

脳の電磁的活動の巨視的モデル：H.Haken の非線形 波動方程式をめぐって — 背景，モデル，問題 —

芝浦工業大学 システム工学部 阿 部 剛 久 (Takehisa Abe)
Faculty of Systems Engineering, Shibaura Institute of Technology

はじめに：テーマの背景と趣旨

人間の脳は我々が知る限り恐らく最も複雑な機能をもつシステムと考えられ、その数が最近では1000億ともいわれるニューロン（神経細胞 neuron）と呼ばれる要素から構成されている。1個のニューロンは1億に近いニューロンと結ばれ、全体としてよく調整を保持して人間の意志や行為をはじめとするあらゆる活動を支配する脳機能に寄与していることは今日まで実験および理論を通して長い間研究されてきた結果、明らかにされてきた事実である。

ニューロンの活動を物理学的に見れば、それは電磁場に基づくものであり、MEG（脳磁図 magnetoencephalogram）と EEG（脳波 electroencephalogram）の測定を通して巨視的な観測が可能である。ニューロンどうしの結合と電磁的活動の概略図は次のようになる：図 1 参照。ニューロンのパルス特性は多くの実験で知られているが、ここでは樹枝状突起から出る電流に注目する。

ちなみに、パルスに関する研究で過去著名なものをあげれば、やりいかの巨大軸索の膜電位等の時間的変化を記述した (A.L.) Hodgkin- (A.F.) Huxley モデル（4未知関数の非線形常微分方程式系1952）とその簡易化である (R.) FitzHugh- (J.) Nagumo モデル（2未知関数の非線形常微分方程式系1961-62）がある。これらはニューロンの興奮性伝達の解明に寄与する一方、パルスの生成に関しても応用される。また、これらのモデルは後にニューロンの空間的広がりを考慮して非線形偏微分方程式系として定式化されている。

また、ニューロンを脳全体で捉えれば、ニューラルネットワークのモデル形成に繋がってくる。この方面のよく知られた例では、ニューロンを多入力1出力の情報処理素子とみて、興奮性と抑制性、ニューロンどうしの結合の強さ、閾値等を考慮してニューロンの状態の離散時間モデルとしての (W.S.) McCulloch- (W.H.) Pitts モデル（1943）がある。このモデルにおいて状態を表示する sigmoid 関数は値（1，0）の単純なものであったが、近年に非線形 sigmoid 関数の導入によって一般化された。その他同種のものとして、過去の履歴を考慮した M-P モデルの改良としての (E.R.) Caianiello のモデル、他および連続時間モデルがある。脳とはニューロンを多数結合した情報処理システムと考えて、これを模倣した情報処理システムがいわゆるニューラルネットワークであるが、その一つが階層型モデル (backpropagation model) であり、先の非線形 sigmoid 関数を用いた McCulloch-Pitts モデルはこのタイプの代表例であり、この後の Gustafson 教授の代読講演において重要な役割を演じるモデルである。他に、相互結合型モデル ((J.J.) Hopfield model) が知られている。

まず、テーマの最初は秩序構造 (coherent structure) の提唱者として知られる H.Haken のニューロンのネットワークとしての脳全体の電磁的活動を、シナプス経由の軸索パルスに対応する樹枝状突起から発せられる電

流の準微視的な時間的发展方程式系として記述したものをとりあげる。方程式系の特徴はパルスが位相角に依存することを要請していることである^p。これは、パルスの出現を点滅する灯台の灯りに模したからであって、このことからこのモデルを灯台モデルと呼ぶ。実験的視点からは、このモデルの可視的效果を得るためには巨視化しなければならない。そのために得られた方程式が巨視的モデルであって、それは単独2階の非線形波動方程式である。

続いて、この方程式に関する幾何学と解析学、言い換えれば、力学と偏微分方程式固有の問題および関連した問題を取りあげ、それらを議論しようとするものである。最終的かつ完全な解決はまだ努力を必要とするが、純数理的にも興味深いと思われる。加えて、灯台モデルとその巨視的モデルの評価の問題を取りあげる。この問題はニューロンのネットワークとその応用に関連する今後に残された重要な問題と考えられる。

1. 灯台モデルと巨視的モデル

(1) 準微視的モデルとしての灯台モデル

シナプス経路の軸索パルスに対応する樹枝状突起電流の時間的发展方程式系：

$$\dot{\psi}_m(t) = \sum_k a_{mk} P_k(t - \tau) - \gamma \psi_m(t) + F_{\psi,m}(t), \quad (1.1)$$

$$P_k(t) = f(\phi_k(t)), \quad (1.2)$$

$$\dot{\phi}_k(t) = S \left(\sum_m c_{km} \psi_m(t - \tau') + p_{ext,k}(t - \tau'') - \Theta_k \right) + F_{\phi,k}(t), \quad (1.3)$$

ここで、 ψ_m : m 番目のニューロンにおける樹枝状突起電流全体、 P_k : m 番目のニューロンにインプットする k 番目の他ニューロンからの軸索パルス、 a_{mk} : 近似的に定数、 τ' , τ'' : 時間遅れ、 γ : 減衰計数、 $F_{\psi,m}$, $F_{\phi,k}$: 電流に働く揺動力、 f : パルスと位相角 ϕ の関係、 c_{km} : ニューロン間の結合係数、 $p_{ext,k}$: k 番目のニューロンにインプットする他ニューロンからの軸索パルス、 $S(X - \Theta)$: sigmoid 関数、閾値 Θ に対して、 $X < \Theta \Rightarrow S = 0$ (ニューロンの抑制状態)、 $X \geq \Theta \Rightarrow S \geq 0$ (ニューロンの興奮状態)。なお、関数 f は周期的かつ鋭くピークすると仮定、式 (1.3) は、位相角の回転速度は sigmoid 関数とランダムに変わる揺動力で与えられることを示す。方程式系 (1.1) - (1.3) は少数のニューロンに対する実験結果に基づいて一般化された結果である。

(2) 灯台モデルの時間的平均化の手続き

このプロセスは極めて複雑であるが、基本的には以下の手続きからなる：

すべてのニューロンにわたるパルスの平均化から出発して、各 m, k の空間変数への置き換えに伴う ψ_m を δ 関数の使用による特定のグリーン関数を用いて、積分表示することによって連続化、電流の伝播の不均一性から生じる電流密度の sigmoid 表示、および最初の ψ_m のフーリエ変換の両辺に (先のグリーン関数に対応する関数をフーリエ変換によって定め、この関数から導かれる) 特定因子を乗じてからそのフーリエ逆変換をとる。

比較的長い議論を要するが、時間的平均の手法が巨視化の基本原理である。

(3) 巨視的モデルとしての非線形波動方程式

上記の最後のステップから単独2階の非線形（厳密には、半線形）偏微分方程式を得る。ここでは、 m, k を既に空間変数に置き換えていること、およびニューロンが抑制状態時の電流は近似的にゼロとみなし、興奮状態時の電流だけを実質的に考えて、電流 $\psi_m(t) \rightarrow \psi_e(x, t)$ と記す。

空間次元が 1, 2 の場合は省略して、3次元の場合でまとめると、次の方程式となる：

$$\ddot{\psi}_e + (\omega_0^2 - v_e^2 \Delta) \psi_e + 2\omega_0 \dot{\psi}_e = a_e \left(\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot S_e [\psi_e(x, t) + p_a(x, t) + p_{sm}(x, t)] \quad (1.4)$$

ここで、 ω_0 : 定数、 v_e : 波動の伝播速度、 a_e : 興奮状態にあるニューロンどうしのシナプス結合の強度、 $p_a(x, t)$: 電流密度の空間的分布関数と周波数の周期的インプットを含む時間変数の $\sin$ 関数の積、 $p_{ms}(x, t)$: 上記の電流密度の分布関数と特定の非同次調和振動子解の積、 S_e : ニューロンの興奮時のみを対象とした sigmoi 関数、 $S_e(Q) \approx aQ - bQ^3$ (: 次の講演に関係深い)。

方程式 (1.4) を具体的に計算、適当に定数を用いて表せば、 $B\psi_e^2\dot{\psi}_e$ の他に非線形項 K_j を含む次の方程式に帰着する：

$$\ddot{\psi}_e + (\omega_0^2 - v_e^2 \Delta) \psi_e + \gamma_0 \dot{\psi}_e + A_e^3 + B\psi_e^2\dot{\psi}_e + \sum_{j=1}^4 K_j = 0. \quad (1.5)$$

ここで、各 K_j は $t, \psi_e, \dot{\psi}_e$ 等を含む。

(4) 方程式 (1.5) の解のモード展開

方程式 (1.5) の解法は数学的に興味があるが、解の現象的立場（実験的観点）からすれば基準振動を表す振動の型に着目して、それぞれの和としたものを解とする方法＝モード展開の方法 が有効である：

$$\psi_e(x, t) = \sum_{n=-1}^1 \xi_n(t) \exp(inkx) \quad (1.6)$$

展開 (1.6) とニューロンの領域に対する周期的境界条件を考慮して、簡単のため空間次元が1の場合が示される：図 2 参照。この結果については様々な議論がなされている。

2. モデルをめぐる問題

(1) 巨視的モデルに対する数理的問題

脳の電磁的活動の巨視的モデル (1.5) は一般的に次の形で書ける：

$$\square \psi_e = F(t, \psi_e, \dot{\psi}_e) \quad (2.1)$$

ここで、 $\square$: d'Alembert 作用素 ($= \partial^2 / \partial t^2 - v_e^2 \Delta$)。

方程式 (2.1) は高度に半線形の偏微分方程式であり、非線形項はすべて右辺に含まれている。

方程式 (2.1) に関して現時点で考察中の当面の問題とそれらにかかわる詳細な内容説明はこの場では煩雑過ぎるので省略して、ここではこれらの説明を概略的かつ簡潔にとどめておきたい。

1) 力学系としての問題

方程式 (2.1) をシンプレクティック多様体といわれるある特殊な2次形式 ω とある空間 P の対からなる領域で考えようとするものである。このとき、方程式 (2.1) に付随するエネルギー H を P 上の部分領域で定義さ

れた関数とすれば、これらの組み (P, ω, H) をハミルトン系という。ここからこのような力学系の幾何学的議論が行われる。たとえば、最も基本的な問題の一つとして、 H を H に対応するあるベクトル場を用いて形式 ω を介して P 上の関数として適正に定めることができれば、先の三つ組みはハミルトン系であり、ハミルトン系としての方程式 (2.1) はハミルトン力学の立場から議論が可能となる。

このような H で代表されるエネルギーは次の偏微分方程式の問題においても重要な役割をもっている。

2) 偏微分方程式としての問題

方程式 (2.1) を偏微分方程式論固有の枠内で考えようとする場合の問題である。立場はいくつか考えられる。

まず、 ψ のみを左辺とする正規形とした場合は一般的な意味の双曲型方程式の枠内で議論が可能である。次に左辺の作用素を線形の規則的に双曲型として、右辺を非線形項を含む関数として議論しようとする立場が考えられる。これは最初のものよりもより具体的な扱いが可能と考えられる。その他には、対称双曲型へ帰着することも可能である。実際、未知関数を2つ適当に選べば Maxwell 型の方程式系へ還元できるからそれを改めて対称型へ書き換えることは容易であるからである。しかし、いずれの場合も非線形であることには変わらない。したがって、二番目の場合が方程式 (2.1) を議論するのに最も近道であろう。

さて、方程式 (2.1) を規則的に双曲型方程式とすれば、問題とすべき点は基本的に次のものである：

- 1' . 初期値問題の解の存在と一意性 2' . 解の性質 3' . 解の構成

1' の存在問題については、時間的意味の局所的な場合と大局的な場合があり、一般論からすればいずれも極めて限定的な条件下でそれぞれの存在が保証可能であるが、方程式 (2.1) のままこれら、特に大局的な場合を示そうとすることはアブリアオリ評価を見い出すのに困難であり、容易ではない。一意性に関しては、エネルギー不等式が有効である。そのためにも1) で述べたエネルギー関数 H の確立を得ておく必要がある。2' と3' についてはここでは省略する。

(2) 両モデルに対するネットワークの立場からの問題

これはいくつか考えられる：

- 1' . 灯台モデルとその巨視的モデルの評価または既成のモデルに対する位置付けの問題
2' . 最近の他のモデル (P.C.Bressloff-S.Coombes の integrate and fire モデル 1998) との関係
3' . ニューラルネットワークへの応用

最初のは、既成のニューロンモデルとの比較またはニューラルネットワークとの対比である。両サイドから眺めるとき、Haken のモデルはいずれもニューロンモデルの中間的位置にあって、同時にニューラルネットワークの2つの代表的モデルの性格を合わせもつ印象が強い。厳密な議論は今後に残されよう。2' が明らかとなれば、1' と合わせてさらにこれらのモデルの関連と役割が明らかとなろう。最後の問題は Haken のモデルの実用的価値の問題である。巨視的モデルは現象論に寄与すると期待されよう。灯台モデルははじめに述べた M-

P モデルを導くことができるほど一般的機能が大きいであろうから、回帰分析の方法の改良または他への応用を見い出せるかが問題であろう。

最後に本資料の内容に直接関係する文献を記載するが、必要最小限にとどめておく。

参 考 文 献

- [1] Abraham,R.,Marsden,J.E.,Ratiu,T., Manifolds, Tensor, Analysis, and Applications, Global Analysis, Pure and Applied, Addison Wesley(1983).
- [2] Bressloff,P.C.,Coombes,S., Desynchronisation, Model Locking, and Bursting in Strongly Coupled Integrate-and-Fire Oscillations, Phys.Rev.Lett.,81, 2168-2171 (1998).
- [3] FitzHough,R., Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane, Biophysical J.,1, 445-466(1961).
- [4] Gustafson,K., Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods, Dover Publications (1999).
- [5] Gustafson,K., Chaos in discrete learning systems, Chaos,Solitons and Fractals 11, 321-327 (2000).
- [6] Haken,H., Principles of brain functioning, A synergetic approach to brain activity, behavior and cognition, Springer(1996).
- [7] Hodgkin,A.L.,Huxley,A.F., A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve, J.Physiology,117, 500-544(1952).
- [8] Hopfield,J.J., Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, Proc.Natl.Acad.Soc.,79, 2554(1982).
- [9] Jirsa,V.K.,Haken,H., A field theory of electromagnetic brain activity, Phys.Rev.Lett., 29 July 960-963(1996).
- [10] Jirsa,V.K.,Haken,H., A derivation of a macroscopic field theory of the brain from the quasi-microscopic neural dynamics, Physica D 99, 503-526(1997).
- [11] John,F., Nonlinear Wave Equations, Formation of Singularities, ULS Univ.Series 2, Amer. Math.Soc.(1990).
- [12] Marsden,J.E., Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics, CBMS-NSF Regional Conference Series,Soc.IndustrialandAppliedMathematics,Philadelphia(1981).
- [13] McCulloch,W.,Pitts,W., A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, Bull. Math. Biophysics 5, 115-133(1943).

- [14] Michael, B., Melrose, R. B., Rauch, J. (eds.), Microlocal Analysis and Nonlinear Waves, The IMA volumes in Math. & its Appls., Vol.30, Springer(1991).
- [15] Nagumo, J., Arimoto, S., Yoshizawa, S., An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon, Proc. Institute of Radio Engine., 50, 2061-2070(1962).

付 録 I

本文中に図1および図2とあるものは講演時使用の O.H.P. による説明図である。それぞれの縮小されたものをここに再録しておく：

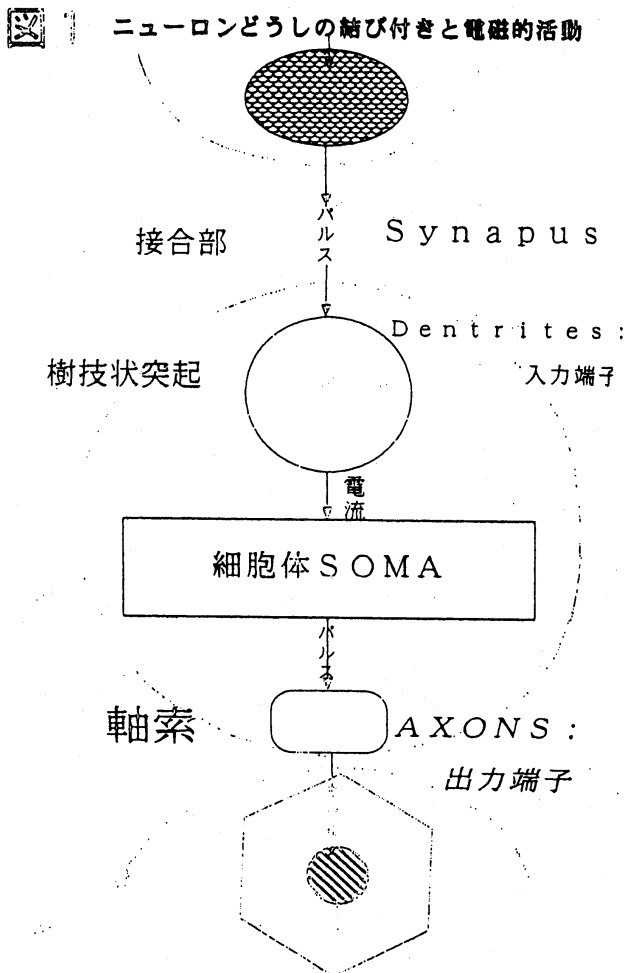
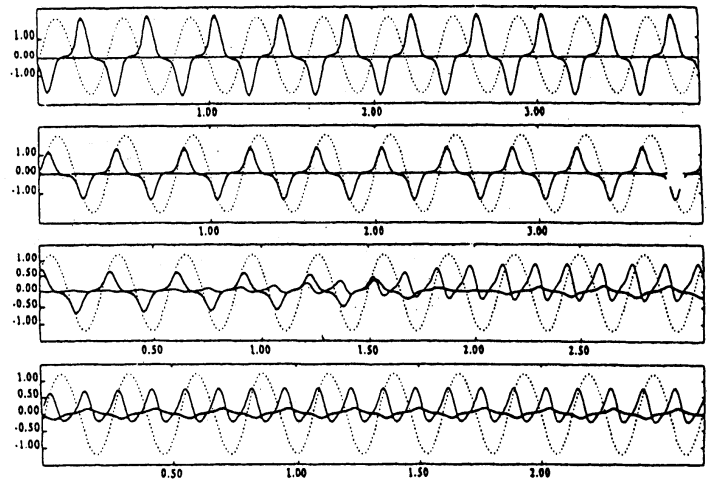


図2: モードの振幅 ξ_i ($i=1,2,3$)



Ω (非線形項 K_1, K_3 に含まれる興奮周波数 & 制御パラメーター) の値: 上から順に
 $\Omega = 0.31, 0.62, 0.40, 0.47$

に対する振幅

ξ_0 : 太線, ξ_1 : 点線,
 ξ_{-1} : 細線

横軸: 時間 (sec), 縦軸: 振幅 (cm)

$\omega_0 = 0.15, v_e = 1.52, \gamma_0 = 0.03$

$A = 5 \times 10^{-3}, B = 0.4$

付 録 II

A. 本文で説明を省略した巨視的モデル (1.4) の導出に触れておく。これは灯台モデル (1.1) — (1.3) の時間的平均化 (1の(3)) に基づいて行われる。まず、簡単のため、この平均化を単一ニューロンに対して示しておこう：

単一ニューロンの樹枝状突起電流に対する方程式は方程式 (1.1) の特別な場合として

$$\dot{\psi}(t) = aP(t - \tau) - \gamma\psi(t) + F_{\psi}(t) \quad (\text{A. 1})$$

この解は

$$\psi(t) = a \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\sigma)} P(\sigma - \tau) d\sigma + \hat{F}_{\psi}(t) \quad (\text{A. 2})$$

であるが、強さ p_0 の軸索パルス $P(t) = p_0 \sum_j \delta(t - t_j)$, t_j : パルスの発生する時刻、が時間 T 内に生じた個数 (一種の平均値)

$$\frac{1}{Tp_0} \int_{t-T/2}^{t+T/2} P(\sigma) d\sigma \equiv A(t) \quad (\text{A. 3})$$

を用いると、解 (A. 2) は次のように表せる：

$$\psi(t) = ap_0\gamma T \cdot A(t - \tau) + \hat{F}_{\psi}(t) , \quad 1/\gamma = T \quad (\text{A. 4})$$

また、式 (1.3) から ϕ の時間的平均を

$$\frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \phi d\sigma = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} S \left(\sum_m c_m \psi_m(\sigma - \tau') + p_{\text{ext}} - \Theta \right) d\sigma \quad (\text{A. 5})$$

と考え、 ϕ の時間的平均 $\approx A(t)$ とすれば、式 (A. 5) から

$$A(t) \approx S \left(\sum_m c_m \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} (\psi_m(\sigma - \tau') + p_{\text{ext}}) d\sigma - \Theta \right) \quad (\text{A. 6})$$

と表せる。

以上の考えを単一ニューロンに対する時間的平均の原理として、この原理をニューロン全体に対する方程式 (1.1) — (1.3) へ適用することによって、巨視的モデルの導出が可能となる：

$A(t)$ に代って、 $A_{jk}(t)$ (j : 興奮性または抑制性, m : ニューロンの番号) として、 $j = e$: 興奮性, $j = i$: 抑制性, $k \rightarrow x$: 空間変数 (1次元) で示す。同様に、 $j \rightarrow \ell$ としても ℓ は e または i を示すものとする。このとき、 $\psi_{\ell,m}(t) \rightarrow \psi_{\ell}(x, t)$ または $\psi_i(x, t)$ であることは本文内と同じである。

さて、式 (A. 4) のニューロン全体への一般化は式

$$\psi_{\ell,m}(t) = \sum_k f_{\ell,m,k} a_{\ell} A_{\ell,k}(t - t_{\ell,mk}) + F_{\ell,m}(t) \quad (\text{A. 7})$$

で与えられる。 $f_{\ell;m,k}a_{\ell}$: ニューロン m と k の間の結合の強さ, $t_{\ell,mk}$: 有限伝播速度 v_e , v_i にしたかう時間遅れ, とする。また, 式 (A. 6) の一般化は (A. 7) に対応して

$$A_{jk}(t) = \hat{S}_j \left(\sum_m \hat{f}_{j;k,m} (\psi_{e,m}(t - t_{e,km}) - \psi_{i,m}(t - t_{i,km})) + p_{j,m}(t - t_{km}) \right) + \hat{F}_{\ell,m}(t) \quad (\text{A. 8})$$

で表される。記号は式 (A. 7) に同様であり, $p_{j,m}$: m 番目のニューロンにおける種類 j の外部信号, $\hat{F}$: 揺動力。ここで式 (A. 8) を局所化, すなわち個別的に表せば,

$$A_{jk}(t) = \hat{S}_j (\psi_{e,k}(t) - \psi_{i,k}(t) + p_{j,k}(t)) + \hat{F}_{j,m}(t) \quad (\text{A. 9})$$

となる。

式 (A. 7) — (A. 9) から, Wilson - Cowan モデル [A. 1] (付録 II の文献表), またニューラルネットワークにおける McCulloch-Pitts モデル [13] (本文の文献表) がそれぞれ得られるが省略する。

ここで重要なことは, 式 (A. 7) — (A. 9) から A_{jk} を消去して $\psi_{\ell,m}(t)$ を表せば,

$$\psi_{\ell,m}(t) = \sum_k a_{\ell} f_{\ell;m,k} \hat{S}_{\ell} (\psi_{e,k}(t - t_{\ell,mk}) - \psi_{i,k}(t - t_{\ell,mk}) + p_{\ell,k}(t - t_{m,k})) \quad (\text{A. 10})$$

となるが, 式 (A. 10) は脳活動の電磁場の方程式 (1. 4) を引き出す出発点となる。その目的のためには式 (A. 10) の連続化をはかる必要がある。

以下の議論において, m, k を空間変数 x とし, $f_{\ell;m,k}$ を滑らかな減少関数と仮定, 近似的に $\psi_i = 0$, とする。このとき, 式 (A. 10) は次のように書き換えられる:

$$\psi_e(x, t) = a_e \int dX f_e(x, X) \hat{S}_e \left[\psi_e \left(X, t - \frac{|x - X|}{v_e} \right) + p_e \left(X, t - \frac{|x - X|}{v_e} \right) \right] \quad (\text{A. 11})$$

式 (A. 10) と比較するとき, k に関する総和が X に関する積分に置き換えられている。

次に式 (A. 11) を局所場の方程式に書き換える。そのため, $f_{e,m,k} \rightarrow f_e(x, X) = \beta(x - X)$,

$\delta(t - T - |x - X|/v_e)$ およびグリーン関数

$$G(x - X, t - T) = \delta \left(t - T - \frac{|x - X|}{v_e} \right) \beta(x - X)$$

を用いると,

$$\psi_e(x, t) = \int dX \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - X, t - T) \rho(X, T) dT \quad (\text{A. 12})$$

を得る。ただし,

$$\rho(X, T) = a_e \hat{S} [(\psi_e(X, T) + p(X, T))] \quad (\text{A. 13})$$

は波動または場の方程式の不均一性から起こる一種の密度関数と考えられ, 方程式は少なくとも空間的に一様に

平均化または均一化されたものではないことを示している。

次にフーリエ変換を用いて、

$$\psi_e(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - i\omega t} \psi_e(k, \omega) dk d\omega \quad (\text{A. 14}),$$

ここで、 $\rho(x, t) \leftrightarrow \rho(k, \omega)$ および $G(\xi, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\xi - i\omega t_0} g(k, \omega) dk d\omega$, ただし

$\xi = x - X$, $t_0 = t - T$ とする。このとき、(A. 12) と (A. 14) を比較して

$$\psi_e(k, \omega) = g(k, \omega) \rho(k, \omega) \quad (\text{A. 15}).$$

式 (A. 15) 中の $g(k, \omega)$ の具体的な形は先のグリーン関数 $G(x - X, t - T)$ の右辺にある β の特定な形に依存する。ここでは、妥当な単純例として

$$\beta(x - X) = \frac{1}{2\sigma_e} e^{-|x - X|}$$

を選ぶことによって、 $g(k, \omega)$ は次のフーリエ変換によって定められる：

$$\begin{aligned} g(k, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx + i\omega t} G(x, t) dx dt \\ &= (\omega_0^2 - i\omega_0\omega) \left(v_e^2 k^2 + (\omega_0 - i\omega)^2 \right)^{-1}, \quad \omega_0 = \frac{v_e}{\sigma_e} \quad (\text{A. 16}). \end{aligned}$$

最後に、式 (A. 12) のフーリエ変換の両辺に式 (A. 16) の第2式右辺の分母 $(v_e^2 k^2 + (\omega_0 - i\omega)^2)$ を乗じてから、逆変換をとることによって、

$$\ddot{\psi}_e + \left(\omega_0^2 - v_e^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi_e + 2\omega_0 \dot{\psi}_e = \left(\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho(x, t) \quad (\text{A. 17})$$

を得る。ここで、式 (A. 17) の右辺 $\rho(x, t)$ を $a_e S_e [\psi_e(x, t) + p_a(x, t) + p_{ms}(x, t)]$, $\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow \Delta$ とすることによって、巨視的モデルの方程式 (1. 4) が得られたことになる。

上記の導出に関する詳細は文献 [9], [10] を見られるとよい。

B. 巨視的モデルの具体化 (1. 5) に現れた ψ_e , $\dot{\psi}_e$ に関する非線形性の項を含む各項 K_j の形を記しておく。

順に、

$$\begin{aligned} K_1 &= \epsilon \left(2\Omega \sin 2\Omega t \psi_e - \cos 2\Omega t (\dot{\psi}_e + \omega_0 \psi_e) \right), & K_2 &\propto \psi_e^2, \psi_e \dot{\psi}_e \\ K_3 &\propto \cos(\Omega t + \phi), \quad \cos(3\Omega t + \phi') & K_4 &= \gamma_1 \ddot{\psi}_m \end{aligned} \quad (\text{B. 1})$$

で与えられる。表示 (B. 1) については文献 [9], [10] に詳しいが, これらは MEG 測定の実験結果 [B 1] および [B 2] に基づいて得られたものである。

K_1 は入力信号の周波数を 2 重に推進するパラメータの効果を表す。 K_2 は ψ_e^2 , および ψ_e^2 と $\psi_e\dot{\psi}_e$ を同時に含む項の和で与えられる。 K_3 は時刻 t の関数項で ψ_e , $\dot{\psi}_e$ を本質的に含まない。 K_4 はモーター信号のフィードバックループを含む項とされる。ここで,

$$\bar{\psi}_m(t) = \int dx \beta_m(x) \psi_e(x, t) \quad (\text{B. 2})$$

式 (B. 2) の左辺は $\bar{\psi}_m(t) \approx \bar{\psi}_0 \cos \Omega t$ と見なされるが, いずれにしても ψ_e に本質的に依存する。

各項の重要度について言えば, K_1 は最も重要な項であり, K_2 は小さいながらも影響的な役割があり, K_3 はその影響は非常に小さく, ほとんど無視できる。 K_4 は K_1 に次いで重要であることが知られている。

補 足 文 献

[A 1] Wilson, H.R., Cowan, J.D.:

(1) Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons, Biophysical Journal, Vol. 12, 1 - 24 (1972)

(2) A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue, Kybernetik 13, 55 - 80 (1973)

[B 1] Keslo, J.A.S., Bressler, S.L., Buchanan, S., DeGuzman, G.C., Ding, M., Fuchs, A., Holroyd, T., A phase transition in human brain and behavior, Physics Letter A 169, 134 - 144 (1992)

[B 2] Jirsa, V.K., Friedrich, R., Haken, H., Kelso, J.A.S.:

(1) A theoretical model of phase transitions in the human brain, Biol. Cybern., 71, 27 - 35 (1994)

(2) Reconstruction of the spatio-temporal dynamics of a human magnetoencephalogram, Physics D 89, 100 - 122 (1995)

なお, H.Haken による近刊予定の著: Brain Dynamics. Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Net with Delayed and Noise, Springer Series in Synergetics, Springer (2002) が期待される。