

Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value

山根英司 (Hideshi Yamane)¹

§1. イントロダクション

次のタイプの非線型特異 1 階偏微分方程式について調べる：

$$(tD_t - \rho(x))u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \dots, D_n u). \quad (1)$$

ここで $(t, x) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$. また, $\rho(x)$ と $a(x)$ は, $\mathbf{C}_x^n$ の原点を中心とする多重円盤 D で定義された正則関数. また, G_2 は

$$G_2(x)(t, z, X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} a_{pq\alpha}(x) t^p z^q X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n,$$

の形の中級数展開を持つとする. ここで $a_{pq\alpha}(x)$ は D で正則であり,

$$\sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} \sup_{x \in D} |a_{pq\alpha}(x)| t^p z^q X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n} \text{ は } (t, z, X_0, \dots, X_n) \text{ の収束中級数とする.}$$

さて局所正則解 $u(t, x)$ であって, 条件 $u(0, x) \equiv 0$ を満たすものを探そう. (1) の左辺はこの条件のおかげで well-defined になる.

次の定理は [1] で証明されている.

定理 1 (Gérard-田原) $\hat{x} \neq 0$ を D の一つの点とする. もし $\rho(\hat{x}) \notin \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ならば, 方程式 (1) は $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解 $u(t, x)$ を $(0, \hat{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ の近傍でただ一つ持つ.

この定理を踏まえて, $\rho(\hat{x})$ が正整数値を取る場合に何が起きるかを調べよう.

次の仮定を置く：

$$\rho(0) \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \rho(x) \neq \rho(0). \quad (2)$$

この仮定のもとで, 集合 $V = \{\rho(x) = \rho(0)\} \subset \mathbf{C}_x^n$ は余次元 1 の解析的集合である. 方程式 (1) は V の外で $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解をただ一つ持つが, V の点の近傍では generic にはそのような解は存在しない.

さて,

$$d(x) = \text{dist}(x, V \cup \partial D) = \text{dist}(x, V)$$

と置こう. ここで $\text{dist}(x, Z)$ は x から $Z \subset \mathbf{C}_x^n$ までの距離を表わすものとする. 第 2 の等号は x が原点に十分近ければ成り立つ.

解 $u(t, x)$ は次の形の開集合において正則である :

$$|t| < Cd(x)^p, \quad x \text{ は原点に十分近い。}$$

ここで p と C は正定数である。 p は $\rho(x)$ だけで決まり, 他のもの, 例えば G_2 などにはよらない。詳しいことは後で述べる。

$\rho(x) - \rho(0)$ が $x = 0$ においてちょうど g 位のゼロを持つとすると, 次の評価が成り立つ :

$$\left| \frac{1}{\rho(x) - \rho(0)} \right| \leq C' d(x)^{-g}. \quad (3)$$

ここで C' は正定数。証明は付録で与える。

主定理を述べよう。

定理 2 (主定理)

(i) もし $\rho(0) \geq g + 2$ ならば, $u(0, x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t, x)$ は

$$|t| < Cd(x), \quad x \text{ は原点に十分近い,}$$

の形の領域で正則である。

(ii) もし $\rho(0) < g + 2$ ならば, $u(0, x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t, x)$ は

$$|t| < Cd(x)^{\frac{g+2}{\rho(0)}}, \quad x \text{ は原点に十分近い,}$$

の形の領域で正則である。

どちらの場合でも C は $\rho(x)$, $a(x)$ と $G_2(t, z, X_0, X_1, \dots, X_n)$ で定まる正定数である。

証明するには, まず形式解を求めて, その収束を陰関数定理で示す。詳しくは [5], [7] をご覧ください。

参考文献

- [1] Gérard R. and Tahara H., Holomorphic and Singular Solutions of Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26**(1990), 979-1000.
- [2] Gérard R. and Tahara H., *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Vieweg, 1996.
- [3] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.

- [4] 木村俊房, 常微分方程式II, 岩波書店 (岩波講座基礎数学) , 1977 .
- [5] Yamane H., Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33(5)**(1997).
- [6] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, *to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.*
- [7] 山根英司, 特性根が正整数値を取る非線型特異 1 階偏微分方程式, 数理解析研究所講究録「複素領域の偏微分方程式」