

有限代数群の Shintani descent

東京理科大 庄司俊明

(Toshiaki Shoji)

0. 序. G は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された (affine) 連結代数群, $F: G \rightarrow G$ は対応する Frobenius map とする. 任意の正整数 m に対し, G^{F^m} の表現と G^F の表現は "Shintani descent" を通って互いに関連している. 特に G が reductive で center が連結な場合には, 拡大 $\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q$ は十分大きく (i.e., m : sufficiently divisible) 取ることにより G^F の F -stable な既約指標は, Shintani descent により, Lusztig の意味での G^F の almost character に移される事が分る. G^F の almost character は G の幾何学的性質を反映していると考えられるが, この様子を object として Shintani descent の枠組の中で, ある意味で自然に与えられるわけである. 一方で, Shintani descent は一般の (reductive とは限らない) 連結代数群に対しても意味を持つので, Shintani descent を通って, Lusztig の理論より一般の代数群の表現論の

枠組の中で，とらえ直すという事を考えられる。本稿では，その第一歩（半歩？）として，一般の代数群に対して，almost character の類似物を構成できる事を示す。その性質は，まだ良く分らないが，少なくとも，twisting operator の作用に関しては，類似の性質が成り立つ事が分る。

1. Shintani descent. G は $\mathbb{A}_k$ 上定義された (affine) 連結代数群とする。 G の Shintani descent は次の様に定義される。 $F^m: G \rightarrow G$ は $\mathbb{A}_k^m$ に対応する Frobenius map とし， $G^{F^m}/_F \in G^{F^m}$ の F -twisted class ($x \sim_F y : F$ -twisted conj $\iff \exists z$ st. $y = z^{-1} x F(z)$) の集合， $G^F/_\sim \in G^F$ の共役類の集合とする。 Norm map $N_{F^m/F} \in$

$$N_{F^m/F} : G^F/_\sim \longrightarrow G^{F^m}/_F, \quad x = F(a)a^{-1} \longmapsto \hat{x} = a^{-1}F(a)$$

(但し， $x \in G^F$, $\hat{x} \in G^{F^m}$, $a \in G$)

により定義する。 $N_{F^m/F}$ は $G^F/_\sim$ から $G^{F^m}/_F$ への bijection になる。ここで， $C(G^{F^m}/_F)$ (resp. $C(G^F/_\sim)$) $\in G^{F^m}/_F$ (resp. $G^F/_\sim$) 上の $\mathbb{Q}_\ell$ -valued function の $\mathbb{Q}_\ell$ vector space とし，

induced map

$$N_{F^m/F}^* : C(G^{F^m}/_F) \longrightarrow C(G^F/_\sim)$$

を考える。 $N_{F^m/F}^*$ は G^{F^m} から G^F への Shintani descent と見做す。

$\hat{G}^F$: G^F の既約指標の集合.

$(\hat{G}^{F^m})^F$: G^{F^m} の F -stable 既約指標の集合.

とする. よく知られている様に $\hat{G}^F$ は $C(G^F/\sim)$ の基底を構成するが, 次の様に $(\hat{G}^{F^m})^F$ から $C(G^F/\sim_F)$ の基底が構成できる.

$\sigma = F|_{G^{F^m}}$ (G^{F^m} の制限) とし,

$\tilde{G}^{F^m} = \langle G^{F^m}, \sigma \rangle \in \sigma$ で生成される巡回群とし, G^F の半直積とする.

$\rho \in (\hat{G}^{F^m})^F$ に対し, $\tilde{G}^{F^m}$ の extension $\tilde{\rho}$ を一つ選ぶ.

bijection $G^{F^m}/\sim \longleftrightarrow G^F/\sim_F, (x\sigma \leftrightarrow x)$ により, $\tilde{\rho}$ の G^{F^m} への制限 $\tilde{\rho}|_{G^{F^m}}$ は $C(G^{F^m}/\sim) = C(G^F/\sim_F)$ の元とみることが出来る.

この時, $\tilde{\rho}|_{G^{F^m}}$ は, スカラー倍を除いて, $\tilde{\rho}$ の選い方によらずに決まり, $\{\tilde{\rho}|_{G^{F^m}} : \rho \in (\hat{G}^{F^m})^F\}$ が $C(G^F/\sim_F)$ の基底となる.

とする.

$m=1$ の場合は, 特に重要で, $t_1 = N_{F/F}^{-1}$ とある.

$t_1^* : C(G^F/\sim) \rightarrow C(G^F/\sim)$ は G^F の twisting operator とする.

2. Reductive 群の場合. G が reductive の場合, Shintani descent は, Lusztig の理論と密接に関連している. この節では, G を center を連結な connected reductive 群とする.

Lusztig [3] により, 或る parameter set $X(G, F)$ が存在し, 各 $x \in X(G, F)$ に対し G^F の almost character $R_x \in C(G^F/\sim)$ が定まり, $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底になることが知られて

4.3. 従って $X(G, F)$ は $\hat{G}^F$ と個数は一致するが, 直接 $\hat{G}^F$ の parameter set には σ, τ が入る。しかし, G が $\mathbb{F}_q$ 上 split の場合には, $\{\rho \in \hat{G}^F \mid \rho: \text{unipotent}\} \xrightarrow{\text{injection}} X(G, F)$ があり, $R_\rho = R_\rho$ は $\rho = \rho_x$ の "Fourier 変換" として得られる。特に $\rho = \rho_x$ かつ $(\chi \in W^\wedge)$, $\text{Ind}_{B^F}^{G^F}(1)$ の段約成分の場合には,

$$R_\rho = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \chi(w) R_{T_w}^G(1)$$

と σ, τ が入る。但し, B は G の F -stable Borel subgroup, W は G の Weyl 群, $R_{T_w}^G(1)$ は $w \in W$ に対応する G^F の Deligne-Lusztig virtual character である。

一方, [3] により, 各 $x \in X(G, F)$ に対し, 1 の中根 λ_x が対応付けられる。特に G が split で $\rho = \rho_x$ が unipotent character の場合には, λ_x は以下の様にとられる。各 $w \in W$ に対し, $X_w = \{gB \in G/B \mid g^{-1}F(g) \in BwB\} \subseteq G/B$ の locally closed subvariety として $H^i(\bar{X}_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in$ $\mathbb{Z}$ の Intersection cohomology とする。 $H^i(\bar{X}_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は G^F -module として, 各 $\rho \in \hat{G}^F$, unipotent に対し, ρ -isotypic subspace $H^i(\bar{X}_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\rho$ に自然に F が作用する。この時, F の固有値は $\lambda_\rho \cdot q^{i/2}$ とあり, 1 の中根 λ_ρ は i, w の取り方によらず, ρ のみで定まる。この λ_ρ が λ_x に他

らる。一般の場合は、 $\hat{G}^F$ の Jordan 分解を通じて、unipotent character の場合に帰着する。

注意. Almost character の重要性は、次の Lusztig の予想にある。

予想 (Lusztig) $\hat{G} \in G$ の character sheaf, $A \in \hat{G}$, $F^*A \cong A$ に対し、 χ_A を A の特性関数として得られる G^F の class function とす。この時、

$$\{ R_x \mid x \in X(G, F) \} = \{ \chi_A \mid A \in \hat{G}, F^*A \cong A \} \\ (\text{up to const.})$$

Character sheaf は、体の拡大によらぬので、この予想を通じて、 G^F の almost character は、 G の幾何学的性質を反映していることがわかる。ところで、Lusztig による almost character の定義は、かなり人工的な感じが受けるが、次の結果が示す様に Shintani descent の観点からは、almost character は極めて自然に得られる。

定理 1. ([4], [5]). G を center が連結な connected reductive 群とする。この時、sufficiently divisible な m (即ち、 m はある $m_0 > 0$ の倍数) に対し、自然な parametrization

ization $(\hat{G}^{\text{an}})^F \leftrightarrow X(G, F)$ が存在し, 次の性質を持つ。
 $\rho_x \in (\hat{G}^{\text{an}})^F$ と $x \in X(G, F)$ に対応する既約指標とし, $\tilde{\rho}_x \in \hat{G}^{\text{an}}$ の extension とする。この時,

$$N_{F/F}^* (\mu_{\tilde{\rho}_x} \tilde{\rho}_x |_{G_F^{\text{an}}}) = R_x^\vee,$$

但し, $\mu_{\tilde{\rho}_x}$ は, extension $\tilde{\rho}_x$ の取り方に依存する 1 の中根,
 $R_x^\vee$ は, x に対応する "modified" almost character ($= R_{\tau(x)}$,
 $\tau = X(G, F)$ のある permutation) である。更に $\mu_{\tilde{\rho}_x}$ は,

$$(*) \quad (\mu_{\tilde{\rho}_x})^m = \lambda_x^{-1}$$

を満たす。

一方, twisting operator の作用に因りては, 浅井により,
 次の事実が分っている。

定理 2 (浅井 [1], [2]). G を center が連結な
 connected reductive 群 (p : 任意) とし, SL_n ($p \geq n$) とす
 る。この時,

$$c_1^* R_x^\vee = \lambda_x R_x^\vee \quad (x \in X(G, F)).$$

但し, G が古典群の場合は λ_x 任意, G が例外群の
 場合は $\rho = \rho_x$ は unipotent character とする。

注意. 定理 1 は例外群の場合, 少し ambiguity が残っている。又、D 型の古典群で derived subgroup が Spin 群に等しい場合, (1) は確かめられず, μ_{p_x} は単に絶対値 1 というすしめ分らない。定理 2 は, G^F が split, $\rho = \rho_x$ が unipotent character の場合には, この形式だが, 一般の場合には, ψ^* の定義を少し変更が必要がある。即ち, $F_0, F \in G$ の split, non-split Frobenius とし, $\psi^* : G^F / \sim_{F_0} \rightarrow G^F / \sim_F$ を考える。勿論 ψ^* は, 上記で定義できるが, Lusztig の理論を適用する為には $(\psi^*)^*$ の方が都合が良い。実際, 浅井は, $(\psi^*)^*$ (unip. character ではない場合は, Jordan 分解に従って考える) を決定した。

3. 一般の代数群の場合. この節では, 始めの設定に戻す。 G を connected affine 代数群とする。 $m, k \in \mathbb{Z}$ の整数とし, F -twisted classes $G^{F^m} / \sim_F, G^{F^{mk}} / \sim_F$ を考える。これらの間の bijection $M_{F^m/F^{mk}}$ を

$$M_{F^m/F^{mk}} = N_{F^{mk}/F}^{-1} \cdot N_{F^m/F} : G^{F^m} / \sim_F \rightarrow G^{F^{mk}} / \sim_F$$

により定義する。

以下, G に対し, 次の仮定を設ける。

仮定. G の F -stable maximal unipotent subgroup U に対し,
exponential map $\exp: \mathcal{L}eU \rightarrow U$ が存在し, Campbell-Hausdorff
formula を満たす (特に p は十分大きい).

この時, 次の定理が成立する.

定理 3. G を上の様な群とする. この時 sufficiently
divisible な m に対し. ($k \gg 1$ は任意)

$$M_{F^m/F^{mk}}^* : C(G^{F^{mk}}/\sim_F) \longrightarrow C(G^{F^m}/\sim_F)$$

は character correspondence を与える. 即ち, 任意の $\rho \in (\hat{G}^{F^{mk}})^F$
に対し, $\tilde{\rho} \in \tilde{G}^{F^{mk}} (= G^{F^{mk}} \langle \sigma' \rangle, \sigma' = F|_{G^{F^{mk}}})$ の extension
とすると,

$$M_{F^m/F^{mk}}^* (\tilde{\rho}|_{G^{F^{mk}}_{\sigma'}}) = \mu \cdot \tilde{\rho}_0|_{G^{F^m}_{\sigma}}$$

と表わされる. ここに $\rho_0 \in (\hat{G}^{F^m})^F$ かつ $\tilde{\rho}_0$ は $\tilde{G}^{F^m} = G^{F^m}_{\sigma}$
($\sigma = F|_{G^{F^m}}$) の extension, μ は $\tilde{\rho}, \tilde{\rho}_0$ の extension の取り
方に依存する 1 の $|\tilde{G}^{F^{mk}}|$ -乗根である. $\rho \rightarrow \rho_0$ は
bijection $(\hat{G}^{F^{mk}})^F \xrightarrow{\sim} (\hat{G}^{F^m})^F$ を与える.

定理 3 により, sufficiently divisible な各 m に対し, $(\hat{G}^{F^m})^F$

の間に自然な対応の成り立つ。即ち、ある parameter set $X(G, F)$ が存在し、 $(\hat{G}^{F^m})^F \longleftrightarrow X(G, F)$ とできる。

$x \in X(G, F)$ に対応する G^{F^m} の既約指標を $\rho_x^{(m)}$ と表わすことにしよう。すると各 $x \in X(G, F)$ に対し、ある $R_x \in C(G^F/\sim)$ がスカラー倍を除いて定まり、sufficiently divisible な m に対し

$$N_{F^m/F}^* (\mu_{\hat{\rho}_x^{(m)}} \cdot \hat{\rho}_x^{(m)} |_{G^{F^m}}) = R_x$$

と表わされる。但し、 $\hat{\rho}_x^{(m)}$ は $\rho_x^{(m)}$ の $\hat{G}^{F^m}$ への extension, $\mu_{\hat{\rho}_x^{(m)}}$ は extension に依存する 1 の $|\hat{G}^{F^m}|$ -乗根である。次に、定理 1 の類似として $R_x \in G^F$ の almost character と呼ぶことにする。 $\{R_x \mid x \in X(G, F)\}$ は $C(G^F/\sim)$ の自然な内積に関して正規直交基底となる。

定理 2 に対応して次の事実が成り立つ。

定理 4. G は定理 3 と同様とする。各 $x \in X(G, F)$ に対し、1 の m 乗根 λ_x が存在して、

$$\epsilon_1^* R_x = \lambda_x R_x$$

と表わされる。

注意. 定理 3 の証明は、Brauer の一般指標の判定

条件 (の σ -version) を使う。但し、その際 algebraic subgr. として 連結群 だけを考えていたのは、うまくいかず、不連結群も必要となる。その場合、勿論 $N_{F^m/F}^\vee$ は定義できるが、 $M_{F^m/F}^\vee$ は、不連結の場合にも、いかに定義でき、連結群との間の制限に因り compatible になる。これにより、最終的には、 $\cup$ と $N_G(T)$, $T = \text{maximal torus}$ の場合に帰着させる。

定理 4 の証明には、次の Lemma が基本的である。

Lemma. G は connected affine 代数群とする (定理 3 の仮定は不要)。この $\vee$ sufficiently divisible な m に対し、次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 G_{F^m/\sim_F}^\vee & \xrightarrow{\tau_1} & G_{F^m/\sim_F}^\vee \\
 \uparrow N_{F^m/F}^\vee & & \uparrow N_{F^m/F}^\vee \\
 G_{F/\sim}^\vee & \xleftarrow{t_1} & G_{F/\sim}^\vee
 \end{array}$$

ここに、 $\tau_1: G_{F^m/\sim_F}^\vee \rightarrow G_{F^m/\sim_F}^\vee$ は、 $G_{F^m/\sim_F}^\vee \approx G_{F^m/\sim_F}^\vee$ の σ と $x\sigma \mapsto (x\sigma)^{1-\sigma}$ によって与えられる写像である。

$\tau_1 \in \text{twisting operator } t_1$ の $G_{F^m/\sim_F}^\vee$ の lift をいう。

定理 3 により、定理 4 は、特殊な m に対して示せば

よく、又、上記 Lemma によつて、 λ の時 $\tau_1^*: C(G^F/\sim_F) \rightarrow C(G^F/\sim_F)$ が各 $\rho_x^{(m)} \in (\hat{G}^F)^F$ に対し、 $\tilde{\rho}_x|_{G^F} \in (\text{up to scalar } \mathbb{C})$ stabilize する事をみればよい。これは実際、 $m \in (m-1, |\hat{G}^F|) = 1$ と取ることにより τ_1 の定義を使って、確かめられる。

4. Applications. 一般の群に対して R_x, λ_x については何も分っていないが、Reductive 群の場合、定理 4 はかなり役に立つ。実際、

(a) $G = \mathrm{SL}_n$ の場合、 $p > n$ からは、定理 4 は成立する。この場合、定理 1 に対応する事は、まだ証明できないが、浅井の結果 (定理 2) とあわせると、Shutani descent によりかなりの情報が得られる。(但し、完全に決定するには、まだ不十分である)。

(b) 例外群の例外指標の問題。E₂ 型 Weyl 群の degree 512 の 2 個の既約指標、E₆ 型 Weyl 群の degree 4096 の 4 個の既約指標を例外指標という。G^F の unipotent principal series character ρ_x ($x \in \hat{W}$, 例外型) に関しては、他の場合と異なり、完全に決めるのが難しく、定理 1, 定理²でも ambiguity

が残っている。例えば $G \in E_7$ 型とし, $\chi_1, \chi_2 \in W$ の例外指標. とすると, 定理 1, 定理 2 で証明できる事は, $R_{\chi_i} = R_{p_{\chi_i}}$ である。

$$N_{F/F}^* : \{ \tilde{p}_{\chi_1}^{(1)}, \tilde{p}_{\chi_2}^{(1)} \} \longrightarrow \{ R_{\chi_1}, R_{\chi_2} \}$$

$$t_1^* : \{ R_{\chi_1}, R_{\chi_2} \} \longrightarrow \{ R_{\chi_1}, R_{\chi_2} \} \quad (\text{この場合 } \lambda_{p_{\chi_i}} = 1)$$

である。 R_{χ_i} は permute する可能性が残っていた。(しかし, 定理 4 を apply する事によつて, この場合には $N_{F/F}^*, t_1^*$ が決定する事ができる (この場合, p は任意である)。

(C) non-split G^F に対する twisting operator. 2 節の注意で述べた様に, G^F が non-split の場合 $t_1^* : C(G^F/\sim) \rightarrow C(G^F/\sim)$ は, Lusztig の理論とうまく合わない (Frobenius action が cohomology 上に定義されない) ので, 決定する事が難しい。しかし, 定理 4 は, $p \gg 0$ の時, t_1^* も良い性質を持っている事を示しており, 実際, ある程度まで決める事ができる。例えば $G = \text{PSO}_{2n}$, $F = \text{non-split}$ の場合, 各 $x \in X(G, F)$ に対し $\lambda_x = \pm 1$, 即ち $t_1^* R_x = \pm R_x$ とする事が分る。

5. Examples. 最後に. non-trivial almost character (一般の場合) の例をいくつか示そう。まず $G = SL_2$, q : odd とする。 $\xi, \xi' \in G^F$ の degree $\frac{1}{2}(q+1)$ の既約指標, $\eta, \eta' \in \text{degree } \frac{1}{2}(q-1)$ の既約指標。又 $\xi^{(m)}, \xi'^{(m)}, \eta^{(m)}, \eta'^{(m)} \in (\hat{G}^{F^m})^F$ の同様の elements (degree $\frac{1}{2}(q^m+1), \dots$) とする。この時 sufficiently divisible m に対し $N_{F^m/F}^*$ により。

$$\begin{aligned}\xi^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2}(\xi + \xi' + \eta + \eta') \\ \xi'^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2}(\xi + \xi' - \eta - \eta') \\ \eta^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2}(\xi - \xi' + \eta - \eta') \\ \eta'^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2}(\xi - \xi' - \eta + \eta')\end{aligned} \quad (\text{up to const.})$$

とされる。

次に $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \overline{\mathbb{F}_q}^\times, b \in \overline{\mathbb{F}_q} \right\} = G$ の Borel subgroup とする。この時。

$$\xi^{(m)}|_{B^{F^m}} = \psi_0^{(m)} + \xi_1^{(m)}$$

$$\xi'^{(m)}|_{B^{F^m}} = \psi_0^{(m)} + \xi'_1{}^{(m)}$$

すなわち $\psi_0^{(m)}$ は linear character, $\xi_1^{(m)}, \xi'_1{}^{(m)} \in (\hat{B}^{F^m})^F$, 又 $\eta^{(m)}|_{B^{F^m}} = \eta_1^{(m)}$, $\eta'^{(m)}|_{B^{F^m}} = \eta'_1{}^{(m)}$ とする。 $\eta_1^{(m)}, \eta'_1{}^{(m)} \in (\hat{B}^{F^m})^F$ とする。

$\xi_1^{(m)}, \xi'_1{}^{(m)}, \eta_1^{(m)}, \eta'_1{}^{(m)}$ は degree $\frac{1}{2}(q^m-1)$ の B^{F^m} の既約指標である。同様に B^F の degree $\frac{1}{2}(q-1)$ の既約指標 $\xi_1, \xi'_1, \eta_1, \eta'_1$, linear character ψ_0 を定義できる。この時 $N_{F^m/F}^*$ に

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \quad \xi_1^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi'_1 + \eta_1 + \eta'_1) \\
 \xi'_1{}^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi'_1 - \eta_1 - \eta'_1) \\
 \eta_1^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi'_1 + \eta_1 - \eta'_1) \\
 \eta'_1{}^{(m)} &\longmapsto \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi'_1 - \eta_1 + \eta'_1)
 \end{aligned}$$

c. $GF = \text{同型 pattern の分解}$ である。右辺は B^F の almost char. の集合である。

References.

1. T. Asai; The unipotent class functions of exceptional groups over finite fields, Comm. in Alg, 12 (1984), 2729-2857.
2. T. Asai; On the twisting operators on the finite classical groups, in Algebraic and Topological theories, Kinokuniya, Tokyo, 1985, 231-282.
3. G. Lusztig; Characters of reductive groups over a finite field, Ann. of Math. Studies 107, Princeton Univ. Press 1984.
4. T. Shoji; Some generalization of Asai's result for classical groups, Advanced Studies in pure Math. 6, 1985, Algebraic groups and related topics, 207-229,

Kinokuniya and North Holland.

5. T. Shoji; Shintani descent for exceptional groups over a finite field, to appear.