nbd. of $\widehat{K}$ が存在して ($\widetilde{K} \subset \subset \tilde{\Omega}$)
 $\omega = O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}$ in $H^2(\widetilde{K})$ が成り立つ。

この補題と(4.3)より $\forall \gamma \in \Lambda$ に対し、

$$(4.8) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \left\{ \theta \frac{\partial}{\partial n} (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \theta}) - (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \theta}) \frac{\partial}{\partial n} \theta \right\} dS \\ - 2bi \int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \theta \overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \theta} (x_2 n_1 - x_1 n_2) dS \mod O(\lambda^{-\infty} e^{-s_0 \lambda})$$

を得る。仮定 (H.7), (H.8) とMorse lemmaを用いて、

$$(4.9) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} = (\tilde{b}_\gamma \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})) e^{-s_0 \lambda} \quad (\lambda \rightarrow \infty), \gamma \in \Lambda$$

with $\tilde{b}_\gamma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$

を得る。 $\theta \in E^*$ に対し $f(\theta) := \sum_{\gamma \in \Lambda} e^{i\gamma \cdot \theta} \tilde{b}_\gamma$ とおく。

(4.2), (4.9) より $\forall \gamma \in \Lambda$ に対し $\tilde{b}_\gamma = \overline{\tilde{b}_{-\gamma}}$ である。

$b_0 := \max_{\theta \in E^*} f(\theta) - \min_{\theta \in E^*} f(\theta)$ とおいて、(4.1), (4.9) より

$$(4.10) \quad \text{length of } \mathcal{E}_1(\lambda; E^*) = (b_0 \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})) e^{-s_0 \lambda} \quad (\text{as } \lambda \rightarrow \infty)$$

を得る。

最後に $b_0 > 0$ を示す。

$\gamma \in \Lambda$ に対し、 $\tilde{b}_\gamma = \int_{E^*} f(\theta) e^{-i\gamma \cdot \theta} d\theta$ より $f(\theta) \equiv \text{const. on } E^*$ ならば、 $\tilde{b}_\gamma = 0$ となり (4.9) に矛盾する。よって $f(\theta)$ は $\theta \in E^*$ に関し定数ではない。したがって、 $b_0 > 0$ である。□

Appendix Eigenvalues and eigenfunctions of $H_0(\lambda)$

ここでは、第2章の $H_0(\lambda)$ の固有値と固有関数の計算について述べる。この計算には Weyl 擬微分作用素を用いる。まず、Weyl 擬微分作用素について簡単に説明する。(cf.[4])

$m \in \mathbf{R}$ に対し Symbol class S^m を

$$S^m := \{ a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n) : \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x| + |\xi|)^{m - |\alpha| - |\beta|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n \}$$

と定義する。

$a(x, \xi) \in S^m$ に対し Weyl 擬微分作用素 $a^w(x, D_x)$ を

$$(a^w(x, D_x)u)(x) := (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \quad u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

で定義する。 $a^w(x, D_x)$ は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ への continuous linear operator である。この擬微分作用素に対し、composition formula や L^2 -boundedness theorem 等が成り立つ(cf.[4])。ここでは、後で必要な Weyl 擬微分作用素の正準変換による不変性を述べる(cf.[5])。

$(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, (y, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ に対し、

$\sigma(x, \xi; y, \eta) := \xi \cdot y - x \cdot \eta$ と定義する。

$\chi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; linear が

$$\sigma(\chi X; \chi Y) = \sigma(X; Y) \quad \forall X, Y \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$$

をみたすとき、 χ を正準変換という。

Theorem $a \in S^m$, $\chi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; 正準変換 に対し

$\exists U : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$: isomorphism かつ $U : L^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^2)$; unitary

s.t. $U^{-1}a^w(x, D_x)U = (a \circ \chi)^w(x, D_x)$ on $\mathcal{S}$

ex.1 $\chi : \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ を x_j を ξ_j に、 ξ_j を $-x_j$ に置き換え、

他の座標は変えない map とする。 χ は正準変換である。

U を x_j に関する Fourier 変換とする。このとき、 U は $L^2(\mathbf{R}^2)$ の unitary op. で

$U^{-1}a^w(x, D_x)U = (a \circ \chi)^w(x, D_x)$ on $\mathcal{S}$ が成り立つ。

ex.2 $T : n \times n$ 実行列, $\det T \neq 0$ とする。

$\chi(x, \xi) = (Tx, {}^tT^{-1}\xi)$, $(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ とおく。

χ は正準変換である。

$f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ に対し $(Uf)(x) = |\det T|^{-\frac{1}{2}} f(T^{-1}x)$ とおく。

U は $L^2(\mathbf{R}^2)$ の unitary op. で

$U^{-1}a^w(x, D_x)U = (a \circ \chi)^w(x, D_x)$ on $\mathcal{S}$ が成り立つ。

次に $H_0(\lambda)$ の固有値と固有関数の具体的な計算について述べる。

$x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ に対し、

$p(x, \xi) := (\xi_1 + bx_2)^2 + (\xi_2 - bx_1)^2 + \lambda^2(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2)$ とおく。

(A.1) $H_0(\lambda) = p^w(x, D_x)$ である。

U_1 を x_1 に関する Fourier 変換とし、 $p_1(x, \xi)$ を $p(x, \xi)$ で ξ_1 を $-x_1$ に、 x_1 を ξ_1 に置き換えたもの、すなわち、

$$\begin{aligned} p_1(x, \xi) &:= (-x_1 + bx_2)^2 + (\xi_2 - b\xi_1)^2 + \lambda^2(\mu_1 \xi_1^2 + \mu_2 x_2^2) \\ &= \lambda^2 \mu_1 \xi_1^2 + (\xi_2 - b\xi_1)^2 + (-x_1 + bx_2)^2 + \lambda^2 \mu_2 x_2^2 \quad \text{とおく。ex.1 より} \end{aligned}$$

(A.2) $p(x, D_x) = U_1 p_1^w(x, D_x) U_1^{-1}$ が成り立つ。

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1}\lambda & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{とおき}$$

$$\begin{aligned} p_2(x, \xi) &:= p_1(Tx, {}^tT^{-1}\xi) \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \mu_1\lambda^2 & -2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ -2b\sqrt{\mu_1}\lambda & 4b^2 + \lambda^2\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく。

$U_2 : L^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^2)$; unitary を

$$(U_2 f)(x) = \mu_1^{-\frac{1}{4}} \lambda^{-\frac{1}{2}} f(T^{-1}x) \text{ で定義する。ex.2 より}$$

(A.3) $p_1^w(x, D_x) = U_2 p_2^w(x, D_x) U_2^{-1}$ が成り立つ。

次に、行列 $\begin{pmatrix} \mu_1\lambda^2 & -2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ -2b\sqrt{\mu_1}\lambda & \mu_2\lambda^2 + 4b^2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化する

$m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ (ただし $m_1(\lambda) < m_2(\lambda)$) をこの行列の固有方程式

$$t^2 - (\lambda^2(\mu_1 + \mu_2) + 4b^2)t + \lambda^4\mu_1\mu_2 = 0 \text{ の解とする。}$$

$$a_1(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda^2\mu_2 + 4b^2 - m_1(\lambda) \\ 2b\sqrt{\mu_1}\lambda \end{pmatrix} \times \{(\lambda^2\mu_2 + 4b^2 - m_1(\lambda))^2 + 4b^2\mu_1\lambda^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_2(\lambda) := \begin{pmatrix} 2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ \mu_1\lambda^2 - m_2(\lambda) \end{pmatrix} \times \{(\mu_1\lambda^2 - m_2(\lambda))^2 + 4b^2\lambda^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

$A(\lambda) := (a_1(\lambda), a_2(\lambda))$ とおく。 $A(\lambda)$ は直交行列で

$${}^tA(\lambda) \begin{pmatrix} \mu_1\lambda^2 & -2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ -2b\sqrt{\mu_1}\lambda & \lambda^2\mu_2 + 4b^2 \end{pmatrix} A(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda) & 0 \\ 0 & m_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

$$p_3(x, \xi) := p_2(A(\lambda)x, a(\lambda)\xi)$$

$$= \xi_1^2 + \xi_2^2 + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2 \text{ とおく。}$$

$U_3 : L^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^2)$; unitary を $(U_3 f)(x) := f({}^tA(\lambda)x)$ で定義する。
ex.2 より

(A.4) $p_2^w(x, D_x) = U_3 p_3^w(x, D_x) U_3^{-1}$ となる。

$$p_3^w(x, D_x) = -\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2 \text{ である。}$$

$U = U_1 U_2 U_3$ とおく。 U は $L^2(\mathbf{R}^2)$ の unitary operator である。

(A.1)~(A.4) より、次が成り立つ。

$$(A.5) \quad H_0(\lambda) = U(-\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2)U^{-1}$$

すなわち $H_0(\lambda)$ は Harmonic Oscillator

$$-\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2 \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2)$$

と unitary 同値である。

$-\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2$ in $L^2(\mathbf{R}^2)$ の固有値は

$$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)} \quad (j, k \geq 0, \text{integers}) \text{ で、}$$

対応する固有関数は

$$w_{j,k} := m_1(\lambda)^{\frac{1}{8}} m_2(\lambda)^{\frac{1}{8}} Q_j(m_1(\lambda)^{\frac{1}{4}} x_1) Q_k(m_2(\lambda)^{\frac{1}{4}} x_2) \\ \times \exp(-\frac{1}{2} m_1(\lambda)^{\frac{1}{2}} x_1^2 - \frac{1}{2} m_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} x_2^2)$$

(ただし Q_j は j 次の Hermite 多項式)

である。 $\{w_{j,k}(\lambda; x)\}_{j,k \geq 0}$ は $L^2(\mathbf{R}^2)$ の完全正規直交系である。

したがって $H_0(\lambda)$ の固有値は $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$ ($j, k \geq 0, \text{integers}$) で、対応する固有関数は $(Uw_{j,k})(\lambda; x)$ である。 $Uw_{j,k}$ は具体的に計算でき、(2.5) の評価を得る。

References

- [1] B. Simon : *Semiclassical Analysis of Low-Lying Eigenvalues III. Width of the Ground State Band in Strongly Coupled Solids*, Anal. Phys. ,158 (1984),415-420.
- [2] A. Outassourt: *Comportement semi-classique pour l'opérateurs de Schrödinger à potentiel périodique*, J. Funct. Anal. 72 (1987) 65-93.
- [3] B. Helffer-J. Sjöstrand : *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Comm. in P.D.E. , 9(4), (1984) 337-408.
- [4] A. Voros: *An Algebra of Pseudodifferential Operators and the Asymptotics of Quantum Mechanics*, J. Funct. Anal. 29 (1978) 104-132.
- [5] L. Hörmander : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III* , Springer-Verlag