

擬微分作用素における近似定理
と L^p -有界性

阪大 教養

長瀬道弘

0, 序論, 擬微分作用素の理論は今まで多くの人々によって研究されているが, そのほとんどが C^∞ -級の滑らかさを持つ表象を持つものを扱っている。更に C^∞ -級の表象が扱われていない場合でも, 例えば擬微分作用素の L^2 -又は L^p -有界性を示すためには, 表象が変数 x 方向にも ξ 方向にも, 変数の次元 n に関係した微分可能性を持つことが要求されている ([1], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9])。表象の微分可能性とくに変数 x に関する微分可能性をできるだけ少くして, 擬微分作用素を論ずることは, それ自身興味のあることであるしまた応用上も大切な意味を持つように思われる。

この稿では, 空間変数 x に関する滑らかさが少ない表象を持つ擬微分作用素を扱う一つの手法として, 擬微分作用素の表象に関する近似定理を述べる。近似定理で今までによく知られたものとしては, Sharp Gårding の不等式を示すために用

いられた Friedrichs 近似に関する定理がある ([7] 参照)。

Friedrichs 近似が表象の ξ 方向に関する軟化子を用いる近似であるのに対して、この稿における近似は x 方向に関する軟化子を用いている。この近似の応用は、今までにいくつか考えられている ([10], [12], [13]) が、この稿ではとくに有界連続な表象を持つ擬微分作用素の L^2 -有界性について述べる。

L. Nirenberg が、“表象 $p(x, \xi)$ が任意の α に対して

$$(*) \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi)| \leq C_{\alpha} < \infty$$

をみたすならば、 $p(x, D_x)$ は L^2 -有界であるか？”という問題を提起した。これに対して、Kumano-go [6], Hörmander [4], Chin-Hung Ching [2] 等によって L^2 -有界でない擬微分作用素の例が与えられ、とくに Chin-Hung Ching [2] は $S_{1,1}^0$ に属する表象を持つが L^2 -有界とはならない作用素の例を構成した。従って Nirenberg の条件 (*) は、作用素が L^2 -有界となるためには、それだけでは十分条件ではない。本稿で述べる L^2 -有界性定理は「上の (*) の他に、“ $p(x, \xi)$ が変数 x について、Hölder 連続性を持つば、”作用素 $p(x, D_x)$ が L^2 -有界となる」ことを主張するものである。従って、Nirenberg の問題は、ほぼ完全に解けたといえる。更に、Muramatsu [11] は、別な方法でこの稿と同じ L^2 -有界性定理が成り立つことを示した。

1, 近似定理,

本稿では次の記号を用いる。 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ は $\mathbb{R}^m$ で定義された急減少関数の作る Schwartz 空間とし $B^0 = B^0(\mathbb{R}^m)$ は $\mathbb{R}^m$ 上の有界連続関数の全体を表わすとする。 m, ρ, δ は実数で $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ であるとする。 このとき記号 $\dot{S}_{\rho, \delta}^m$ は次の不等式をみたす $\mathbb{R}_x^m \times \mathbb{R}_\xi^m$ 上の関数 $p(x, \xi)$ の全体とする。

$$(1.1) \quad |p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

但し、 α, β は任意の多重指数, $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi) = (-i)^{|\beta|} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)$ とする。 本稿ではとくに $\rho = 1$ の場合を扱う。 $\tau > 0$ に対し $\dot{\tau} = \tau - [\tau]$ とおく。 このとき $B^\tau = B^\tau(\mathbb{R}^m)$ は次の性質をみたす $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $u(x)$ の全体を表わすとする。

$$(1.2) \quad |u|_\tau = \sum_{|\alpha| \leq [\tau]} \sup_x |\partial_x^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha| = [\tau]} \sup_x \{ |u^{(\alpha)}(x) - u^{(\alpha)}(y)| / |x - y|^{\dot{\tau}} \} < \infty$$

但し $u^{(\alpha)}(x) = \partial_x^\alpha u(x)$ とする。

補題 1, s は実数とし $\psi \in \mathcal{D}$ とする。 このとき

$$(1.3) \quad \partial_\xi^\alpha \{ \psi(\langle \xi \rangle^\delta z) \langle \xi \rangle^s \} = \sum_{|\alpha'| \leq |\alpha|} \psi_{s, \alpha, \alpha'}(\xi) \langle \xi \rangle^s \{ \langle \xi \rangle^\delta z \}^{\alpha'} \psi^{(\alpha')}(\langle \xi \rangle^\delta z)$$

と書ける。 但し $\psi_{s, \alpha, \alpha'}(\xi) \in \dot{S}_{1, 0}^{-|\alpha|}$ である。 ここで $\eta \in \mathbb{R}^m$ に対し $\eta^{\alpha'} = \eta_1^{\alpha'_1} \dots \eta_m^{\alpha'_m}$ であるとする。

この補題の証明は $|\alpha|$ に関する帰納法を用いて行われる。

$\gamma(x) \in \mathcal{D}$ を $\int \gamma(x) dx = 1$, $\int x^\alpha \gamma(x) dx = 0$ ($\alpha \neq 0$) となるようにとり固定する。 このような $\gamma(x)$ は次のようにして,

作れる。すなわち $\tilde{\gamma}(\xi) \in \mathcal{A}$ を $\xi = 0$ の近傍で $\tilde{\gamma}(\xi) = 1$ となるようにとり $\gamma(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{\gamma}(\xi) d\xi$ とおけばよい。

$a(x) \in B^\tau(\mathbb{R}^n)$ ($\tau \geq 0$) に対し

$$\begin{aligned} (1.4) \quad \tilde{a}(x, \xi) &= \int a(y) \gamma(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) dy \langle \xi \rangle^{\delta m} \\ &= \int a(x-y) \gamma(\langle \xi \rangle^\delta y) dy \langle \xi \rangle^{\delta m} \\ &= \int a(x - \langle \xi \rangle^{-\delta} y) \gamma(y) dy \end{aligned}$$

とおく。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2, (i) $\tilde{a}(x, \xi) \in S_{1, \delta}^0$

(ii) $|\beta| \leq [\tau]$ に対しても $\tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi) \in S_{1, \delta}^0$

(iii) $|\beta| \geq [\tau] + 1$ のとき $\tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{\delta(|\beta| - \tau)}$

(iv) $\tilde{b}(x, \xi) = a(x) - \tilde{a}(x, \xi)$ とおくと次の不等式が成り立つ。

$$|\tilde{b}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha |a|_\tau \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \tau \delta}$$

証明, $\tilde{a}(x, \xi)$ の定義式の2番目を用いると $|\beta| \leq [\tau]$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi) &= \int a_{(\beta)}(x-y) \gamma(\langle \xi \rangle^\delta y) dy \langle \xi \rangle^{\delta m} \\ &= \int a_{(\beta)}(y) \gamma(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) dy \langle \xi \rangle^{\delta m} \quad (a_{(\beta)}(y) = D_y^\beta a(y)) \end{aligned}$$

従って任意の α, β' に対して

$$\begin{aligned} |x^{\beta'} \partial_\xi^\alpha \tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi)| &\leq \int |a_{(\beta)}(y)| x^{\beta'} \left\{ \gamma_{(\beta')}(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) \langle \xi \rangle^{\delta(m+|\beta'|)} \right\} |y| dy \\ &\leq |a|_\tau \sum_{|\alpha'| \leq |\alpha|} |y_{\delta(m+|\beta'|), \alpha', \alpha}(\xi)| \langle \xi \rangle^{\delta(m+|\beta'|)} \int |\langle \xi \rangle^\delta (x-y)|^{\alpha'} \gamma_{(\beta'+\alpha')}(\cdot) |dy| \\ &\leq C_{\alpha, \beta'} |a|_\tau \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \delta|\beta'|} \end{aligned}$$

となることから (i), (ii) が得られる。また $\gamma(y)$ のとり方から

$$\tilde{b}(x, \xi) = \int \{a(x) - a(x-y)\} \gamma(\langle \xi \rangle^\delta y) \langle \xi \rangle^{\delta m} dy$$

と書ける。従って $0 < \tau < 1$ のとき

$$\begin{aligned} |\tilde{b}^{(\alpha)}(x, \xi)| &\leq \int |a(x) - a(x-y)| \sum_{|\alpha'| \leq |\alpha|} |y|_{m\delta, \alpha, \alpha'}^{(\xi)} |\{ \langle \xi \rangle^\delta y \}^{\alpha'} \gamma^{(\alpha')}(\langle \xi \rangle^\delta y)| \langle \xi \rangle^{\delta m} dy \\ &\leq C_\alpha |a|_{\tau} \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \delta m} \int |y|^\tau |\{ \langle \xi \rangle^\delta y \}^{\alpha'} \gamma^{(\alpha')}(\langle \xi \rangle^\delta y)| dy \\ &\leq C_\alpha |a|_{\tau} \langle \xi \rangle^{-|\alpha| - \tau \delta} \end{aligned}$$

よりゆが示せる。また $\tau \geq 1$ のとき $\int y^\alpha \gamma(y) dy = 0$ に注意

すると

$$\tilde{b}(x, \xi) = \sum_{|\beta| = [\tau]} \frac{-[\tau]}{\beta!} \int_0^1 \{ \int a^{(\beta)}(x - \theta y) - a^{(\beta)}(x) \} \gamma(\langle \xi \rangle^\delta y) y^\beta \langle \xi \rangle^{\delta m} dy \} d\theta$$

と書けることから上と同様にして

$$|\tilde{b}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha| - \tau \delta}$$

が得られる。従って (iv) が示された。

また $|\beta| \geq [\tau] + 1$ のとき $\beta = \beta' + \beta''$ $|\beta'| = [\tau]$ と書くと

$$\tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi) = \int a_{(\beta')} (y) \gamma_{(\beta'')}(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) \langle \xi \rangle^{\delta(m+|\beta'|)} dy$$

だから任意の α, β'' に対して

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta''} \tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi)| &= |\partial_\xi^\alpha \{ \int a_{(\beta')} (y) \gamma_{(\beta''+\beta''')}(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) \langle \xi \rangle^{\delta(m+|\beta''+\beta''')} dy \} \\ &= |\partial_\xi^\alpha \{ \int (a_{(\beta')} (y) - a_{(\beta')} (x)) \gamma_{(\beta''+\beta''')}(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) \langle \xi \rangle^{\delta(m+|\beta''+\beta''')} dy \} \end{aligned}$$

$$(\because \int \gamma_{(\beta''+\beta''')}(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) dy = 0 \quad (\beta'' \neq 0))$$

故に上と同様にして

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta''} \tilde{a}_{(\beta)}(x, \xi)| &\leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \delta(m+|\beta''+\beta'''|)} \sum_{|\alpha'| \leq |\alpha|} \int |x-y|^\tau \\ &\quad \times |\{ \langle \xi \rangle^\delta (x-y) \}^{\alpha'} \gamma^{(\beta''+\beta'''+\alpha')}(\langle \xi \rangle^\delta (x-y))| dy \\ &\leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \delta|\beta''| + \delta|\beta'''| - \tau \delta} \\ &\leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \delta|\beta''| + \delta(|\beta| - \tau)} \end{aligned}$$

従って (iii) が示された。

証明終

この定理 2 は関数 $a(x)$ を $\mathcal{S}_{1,\delta}^0$ に属する表象 $\tilde{a}(x, \xi)$ で近似したものであり，表象に関する近似定理としては，もっとも素朴でかつ基本的なものである。次に，表象 $p(x, \xi)$ に対して同様の近似定理を述べる。表象 $p(x, \xi)$ に対して

$$\begin{aligned} (1.5) \quad \tilde{p}(x, \xi) &= \int p(y, \xi) \gamma(\langle \xi \rangle^\delta (x-y)) \langle \xi \rangle^{\delta m} dy \\ &= \int p(x-y, \xi) \gamma(\langle \xi \rangle^\delta y) \langle \xi \rangle^{\delta m} dy \\ &= \int p(x - \langle \xi \rangle^{-\delta} y, \xi) \gamma(y) dy \end{aligned}$$

とおく。

定理 3, $\tau > 0$, $0 \leq \delta' < 1$ とする。 m は実数とし N は自然数とする。 $p(x, \xi)$ は次の不等式を満足するとする。

$$(1.6) \quad |p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha| + \delta' |\beta|} \quad (|\alpha| \leq N, |\beta| \leq [\tau])$$

$$\begin{aligned} (1.7) \quad |p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) - p_{(\beta)}^{(\alpha)}(y, \xi)| \\ \leq C_{\alpha, \beta} |x - y|^\tau \langle \xi \rangle^{m - |\alpha| + \delta' \tau} \quad (|\alpha| \leq N, |\beta| = [\tau]) \end{aligned}$$

このとき $\tilde{p}(x, \xi)$ 及び $r(x, \xi) = p(x, \xi) - \tilde{p}(x, \xi)$ は，次の不等式をみたす。

$$(1.8) \quad |\tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha| + \delta' |\beta|} \quad (|\alpha| \leq N, |\beta| \leq [\tau])$$

$$(1.9) \quad |\tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha| + \delta' \tau + \delta(|\beta| - \tau)} \quad (|\alpha| \leq N, |\beta| > [\tau])$$

$$(1.10) \quad |r^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{m - (\delta - \delta')\tau - |\alpha|} \quad (|\alpha| \leq N)$$

この定理の証明は，定理 2 の $a(x)$ を $p(x, \xi)$ で置き換えて，定理 2 の証明と全く同様にできる。この場合， $p(x, \xi)$ は

ξ に関して N 回までしか微分できないことと, x に関して微分したときに $\langle \xi \rangle$ に関して δ' だけ位数が上がることに注意する。

注意 1, 今までに述べた補題 1, 定理 2, 3, はすべて, $\langle \xi \rangle$ のところを一般の基本尺度関数 $\lambda(\xi)$ に置きかえても成り立つ。

注意 2, 近似定理は, この稿では表象の形が $a(x), p(x, \xi)$ であるときについて述べたが, 表象の形が $p(x, \xi, y)$ であって x, y についての滑らかさが少ないときでも, 同様の近似定理が示せる ([10] 参照)。

注意 3, 定理 2 の $\hat{b}(x, \xi)$ 及び定理 3 の $r(x, \xi)$ に関しては, もう少し詳しい評価式を示すことができる。例えば $\tau = 1 + \tau'$ ($\tau' > 0$), $e_j = (0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ とすると, 定理 2 (iv) の不等式の他に,

$$(iv)' \quad |b_{(e_j)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha |a|_{\tau} \langle \xi \rangle^{-|\alpha| - \tau' \delta},$$

が成り立つ。更に, $r(x, \xi)$ に対しても, 定理 3 (1.10) の他に,

$$(1.10)' \quad |r_{(e_j)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{m - (\delta - \delta')\tau' - |\alpha|}$$

が成り立つ。

2. 擬微分作用素の L^p -有界性

まず, 表象 $p(x, \xi)$ に対して擬微分作用素 $p(X, D_x)$ は

$$(2.1) \quad p(X, D_x)u(x) = \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (u \in \mathcal{S}),$$

で定義される。但し $u \in \mathcal{S}$ に対し $\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$

かつ $d\xi = (2\pi)^{-m} d\xi$ である。表象 $p(x, \xi)$ が有界連続であれば $p(X, D_x)$ が $\mathcal{S}$ から B^0 への作用素であることは容易に示される。この作用素の L^p -有界性について調べる。

まず最初に, 表象 $r(x, \xi)$ が $|\xi| \rightarrow \infty$ のとき負の位数であるときの擬微分作用素 $r(X, D_x)$ の核表示について述べよう。

定理 4, 有界連続な表象 $r(x, \xi)$ が次をみたすとする。

$$(2.2) \quad |r^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-p-|\alpha|} \quad (|\alpha| \leq m+1)$$

但し $p > 0$ (この p は (1.1) の p とは異なる) とする。この

とき次の性質 (i) (ii) をみたす $\mathbb{R}_x^m \times (\mathbb{R}_z^m - \{0\})$ 上の連続関数

$K(x, z)$ が存在する。

$$(i) \quad r(X, D_x)u(x) = \int K(x, x-y)u(y)dy \quad u \in \mathcal{S},$$

(ii) $0 < p' < \min\{1, p\}$ とする任意の p' に対し

$$(2.3) \quad |K(x, z)| \leq C_{p'} (1+|z|)^{-1} |z|^{-m+p'}$$

が成り立つ。

証明, 明らかに $0 < p \leq 1$ としてよい。 $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ を

$\chi(\xi) = 1 \quad (|\xi| \leq 1/2), \quad \chi(\xi) = 0 \quad (|\xi| \geq 1)$ にとる。 $1 \geq \varepsilon \geq 0$

に対し $r_\varepsilon(x, \xi) = \chi(\varepsilon\xi)r(x, \xi)$ とおく。 $r(x, \xi)$ 及び

$r_\varepsilon(x, \xi)$ の norm $|r|_p, |r_\varepsilon|_p$ を

$$(2.4) \quad \begin{cases} |r|_p = \sum_{|\alpha| \leq m+1} \sup \{ |r^{(\alpha)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{|\alpha|+p} \} \\ |r_\varepsilon|_p = \sum_{|\alpha| \leq m+1} \sup \{ |r_\varepsilon^{(\alpha)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{|\alpha|+p} \} \end{cases}$$

とおく。このとき $\chi(\varepsilon \xi)$ が $0 \leq \varepsilon \leq 1$ に関して一様に $S_{1,0}^\circ$

に属することから

$$(2.5) \quad |r_\varepsilon|_p \leq C_0 |r|_p,$$

(但し, C_0 は ε に無関係) を得る。更に, Lebesgue の定理より

$$(2.6) \quad \begin{aligned} r(X, D_x)u(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{ix \cdot \xi} r_\varepsilon(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{ix \cdot \xi} r_\varepsilon(x, \xi) \left\{ \int e^{-iy \cdot \xi} u(y) dy \right\} d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left\{ \int e^{i(x-y) \cdot \xi} r_\varepsilon(x, \xi) d\xi \right\} u(y) dy, \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで, $K_\varepsilon(x, z) = \int e^{iz \cdot \xi} r_\varepsilon(x, \xi) d\xi$ とおき $(1+|z|)|z|^n K_\varepsilon(x, z)$ を考へよう。

まず $|\alpha| = n$ のとき, 部分積分と $\int r_\varepsilon^{(\alpha)}(x, \xi) d\xi = 0$ となることに注意すると

$$z^\alpha K_\varepsilon(x, z) = i^{|\alpha|} \int \{e^{iz \cdot \xi} - 1\} r_\varepsilon^{(\alpha)}(x, \xi) d\xi$$

を得る。 $0 < p' \leq 1$ に対して $|e^{iz \cdot \xi} - 1| \leq 2|z| \cdot |\xi|^{p'} \leq 2|z| \langle \xi \rangle^{p'}$ が成り立つから

$$(2.7) \quad \begin{aligned} |z^\alpha K_\varepsilon(x, z)| &\leq 2|z|^{p'} \int \langle \xi \rangle^{p'} \{ |r_\varepsilon^{(\alpha)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{n+p} \} \langle \xi \rangle^{-n-p} d\xi \\ &\leq 2C_0 \int \langle \xi \rangle^{n-(p-p')} d\xi |r|_p |z|^{p'} \end{aligned}$$

を得る。従って $0 < p' < p$ のとき

$$(2.8) \quad |z^\alpha K_\varepsilon(x, z)| \leq C_1 |r|_p |z|^{p'},$$

(但し, C_1 は ε には無関係) を得る.

$|d|=m+1$ のときも同様にして

$$(2.9) \quad |z^\alpha K_\varepsilon(x, z)| \leq C_1 |r|_p |z|^{p'}$$

が成り立つことが示せる。故に (2.8), (2.9) より

$$(2.10) \quad (1+|z|)|z|^m |K_\varepsilon(x, z)| \leq C_2 |r|_p |z|^{p'},$$

(但し, C_2 は ε には無関係) を得る.

次に, $\kappa = [\frac{m+1}{2}]$ とおくと $2\kappa = m$ または $m+1$ だから

$$|z|^{2\kappa} K_\varepsilon(x, z) = i^{2\kappa} \int e^{iz \cdot \xi} (\Delta_\xi)^\kappa r_\varepsilon(x, \xi) d\xi.$$

$$\text{ところで } |(\Delta_\xi)^\kappa r_\varepsilon(x, \xi)| \leq C'_3 |r_\varepsilon|_p \langle \xi \rangle^{-2\kappa-p} \leq C_3 |r|_p \langle \xi \rangle^{-m-p}$$

だから, Lebesgue の定理によって,

$$(2.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(x, z) = i^{2\kappa} |z|^{-2\kappa} \int e^{iz \cdot \xi} (\Delta_\xi)^\kappa r(x, \xi) d\xi = K(x, z)$$

が $z \neq 0$ で成り立つ。従って (2.6), (2.10), (2.11) より, 再び

Lebesgue の定理によって

$$\begin{cases} r(x, D_x)u(x) = \int K(x, x-y)u(y)dy & u \in \mathcal{S} \\ |K(x, z)| \leq \underbrace{C_3}_{|r|_p} (1+|z|)^{-1} |z|^{-m+p'} \end{cases}$$

を得る.

証明終

この定理の系として, 次の定理が成り立つ.

定理 5, 定理 4 と同じ条件のもとで $1 \leq p \leq \infty$ に対して,

次の不等式が成り立つ.

$$(2.12) \quad \|r(x, D_x)u\|_{L^p} \leq C |r|_p \|u\|_{L^p} \quad u \in \mathcal{S}.$$

次に、主定理の一つを述べる。

定理 6, $p(x, \xi)$ は $|\alpha| \leq m+1$ に対して

$$(2.13) \quad |p^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}$$

$$(2.14) \quad |p^{(\alpha)}(x, \xi) - p^{(\alpha)}(y, \xi)| \leq C_{\alpha} |x-y|^{\tau} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|+\tau\delta'}$$

をみたすとする。但し $0 < \tau \leq 1$ とし $0 \leq \delta' < 1$ とする。

このとき、ある定数 C に対して

$$(2.15) \quad \|p(X, D_x)u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} \quad (u \in \mathcal{S}),$$

が成り立つ。

証明, $\delta' < \delta < 1$ なる δ をとる。この δ に対して $\tilde{p}(x, \xi)$

を (1.5) で定義し、更に $r(x, \xi) = p(x, \xi) - \tilde{p}(x, \xi)$ とおく。

このとき、定理 3 によって $r(x, \xi)$ は定理 4 の条件をみたす。

従って $1 \leq p \leq \infty$ に対して、

$$(2.16) \quad \|r(X, D_x)u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S}),$$

をみたす。また、定理 3 によって、 $\tilde{p}(x, \xi)$ は

$$(2.17) \quad |\tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta|},$$

を任意の β と $|\alpha| \leq m+1$ に対してみたす。従って、今まで

によく知られた L^2 -有界性定理 ([1], [3], [5], [7]) によって

$$(2.18) \quad \|\tilde{p}(X, D_x)u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} \quad (u \in \mathcal{S})$$

が成り立つ。よって (2.16), (2.18) によって不等式 (2.15) が

得られた。

証明終

次に, L^p -有界性について述べる。

定理 7, $p(x, \xi)$ は任意の α に対して (2.13), (2.14) をみたすとする。このとき, $1 < p < \infty$ に対して, 次の不等式をみたす定数 C_p が存在する。

$$(2.19) \quad \|p(X, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S}).$$

証明, 定理 6 の証明と同じように $\tilde{p}(x, \xi), r(x, \xi)$ を定義する。このとき, $p(X, D_x) = \tilde{p}(X, D_x) + r(X, D_x)$ かつ, $r(X, D_x)$ は不等式 (2.16) をみたす。また $\tilde{p}(x, \xi) \in S_{1, \delta}^0$ であり, よく知られた L^p -有界性定理 ([8], [9]) により

$$(2.20) \quad \|\tilde{p}(X, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S}),$$

が $1 < p < \infty$ に対して成り立つ。従って, 定理 7 が示された。

証明終

この定理 7 では, (2.19) が成り立つための条件として (2.13) (2.14) がすべての α に対して成り立つことを要求している。しかしながら $p(X, D_x)$ が L^p -有界であるためには, $|\alpha| \leq m+2$ に対して (2.13), (2.14) が成り立てばよい。このことを示すために $\tilde{p}(x, \xi)$ を ξ 方向に近似した表象を用いる。

$p(x, \xi)$ は $|\alpha| \leq m+2$ に対して (2.13), (2.14) をみたすとする。このとき $\delta' < \delta < p < 1$ となるように δ, p をとり, $\tilde{p}(x, \xi)$ を (1.5) で定義し $r(x, \xi) = p(x, \xi) - \tilde{p}(x, \xi)$ とおく。更に, $\tilde{\tilde{p}}(x, \xi)$ を

$$(2.21) \quad \tilde{p}(x, \xi) = \int \varphi(\zeta) \tilde{p}(x, \xi - \langle \xi \rangle^p \zeta) d\zeta$$

とおく。 $\tilde{r}(x, \xi) = \tilde{p}(x, \xi) - \tilde{p}(x, \xi)$ とおく。但し $\varphi(\zeta)$ は $\int \varphi(\zeta) d\zeta = 1$, $\text{supp } \varphi \subset \{|\zeta| \leq 1\}$ をみたす C_0^∞ 関数とする。このとき, $p(x, \xi) = \tilde{p}(x, \xi) + \tilde{r}(x, \xi) + r(x, \xi)$ でありかつ, $r(x, D_x)$ は (2.16) をみたすから $\tilde{p}(x, \xi)$, $\tilde{r}(x, \xi)$ に対する L^p -有界性を示せばよい。

補題 8, (i), $\tilde{r}(x, \xi)$ は $|\alpha| \leq m+1$ に対して, 次をみたす。

$$(2.22) \quad |\tilde{r}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-(1-p)-|\alpha|}$$

(ii) $\tilde{p}(x, \xi)$ は $|\alpha| \leq m+2$ に対して $\tilde{p}^{(\alpha)}(x, \xi) \in S_{p, \delta}^{-|\alpha|}$ である。

すなわち, $\tilde{p}(x, \xi)$ は次の不等式をみたす。

$$(2.23) \quad \begin{cases} |\tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha| + \delta|\beta|} & (|\alpha| \leq m+2) \\ |\tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-(m+2)(1-p) - p|\alpha| + \delta|\beta|} & (|\alpha| \geq m+2). \end{cases}$$

証明, まず, $|r| \leq C_0$ であるとき $C_1 \langle \xi \rangle \leq \langle \xi - \langle \xi \rangle^p \eta \rangle \leq C_2 \langle \xi \rangle$ が成り立つことに注意する。このとき $\tilde{r}(x, \xi)$

$$= \sum_{j=1}^m \int_0^1 \left\{ \int \varphi(\zeta) \zeta_j p^{(e_j)}(x, \xi - \langle \xi \rangle^p \zeta) \langle \xi \rangle^p d\zeta \right\} dt \quad \text{かつ,}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \{ p^{(e_j)}(x, \xi - \langle \xi \rangle^p \zeta) \langle \xi \rangle^p \}| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha| - (1-p)} \quad (|\alpha| \leq m+1)$$

であることから (2.22) がわかる。また (2.23) も $|\alpha| \leq m+2$

$$\text{のときは } \tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \int \varphi(\zeta) \partial_\xi^\alpha \{ \tilde{p}_{(\beta)}(x, \xi - \langle \xi \rangle^p \zeta) \} d\zeta, \quad |\alpha| \leq m+2$$

$$\text{のときは } \tilde{p}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \int \partial_\xi^{\alpha'} \{ \varphi(\langle \xi \rangle^p \tilde{\zeta}) \langle \xi \rangle^{-pm} \} \tilde{p}_{\alpha'', \beta}(x, \tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta}, \quad (\text{但し}$$

$$\tilde{p}_{\alpha'', \beta}(x, \tilde{\zeta}) = \partial_\xi^{\alpha''} \{ \tilde{p}_{(\beta)}(x, \xi - \langle \xi \rangle^p \zeta) \} \Big|_{\xi - \langle \xi \rangle^p \zeta = \tilde{\zeta}}, \quad \alpha' + \alpha'' = \alpha, \quad |\alpha''| = m+2$$

である。) が成り立つことよりわかる。証明終

この補題 8 の (i) によって, $\tilde{r}(x, \xi)$ は定理 5 の $r(x, \xi)$ と同じ条件をみたすから, $\tilde{r}(X, D_x)$ は $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$(2.24) \quad \|\tilde{r}(X, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S})$$

をみたす。

作用素 $\tilde{p}(X, D_x)$ が $1 < p < \infty$ のとき L^p -有界であることは, [8] とほとんど同様に, 以下のようにして示される。

まず $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ を $\chi(\xi) = 1$ ($|\xi| \leq 2$) となるようにとり $\tilde{p}(x, \xi) = \tilde{p}(x, \xi)\chi(\xi) + \tilde{p}(x, \xi)(1 - \chi(\xi)) = \tilde{p}_0(x, \xi) + \tilde{p}_1(x, \xi)$ とおく。明らかに $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$(2.25) \quad \|\tilde{p}_0(X, D_x)u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S})$$

が成り立つ。そこで, 作用素 $\tilde{p}_1(X, D_x)$ に対して L^p -有界性を示せばよい。

$\psi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ を $\text{supp } \psi \subset \{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ かつ $\xi \neq 0$ に対して $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}\xi) = 1$ となるようにとる。このとき, $\text{supp}_\xi \tilde{p}_1(x, \xi) \subset \{|\xi| \geq 2\}$ に注意すると,

$$\tilde{p}_1(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{p}_1(x, \xi) \psi(2^{-j}\xi),$$

である。そこで $q_N(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \tilde{p}_1(x, \xi) \psi(2^{-j}\xi)$ とおくと $\tilde{p}(x, \xi)$ が (2.23) をみたすことから $q_N(X, D_x)$ は, 次のいわゆる weak type (1, 1) 評価式をみたす。

$$(2.26) \quad m(\{x; |q_N(X, D_x)u(x)| > s\}) \leq \frac{C}{s} \|u\|_{L^1} \quad u \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

但し, $m(A)$ は集合 A の Lebesgue measure であり, 定数 C

は N に無関係にとれる。

不等式 (2.26) は, $\tilde{p}(x, \xi)$ が $S_{1, \delta}^0$ に属するとき [8] で示されているが, 補題 8 (ii) より $|\alpha| \leq [\frac{m}{2}] + 1$ のとき $\tilde{p}_1^{(\alpha)}(x, D_x) |D_x|^{|\alpha|}$ が L^2 -有界であることに注意すれば, [8] と全く同様に示される。更に $q_N(x, D_x)$ は L^2 -有界であるから不等式 (2.26) と Marcinkiewicz の補間定理によって, $1 < p \leq 2$ のとき

$$(2.27) \quad \|q_N(x, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S}),$$

が成り立つ。但し C_p は N に無関係にとれる。また,

$$u \in \mathcal{S} \text{ のとき } \lim_{N \rightarrow \infty} \|\{\tilde{p}_1(x, D_x) - q_N(x, D_x)\}u\|_{L^p} = 0$$

が成り立つから, $1 < p \leq 2$ に対して

$$(2.28) \quad \|\tilde{p}_1(x, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S})$$

が成り立つ。従って $1 < p \leq 2$ のときの $\tilde{p}(x, D_x)$ の L^p -有界性が示された。次に $2 \leq p < \infty$ のときは $1 < p' \leq 2$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ となるようにとる。このとき $\tilde{p}(x, D_x)$ の形式的共役作用素 $\tilde{p}^*(x, D_x)$ を考えよと $S_{p, \delta}^m$ の表象で考えて

$$\tilde{p}^*(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \overline{p_{\omega}^{(\alpha)}(x, \xi)},$$

なる漸近展開式が成り立つから $\tilde{p}^*(x, \xi)$ は $\tilde{p}(x, \xi)$ と同じ性質 (2.23) をみたす。従って,

$$(2.29) \quad \|\tilde{p}^*(x, D_x)v\|_{L^{p'}} \leq C_{p'} \|v\|_{L^{p'}} \quad (v \in \mathcal{S})$$

となることから,

$$(2.30) \quad \|\tilde{p}(x, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p} \quad (u \in \mathcal{S})$$

を得る。以上によつて次の定理が示された。

定理 8, $p(x, \xi)$ は $|\alpha| \leq m+2$ に対して (2.13), (2.14) を満たすとする。このとき $1 < p < \infty$ に対して, 不等式 (2.19) が成り立つ。

注意 1, (2.13), (2.14) をみたす $p(x, \xi)$ に対し

$$\|P\|_{\tau, m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left\{ \sup_{(x, \xi)} |p^{(\alpha)}(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}| + \sup_{(x, \xi)} \left| \frac{p^{(\alpha)}(x, \xi) - p^{(\alpha)}(y, \xi)}{|x-y|^{\tau}} \right| \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-\tau\delta'} \right\}$$

とおくと (2.15) の定数 C は $C = C_0 \|P\|_{\tau, m+1}$, (2.19) の定数 C_p は $C_p = C_p \|P\|_{\tau, m+2}$, (但し C_0 及び C_p は表象 $p(x, \xi)$ には無関係) となることは証明より明らか。

注意 2, $S_{p, \delta}^m$ に属する表象を持つ作用素 $\tilde{p}(X, D_x)$ の L^2 -評価式として

$$\|\tilde{p}(X, D_x)u\|_0 \leq |\tilde{p}|_0 \|u\|_m + C \|u\|_{m-\frac{1}{2}(p-\delta)} \quad u \in \mathcal{S}$$

がよく知られている。但し $|\tilde{p}|_0 = \sup |p(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-m}|$ である。このことと定理 4 及び 5 を詳しくみれば, $p(x, \xi)$ が定理 4 の条件をみたせば

$$(2.31) \quad \|p(X, D_x)u\|_0 \leq |p|_0 \|u\|_0 + C_1 \|u\|_{-\frac{1}{2}(1-\delta)} + C_{p'} \|u\|_{-p'}, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成り立つ。但し $0 < \delta' < \delta < 1$, $0 < p' < \tau(\delta - \delta')$ である。

注意 3, 表象 $p(x, \xi, y)$ が

$$(2.13)' \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi, y)| \leq C_{\alpha} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}$$

$$(2.14)' \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi, y) - p(x', \xi, y)| \leq C_{\alpha} \{|x-x'|^{\tau} + |y-y'|^{\tau}\} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-\tau\delta'}$$

をみたすときも, 作用素 $p(X, D_x, Y)$ が定義できて L^2 又は L^p

有界であることが示せる ([10] 参照)。

REFERENCES

- [1] A.P.Calderon and R.Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. USA., 69 (1972), 1185 – 1187.
- [2] Chin-Hung Ching, Pseudo-differential operators with non-regular symbols, J. Differential Equations, 11 (1972), 436 – 447.
- [3] H.O.Cordes, On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators, J. Functional Analysis, 18 (1975), 115 – 131.
- [4] L.Hormander, On the L^2 -continuity of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 529 – 535.
- [5] T.Kato, Boundedness of some pseudo-differential operators, Osaka J. Math., 13 (1976), 1 – 9.
- [6] H.Kumano-go, A Problem of Nirenberg on pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 115 – 121.
- [7] H.Kumano-go, Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 31 – 50.
- [8] H.Kumano-go, Pseudo-differential operators on Sobolev space $H^{s,p}$, $-\infty < s < \infty, 1 < p < \infty$, 数解研講究録, 88 (1970), 21 – 44.
- [9] H.Kumano-go and M.Nagase, L^p -theory of pseudo-differential operators, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 138 – 142.
- [10] H.Kumano-go and M.Nagase, Approximation theorems in the theory of pseudo-differential operators and sharp Gårding's inequality, to appear.
- [11] T.Muramatu, Functional analysis and differential equations, Edited by S. Ito and K. Yosida, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976 (in Japanese).
- [12] The L^p -boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, Comm. in partial differential equations, 2 (10) (1977), 1045 –

1061.

- [13] M.Nagase, A new proof of sharp Gårding inequality, to appear.