

単純かざぐるまフレームレット

東京大学大学院数理科学研究科 新井仁之 (Hitoshi ARAI)
Graduate School of Math. Sci.
The University of Tokyo

講演では『かざぐるまフレームレットの錯視研究への応用』というタイトルで、われわれが [1] で構成した単純かざぐるまフレームレット (simple pinwheel framelet) を解説し、そのさまざまな幾何的錯視の研究への応用を報告した。講演では単純かざぐるまフレームレットの構成について詳しく述べるができなかったので、本稿ではその構成の概略を記すことにする。

フレームレットはウェーブレットを一般化した枠組みで、その一般論は Daubechies, Han, Ron, Shen [2] により研究が始められた。単純かざぐるまフレームレットは筆者ら ([1]) が構成した新しいフレームレットの一つである ([3] も参照)。

はじめに単純かざぐるまフレームレットを構成した動機について述べる。

1 動機

これまで筆者は最大重複双直交ウェーブレットをもとに視覚の非線形数理モデルを設計し、錯視の研究を行ってきた (その結果をまとめた報告として [4], [5] があるので興味のある方は参照してほしい。またある種の傾き錯視への応用研究としては [6] がある)。単純かざぐるまフレームレットは人の視覚のさらに精緻な数理モデルを構成するために考えたものである。外界の光の情報は眼球に入り、網膜でとらえられる。網膜である程度情報処理が行われ、それから視神経を通して、かなりの部分が外側膝状体を介して大脳皮質の V1 野に到達する。V1 野には単純細胞があり、それによりいくつかの重要な視覚の情報処理が行われる。単純かざぐるまフレームレットはその単純細胞の数学的な類似である。

単純細胞の数学的モデルとしては古くはガボール関数が考えられてきた。しかし最近, R. Young ([7]) はガウス関数の高階までの導関数を用

いたほうが神経科学的なデータにフィットしやすいことを発見した。しかしガボール関数もガウス導関数もコンパクト台をもたないという欠点をもっている。実際、単純細胞の受容野は有界集合であるし、また計算機で計算する際には、近似的な処理をしなければならない。近似的な処理をした段階で、厳密には完全再構成性が損なわれる。これは視覚の非線形性を計算機を用いて研究するには欠陥といえる。これに対して、単純かざぐるまフレームレットは、非常に短い FIR フィルタから構成され、完全再構成性を有し、関数としてもスプライン関数をもちいて実現される。しかも高階までのガウス導関数型のフィルタを含んでおり、多様な方位選択性を持っている。

ところで視覚は錯視を生み出すことからわかるように完全再構成性を持っていない。錯視の研究とは、ある意味でこの視覚の不完全再構成性を解明することである。しかしガボール関数、ガウス関数の近似処理による不完全再構成性は、視覚に由来するものではなく、あくまでも近似という計算上の理由による。これに対して、単純かざぐるまフレームレットは完全再構成性を有しているので、それに視覚機能に由来する処理を付加することにより、視覚の非完全再構成性を詳細に研究することが可能となるのである。

2 構成

ここでは [1] による構成の概要を述べる。単純かざぐるまフレームレットは周波数領域で構成する。 n を 3 以上の整数とする。

$$\begin{aligned}\Lambda_f &= \{(0, n), (n, 0), (n, n)\}, \\ \Lambda_g &= \{(k, l)\}_{k=0, n; l=1, 2, \dots, n-1} \cup \{(k, l)\}_{l=0, n; k=1, 2, \dots, n-1}, \\ \Lambda_a &= \{(k, l)\}_{k=1, 2, \dots, n-1; l=1, 2, \dots, n-1}.\end{aligned}$$

とおく。 $\alpha_k = \binom{n}{k}$ and $\beta_k = \binom{n-2}{k-1}$ とし、 $c(x) = \cos(\pi x)$, $s(x) = \sin(\pi x)$, $i = \sqrt{-1}$ とする。

$$r_n = \begin{cases} 1, & n \text{ が奇数} \\ 0, & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

とおく. M をサンプリング行列とし, $c_M = \sqrt{|\det M|}$ とおく. $(k, l) \in \Lambda_a$, $\kappa = 1, 2$ に対しては

$$A_{k,l}^\kappa(x, y) = 2^{-1} c_M i^{k+l+1} e^{-r_n \pi i(x+y)} c(x)^{n-k-1} s(x)^{k-1} c(y)^{n-l-1} s(y)^{l-1} \\ \times \left((-1)^\kappa \sqrt{\alpha_k \beta_l} c(x) s(x) + \sqrt{\alpha_l \beta_k} c(y) s(y) \right),$$

$(k, l) \in \Lambda_g$ に対しては

$$G_{k,l}(x, y) = 2^{-1/2} c_M i^{k+l} \sqrt{\alpha_k \alpha_l} e^{-r_n \pi i(x+y)} c(x)^{n-k} s(x)^k c(y)^{n-l} s(y)^l,$$

$(k, l) \in \Lambda_f$ に対しては

$$F_{k,l}(x, y) = c_M i^{k+l} e^{-r_n \pi i(x+y)} c(x)^{n-k} s(x)^k c(y)^{n-l} s(y)^l$$

とし,

$$S(x, y) = c_M e^{-r_n \pi i(x+y)} c(x)^n c(y)^n$$

とする. $\mathbf{s} = (s[m])_{m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$, $\mathbf{f}_{k,l} = (f_{k,l}[m])_{m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$ ($(k, l) \in \Lambda_f$), $\mathbf{g}_{k,l} = (g_{k,l}[m])_{m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$ ($(k, l) \in \Lambda_g$), $\mathbf{a}_{k,l}^1 = (a_{k,l}^1[m])_{m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$ ($(k, l) \in \Lambda_a$), $\mathbf{a}_{k,l}^2 = (a_{k,l}^2[m])_{m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$ ($(k, l) \in \Lambda_a$) を, それぞれの周波数応答関数が S , $F_{k,l}$ ($(k, l) \in \Lambda_f$), $G_{k,l}$ ($(k, l) \in \Lambda_g$), $A_{k,l}^1$ ($(k, l) \in \Lambda_a$), $A_{k,l}^2$ ($(k, l) \in \Lambda_a$) となるような 2 次元フィルタであるとする. ここで, BIBO 安定なフィルタ $h = (h[m_1, m_2])_{m_1, m_2 = -\infty}^\infty$ に対して, その周波数応答関数は

$$H(x, y) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^\infty h[m_1, m_2] e^{-2\pi i(m_1 x + m_2 y)}.$$

により定義している. [1, Lemma 1] より $\mathbf{s}$, $\mathbf{f}_{k,l}$, $\mathbf{g}_{k,l}$, $\mathbf{a}_{k,l}^1$, $\mathbf{a}_{k,l}^2$ は実数値の FIR フィルタになっている. フィルタ係数の具体的表示については [1, Lemma 1] を参照してほしい. $\mathbf{s}$, $\mathbf{f}_{k,l}$, $\mathbf{g}_{k,l}$, $\mathbf{a}_{k,l}^1$, $\mathbf{a}_{k,l}^2$ を **次数 n の単純かざぐるまフレームレット・フィルタ** という.

以下では M として $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を考える (そのほかの行列の場合については, [1, Lemma 1] を参照). 次数 n の単純かざぐるまフレームレット・フィルタから, アーベル群 $\mathbf{Z}/N_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/N_2\mathbf{Z}$ (ここで N_1, N_2 は正の整数), $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 上のタイト・フレーム, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上のタイト・フレームレットが構成できる.

視覚・錯視の研究では, 単純かざぐるまフレームレット・フィルタによる $\mathbf{Z}/N_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/N_2\mathbf{Z}$ 上の次に述べる最大重複一般化多重解像度解析を用いる.

3 最大重複一般化多重解像度解析

最大重複方式は定常法とも呼ばれ，ウェーブレット基底に関する多重解像度解析の場合に Coifman-Donoho, Nason-Silverman らにより導入され，研究がなされた ([8], [9], [10] 参照). 幾何的錯視の研究では単純かざぐるまフレームレット・フィルタに対する $\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N_2\mathbb{Z}$ 上の最大重複一般化多重解像度解析 ([1]) を用いる. 本稿では単純かざぐるまフレームレット・フィルタによる最大重複一般化多重解像度解析が多様な方位選択性をもつことを見ていただくために，単位インパルス応答のグラフを図示する (図 1).

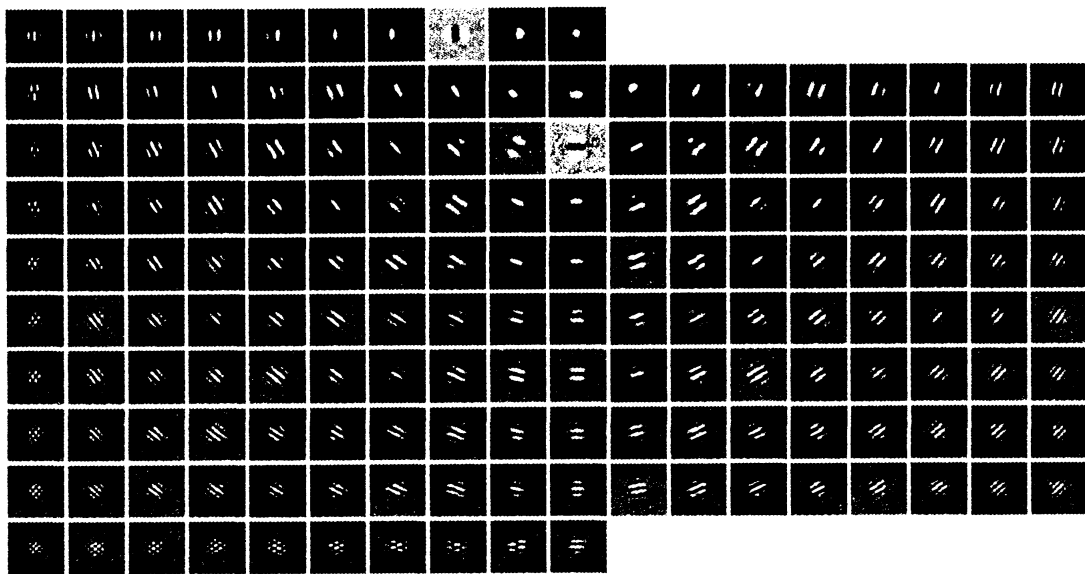


図 1: $n = 9$ の場合の単純かざぐるまフレームレット・フィルタを用いた最大重複一般化多重解像度解析のレベル 2 の単にインパルス応答. 図を見やすくするために各図は中心部のみを抜き出して表示. 多様な方位選択性を持ち，高階ガウス導関数型の形状の単位インパルス応答があることがわかる ([1]).

なお単純かざぐるまフレームレットと類似しているが，定義が異なり，また機能も異なるフィルタ・バンクを筆者らは構成している. それについては [11] を参照してほしい.

参考文献

- [1] H. Arai and S. Arai, 2D tight framelets with orientation selectivity suggested by vision science, invited paper, JSIAM Letters 1 (2009), 9–12.
- [2] I. Daubechies, B. Han, A. Ron and Z. Shen, Framelets: MRA-based construction of wavelet frames, Appl. Comput. Harm. Anal. 14 (2003), 1–46.
- [3] 新井仁之, ウェーブレット, 共立出版, 2010.
- [4] 新井仁之, 視覚の科学と数学, ウェーブレットで探る錯視の世界, 数理科学, 2008年8月号–2009年1月号に連載.
- [5] 新井仁之, ウェーブレット・フレームとその錯視研究への応用, 可視化情報学会誌 29 (2009), 10–17.
- [6] 新井仁之, 新井しのぶ, ウェーブレット分解で見る, ある種の傾き錯視における類似性, VISION, J. Vision Soc. Japan 17 (2005), 259–265.
- [7] R. Young, Oh say, can you see? The physiology of vision, SPIE 1453 (1991), 92–123.
- [8] R. R. Coifman and D. L. Donoho, Translation invariant de-noising, Lect. Notes in Statistics 103 (1995), 125–150.
- [9] G. P. Nason and B. W. Silverman, The stationary wavelet transform and some statistical applications, Lect. Notes in Statistics 103 (1995), 288–299.
- [10] D. B. Percival and A. T. Walden, Wavelet Methods for Time Series Analysis, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [11] H. Arai and S. Arai, Finite discrete, shift-invariant, directional filterbanks for visual information processing I: Construction, Interdisciplinary Information Sci. 13 (2007), 255–273.