

領域分割法における収束の速さの作用素論および数値実験による考察

斉藤 宣一 (NORIKAZU SAITO), 藤田 宏 (HIROSHI FUJITA)

明治大学 理工学部

§1. 序

領域分割法 (domain decomposition method ; DDM) とは, 偏微分方程式に対するある種の反復的なアルゴリズムで, 与えられた空間領域をいくつかの部分領域に分割し各領域上で定義された部分問題を反復的に解くことによって全体領域上でのもとの問題の解を得ようとする方法である. 歴史的には, H. A. Schwarz が非正則な領域上での Dirichlet 問題の解を構成するときに用いた方法 (Schwarz alternating method) にまでさかのぼることができるが, 近年では, 主に, 理工学分野における偏微分方程式の境界値問題に対する大規模な数値シミュレーションに際して有効な方法として数学の立場からも多くの研究がなされている.

領域分割法の利点にはふつう次の3つが挙げられる: (1°) 領域を分割することにより, 計算の並列化が自然に行なえ, さらに, 新たに定義された各部分問題 (に対する離散問題の) 自由度がもとの問題の自由度に比べて「十分に」小さくなっている. (2°) 領域を局所的に取り扱えることから, もとの領域にあった形状の複雑さが大幅に軽減される. (3°) 異なる部分領域上で異なる微分方程式取り扱い, さらに異なる数値解法を採用することができる.

現在なされている領域分割法の研究の多くは, 離散的な数値解法の効率改善, 特に反復の各段階における前処理の改良などに集中しているが, 本論文は, それらとは対照的に, 連続変数での問題を対象とし, 領域分割による反復解法の解析的な諸性質を研究する. 特に, 部分領域どうしの幾何学的な形状が反復の収束の速さに及ぼす影響の考察に焦点を置き, 領域と領域の分割に応じた緩和パラメータの最適な選択を提案することを目指している. 実際, 部分領域の形状についての, ある相対的かつ対称的な仮定の下に, 人工境界上での誤差の減衰の速さの陽的な評価を得ることができたので, それを報告する.

我々の解析方法は, 自己共役作用素の理論と Steklov-Poincaré 作用素の分数巾を用いる作用素論的な方法で, これは [4], [5] に基づいている. また, 本論文の結果の一部は, 同じく [4], [5] で報告された結果の拡張でもある.

この論文では, 数学的な理論の明解さを心がける立場から, 空間2次元の最も簡単な楕円型境界値問題のみを考えることにする. すなわち, 我々の target 問題は次の Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題である;

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \beta & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし Ω は $\mathbf{R}^2$ 内の有界な領域で, その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は区分的に滑らかであるとする. $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ は Laplace 作用素であり, また $f \in L^2(\Omega)$, $\beta \in H^{1/2}(\Gamma)$ を仮定する. この仮定の下で (1) は一意な解 $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ を持つ. 実は, $f \in L^2(\Omega)$ の代わりに $f \in H^{-1}(\Omega)$ と仮定しても以下の議論はそのまま通用する. 他方, 全体領域を分割してできる部分領域は一般に角点を持ち得るので, $f \in L^2(\Omega)$ を仮定しても解に $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ なる正則性は期待できない.

領域の分割としても、最も簡単なものを考える。すなわち、全体領域 Ω が人工境界 γ によって2つの連結成分 Ω_1, Ω_2 に分割されていると仮定する;

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \gamma}, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

ただし γ は2点で Γ と横断的につながっているようにとる (Figure 1,2). γ は滑らかであるとする. $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \gamma$, $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \gamma$ とおき, n で考えている領域からの外向き単位法線ベクトルを表すものとする. しかし, そうすると, γ 上の単位法線ベクトルについての向きがはっきりしないので, 特に γ 上では, ν により Ω_1 から Ω_2 に向かう単位法線ベクトルを表すものとする.

この論文は次のように構成されている; §2 で DN 反復法と呼ばれる DDM アルゴリズムの記述をし, §3 では基本となる解析方法を紹介する. §4 では部分領域の形状に対しての, 我々の立場で重要な, ある条件を考察し, そして, それらの仮定の下で導かれる結果を定理として述べる. §5 で DN 反復法を用いた数値実験の結果を検討し, 我々の解析結果の妥当性, 適応限界の検証を試みる. 最後に, DD-NN 反復法と呼ばれる DDM アルゴリズムについても類似した結果が得られるので, それを, §6 で簡単に紹介する.

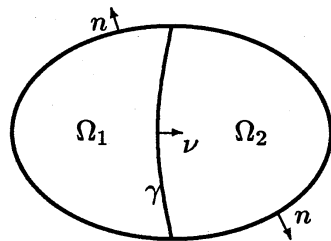


Figure 1.

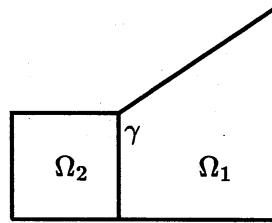


Figure 2.

§2. DN 反復法

はじめに Dirichlet-Neumann (DN) 反復法と呼ばれる次の反復スキームについて考察する.

$\{u_1^{(k)}\}$, $\{u_2^{(k)}\}$, $\{\lambda^{(k)}\}$ を, それぞれ, $\tilde{u}|_{\Omega_1}$, $\tilde{u}|_{\Omega_2}$, $\tilde{u}|_{\gamma}$ に対する第 k 次の近似解とする.

DN 反復法: $\lambda^{(0)}$ を γ 上の初期推定値として近似解の列 $\{u_1^{(k)}\}$, $\{u_2^{(k)}\}$, $\{\lambda^{(k+1)}\}$, $(k = 0, 1, \dots)$ を次で生成する;

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{(k)} = f & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^{(k)} = \beta & \text{on } \Gamma_1, \\ u_1^{(k)} = \lambda^{(k)} & \text{on } \gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_2^{(k)} = f & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^{(k)} = \beta & \text{on } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial n} = -\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \nu} & \text{on } \gamma, \end{cases}$$

$$(3) \quad \lambda^{(k+1)} = (1 - \theta)\lambda^{(k)} + \theta u_2^{(k)} \quad \text{on } \gamma.$$

ここで, $0 < \theta \leq 1$ は緩和パラメータである.

十分小さな θ を採れば, DN 反復スキームで生成された近似解の列と厳密解との誤差は指数的に減衰することは良く知られた事実である (例えば [14]). なお, 誤差の指数的な減衰とは, 定数 $0 \leq \tilde{r} < 1$ と $c_0 > 0$ が存在して

$$(4) \quad \|\xi^{(k)}\| \leq c_0 \tilde{r}^k \|\xi^{(0)}\|$$

が成り立つことである. ここで, $\|\cdot\|$ はある適当なノルムを表し, $\xi^{(k)}$ は k 回目の反復での γ 上の誤差を表す;

$$(5) \quad \xi^{(k)} = \lambda^{(k)} - \tilde{u} \quad \text{on } \gamma.$$

しかしながら我々の興味は、もっと具体的な緩和パラメータ θ の選択であり、そのときの収束の速さの評価 $\tilde{r}^k$ の導出である。さらに、我々の目標は、部分領域同士の幾何形状の特殊な関係をうまくとり入れることによって緩和パラメータの最適な選択をし、そのときの収束の速さを陽的に評価することである。

DN 反復スキームの収束の速さについての、我々の得た結果は、それを述べるのに必要な概念を定義した後に、§4 で詳しく述べる。

§3. 解析の方法

人工境界 γ 上の Dirichlet データを Neumann データに写す線形作用素が我々の議論において重要な役割を果たす。この線形作用素は Steklov-Poincaré 作用素と呼ばれ、領域分割アルゴリズムの解析に対して有用な作用素として良く知られている。

この節では Steklov-Poincaré 作用素の定義と諸性質を作用素論的な観点から復習する。また、この作用素の二次形式による表現ともいえる J -形式を定義した後に、 γ 上の誤差、すなわち $\xi^{(k)}$ の漸化的な表示を導出する。

Steklov-Poincaré 作用素の定義を一般的に述べるために、しばらく DN 反復法の表記から離れて、一般的に、 Ω は $\mathbf{R}^2$ の区分的に滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界な領域とし、その境界の一部を γ とする。 $\Gamma = \partial\Omega \setminus \gamma$ とおく。 $X = L^2(\gamma)$ は我々の議論の基礎となる Hilbert 空間である。また $V = H_{00}^{1/2}(\gamma)$ で関数空間 $C_0^\infty(\gamma)$ の $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ -ノルム

$$(6) \quad \|v\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} = \left\{ \|v\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 + \|\rho^{-1/2}v\|_{L^2(\gamma)}^2 \right\}^{1/2},$$

による閉包を表す。 ρ は γ の端点からの距離である。実際、関数空間 $V = H_{00}^{1/2}(\gamma)$ は補間空間 $[H_0^1(\gamma), L^2(\gamma)]_{1/2}$ に一致する ([13], [11])。

γ 上の関数 ξ に対して Ω 上の関数 $h = h_\xi(x, y)$ を次で定義する；

$$\Delta h = 0 \text{ in } \Omega, \quad h = 0 \text{ on } \Gamma, \quad h = \xi \text{ on } \gamma.$$

(Ω, γ) に対応する Steklov-Poincaré 作用素 $S = S(\Omega, \gamma)$ は (形式的に)

$$S\xi = \frac{\partial h_\xi}{\partial n} \quad \text{on } \gamma$$

で定義される。このように定義した Steklov-Poincaré 作用素 S (の Friedrichs 拡張) は、実は、関数空間 $X = L^2(\gamma)$ 上の正值自己共役作用素であり、かつ $\mathcal{D}(S^{1/2}) = V$ である¹。また、 X 上の二次形式 J を

$$J[\xi] = J[\Omega, \gamma; \xi] = (S\xi, \xi)_X (= \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

かつ $\mathcal{D}(J) = V$ で定めると、この J は正值閉形式で、任意の $\xi \in V$ に対して

$$(7) \quad J[\xi] = \|S^{1/2}\xi\|_X^2$$

が成り立つ。(証明や構成的な定義は [4], [5] を参照されたい)。

さて、再び DN 反復法に戻って $S_1 = S(\Omega_1, \gamma)$, $S_2 = S(\Omega_2, \gamma)$ と書こう。DN 反復法のアルゴリズム (2)(3) から

$$(8) \quad \xi^{(k+1)} = (1 - \theta)\xi^{(k)} - \theta S_2^{-1} S_1 \xi^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

¹ $\mathcal{D}(T)$ は作用素 T の定義域をあらわす。

が直ちにわかる. ここで $\xi^{(k)}$ は (5) で定義した関数である. H で $S_2^{-1}S_1$ の有界な拡張²を表すことにして, 今後それらを区別せず $H = S_2^{-1}S_1$ と書く. このとき

$$A_\theta = (1 - \theta)I - \theta H$$

と定義すれば (8) から, 誤差 $\xi^{(k)}$ は漸化的に

$$(9) \quad \xi^{(k)} = A_\theta^k \xi^{(0)}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

と表現できる. I は恒等作用素である. そこで A_θ を DN 反復法に対する誤差の増幅作用素 (amplification operator) と呼ぶことにする. 我々の解析のキーポイントの一つは V に特殊な内積

$$(\xi, \eta)_V = (S_2^{1/2}\xi, S_2^{1/2}\eta)_X, \quad \text{for any } \xi, \eta \in V.$$

を導入するところにある. この内積の下で V は再び Hilbert 空間をなし, 次の補題を得る.

Lemma 1. 線形作用素 A_θ は上で定めた内積の下で, V 上の有界かつ自己共役な作用素であり, さらに, 任意の $\xi \in V$ に対して次の式が成り立つ;

$$(10) \quad (A_\theta \xi, \xi)_V = (1 - \theta) \|S_2^{1/2}\xi\|_X^2 - \theta \|S_1^{1/2}\xi\|_X^2.$$

§4. 領域に対する条件と主な結果

前節の (9) から (4) の形の不等式を得るためには, A_θ の作用素ノルム $\|A_\theta\| = \|A_\theta\|_{\mathcal{L}(V)}$ の評価を求めれば良いことがわかった. A_θ は V 上の自己共役作用素であるから, それには, 数域 $(A_\theta \xi, \xi)_V$ の評価を求めれば良い. ところが (7) と (10) により, それは, $J_1[\xi] = J[\Omega_1, \gamma; \xi]$ を $J_2[\xi] = J[\Omega_2, \gamma; \xi]$ の定数倍を評価することに他ならない. このことを念頭に置きつつ, (Ω, γ) に対して次のような条件を導入する.

Cond. (F_m) and Cond. (F^ℓ) : $m, \ell \geq 1$ とする. (Ω, γ) が Cond. (F_m) あるいは Cond. (F^ℓ) を満たすとは, 任意の $\xi \in V$ に対して, それぞれ

$$J_1[\xi] \leq m J_2[\xi] \quad \text{あるいは} \quad J_2[\xi] \leq \ell J_1[\xi]$$

が成り立つときのこと.

Cond. (F_m) および Cond. (F^ℓ) を満たす (Ω, γ) の形状の具体的な例を挙げると;

Example 1. (Cond. (I_m) and Cond. (I^ℓ)) γ を y 軸上の線分とする. $m \geq 1$ に対して, T_m で x 軸に沿った縮小 $T_m : (x, y) \mapsto (x/m, y)$ を表すとする. $T_m \Omega_2$ の y 軸に関する鏡映の像を $(T_m \Omega_2)'$ とする. ここで $T_m \Omega_2$ は Ω_2 の T_m による像を意味している. このとき, もし $(T_m \Omega_2)' \subset \Omega_1$ が成り立てば, (Ω, γ) は Cond. (I_m) を満たすという. また $\ell \geq 1$ に対して (Ω, γ) が Cond. (I^ℓ) を満たすとは, $(T_\ell \Omega_1)' \subset \Omega_2$ が成り立つときを言う. 実は Cond. (I_m) , Cond. (I^ℓ) の下で, それぞれ

$$(11) \quad J_1[\xi] \leq m J_2[\xi], \quad J_2[\xi] \leq \ell J_1[\xi]$$

が成り立つ.

Example 2. (Cond. (R_m) and Cond. (R^ℓ)) γ を原点を中心とし半径が R の円弧とする. $m \geq 1$ に対して, T_m^R で写像 $T_m^R : (r, \phi) \mapsto (R + (r - R)/m, \phi)$ を定義する. (r, ϕ) は極座標である. $T_m^R \Omega_2$

²それは確かに存在して, 実は $H = S_2^{-1/2} \cdot (S_1^{1/2} S_2^{-1/2})^* \cdot S_1^{1/2}$ である. ただし $*$ は共役作用素を表す.

の γ (あるいは円全体) に関する鏡映の像を $(T_m \Omega_2)'$ で表す. このとき, もし $(T_m^R \Omega_2)' \subset \Omega_1$ が成り立てば, (Ω, γ) は $\text{Cond.}(\mathbf{R}_m)$ を満たすという. また $\ell \geq 1$ に対して (Ω, γ) が $\text{Cond.}(\mathbf{R}^\ell)$ を満たすとは, $(T_\ell^R \Omega_1)' \subset \Omega_2$ が成り立つときを言う. このときも, やはり, $\text{Cond.}(\mathbf{R}_m)$, $\text{Cond.}(\mathbf{R}^\ell)$ の下でそれぞれ (11) が成り立つ.

Example 3. (Diffuser 問題) 証明は省くが, Figure 2 で与えられる (Ω, γ) も $\text{Cond.}(\mathbf{F}_m)$ と $\text{Cond.}(\mathbf{F}^\ell)$ を満たすことが示せる. 例えば, $p \geq 1, q > 0$ に対して, $\Omega_2 = \{-1 < x < 0, 0 < y < q\}$, $\Omega_1 = \{0 < x < p, 0 < y < x + q\}$ のとき

$$(12) \quad J_1[\xi] \leq J_2[\xi], \quad J_2[\xi] \leq \alpha(p, q) J_1[\xi]$$

が成り立つ. ただし,

$$\alpha(p, q) = \begin{cases} p(3 + \sqrt{5})/2 & (1 \leq p \leq q) \\ p(\zeta^2 + 2 + \sqrt{\zeta^4 + 4})/(2\zeta) & (0 < q \leq p), \end{cases}$$

$\zeta = \zeta(p, q) = (p + q)/q$ である.

さて, 条件 $\text{Cond.}(\mathbf{F}_m)$, $\text{Cond.}(\mathbf{F}^\ell)$ の下では,

$$(1 - \theta) - m\theta \leq \frac{(A_\theta \xi, \xi)_V}{\|\xi\|_V^2} \leq (1 - \theta) - \frac{1}{\ell}\theta, \quad (\text{ただし } \|\xi\|_V^2 = (\xi, \xi)_V)$$

であるから, 次の定理を得る.

Theorem 1. $0 < \theta < \frac{2}{m+1}$ に対して $\tilde{r} = \tilde{r}_{m,\ell}(\theta)$ を

$$\tilde{r} = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)\theta, & \text{for } 0 < \theta \leq \frac{2}{m + \frac{1}{\ell} + 2} \\ (m+1)\theta - 1, & \text{for } \frac{2}{m + \frac{1}{\ell} + 2} \leq \theta < \frac{2}{m+1} \end{cases}$$

と定義する. (Ω, γ) が $\text{Cond.}(\mathbf{F}_m)$ と $\text{Cond.}(\mathbf{F}^\ell)$ を満たすとする. このとき $0 < \tilde{r} < 1$ で, かつ (Ω, γ) のみに依存した正の定数 c_1 が存在して

$$(13) \quad \|\xi^{(k)}\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} \leq c_1 \tilde{r}^k \|\xi^{(0)}\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ.

Theorem 2. $\text{Cond.}(\mathbf{F}_m)$ と $\text{Cond.}(\mathbf{F}^\ell)$ の下では $\theta = \theta_{\text{opt}} = \frac{2}{m + \frac{1}{\ell} + 2}$ と選ぶことにより, (13) の $\tilde{r}$ として

$$\tilde{r}_{\text{opt}} = \frac{m - \frac{1}{\ell}}{m + \frac{1}{\ell} + 2}$$

が採れる.

Remark 1. 収束の速さ $\tilde{r}_{\text{opt}}^k$ をもたらす緩和パラメータの選択 $\theta = \theta_{\text{opt}}$ は次の意味において最適な選択である. Theorem 2 によれば, $\theta = \theta_{\text{opt}}$ なるパラメータの選択は $\text{Cond.}(\mathbf{F}_m)$, $\text{Cond.}(\mathbf{F}^\ell)$ を満たす任意の (Ω, γ) に対して収束の速さ $\tilde{r}_{\text{opt}}^k$ を保証している. 一方において, 手計算が可能な場合や数値実験による検証によれば, θ をどのように選んでも, 収束の速さが $\tilde{r}_{\text{opt}}^k$ よりも速くならないような幾何学的状況が存在する (Fujita-Fukuhara-Saito[6]). すなわち, $\theta = \theta_{\text{opt}}$ は $\text{Cond.}(\mathbf{F}_m)$, $\text{Cond.}(\mathbf{F}^\ell)$ の成立のみを確かめ得る任意の (Ω, γ) に対して保証され得る最良の収束率 $\tilde{r}_{\text{opt}}^k$ を与えている. 上述の意味での緩和パラメータの選択を, 今後, “一般的に最適な緩和パラメータの選択” と呼ぶことにする.

Remark 2. Fujita[4], 藤田・桂田・小張・長坂 [5] で得られている結果は上の Theorem 1,2 での特殊な状況, すなわち $\text{Cond.}(F_m)$ の成立のみを確かめ得る場合に対応している.

Remark 3. $m = \ell = 1$ のとき $\theta_{\text{opt}} = 1/2, \tilde{r}_{\text{opt}} = 0$ となり一回の反復で厳密解が得られる.

§5. DN 反復法に対する数値実験結果

理論的に得られた結果の妥当性あるいは限界を確認するため, target 問題に対し, 上記のアルゴリズムに従い部分問題を差分法で数値的に解いて, 近似解を求める. 厳密解が $\tilde{u} = \log\{x^2 + (y+5)^2\}$ であるとき, すなわち, (1) において $f \equiv 0, \beta = \log\{x^2 + (y+5)^2\}$ のときを, また領域 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, そして部分領域 Ω_1, Ω_2 が Figure 3 あるいは Figure 2 で与えられる場合を考える.

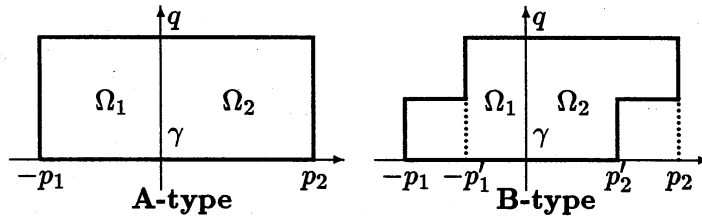


Figure 3.

Figure 3 で与えた領域は $\text{Cond.}(I_m)$ および $\text{Cond.}(I^\ell)$ を満たしている. $\lambda_h^{(k)}$ を $\tilde{\lambda} = \tilde{u}|_\gamma$ に対する差分 version での第 k 近似とする. h は差分法の格子間隔 $\Delta x = \Delta y = 0.05$ を表す. 数値的な初期推定値 $\lambda_h^{(0)}$ は $0 \leq y \leq q$ 上の直線で $y = 0, q$ において $\lambda_h^{(0)} = \tilde{u}$ を満たすものとする.

Table 1.

(a)	θ	0.1	0.3	θ_{opt}	0.5	0.7	0.9
	k^*	17	5	4	2	3	6
	$\tilde{r}_{\text{max}}^*$	0.825	0.476	0.418	0.127	0.221	0.570
	$\tilde{r}$	0.800	0.400	0.333	****	****	****

(A-type; $p_1 = 0.5, p_2 = 1.5, q = 0.5$, $\text{Cond.}(I_3)$, $\text{Cond.}(I^1)$, $\theta_{\text{opt}} = 0.333$).

(b)	θ	0.1	0.3	θ_{opt}	0.5	0.7	0.9
	k^*	20	5	4	20	--	--
	$\tilde{r}_{\text{max}}^*$	0.768	0.392	0.260	0.768	--	--
	$\tilde{r}$	0.800	0.400	0.333	****	****	****

(A-type; $p_1 = 0.5, p_2 = 1.5, q = 5$, $\text{Cond.}(I_3)$, $\text{Cond.}(I^1)$, $\theta_{\text{opt}} = 0.333$).

(c)	θ	0.1	0.3	0.5	θ_{opt}	0.7	0.9
	k^*	17	5	2	1	3	6
	$\tilde{r}_{\text{max}}^*$	0.826	0.478	0.136	0.043	0.390	0.564
	$\tilde{r}$	0.866	0.600	0.333	0.200	0.400	0.800

(A-type; $p_1 = 1.5, p_2 = 0.5, q = 0.5$, $\text{Cond.}(I_1)$, $\text{Cond.}(I^3)$, $\theta_{\text{opt}} = 0.600$).

ある許容誤差内におさまるまでに要した反復回数を k^* で表す; k^* は

$$e_k = \|\lambda_h^{(k)} - \tilde{\lambda}\|_{L^\infty(\gamma_h)} = \max_{P \in \gamma_h} |\lambda_h^{(k)}(P) - \tilde{\lambda}(P)| \leq 10^{-5},$$

を満たす最小の k である. ここで, γ_h は γ 上の格子点全体である. また, 各反復段階における収束率

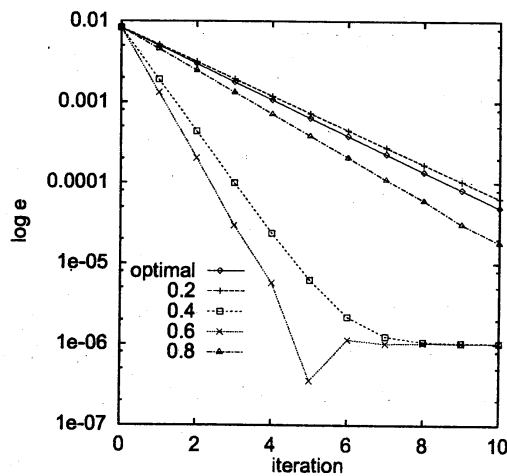
$$\tilde{r}_1^* = \frac{e_1}{e_0}, \tilde{r}_2^* = \frac{e_2}{e_1}, \dots, \tilde{r}_k^* = \frac{e_k}{e_{k-1}}, \dots$$

に注目し $\tilde{r}_{\max}^* = \max\{\tilde{r}_k^* | 1 \leq k \leq k^*\}$ と定義する.

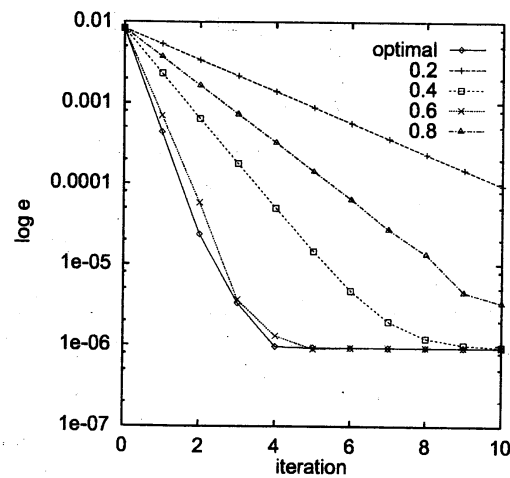
Table 1(a)(b) において **** は, そのときの緩和パラメータ θ に対して, 誤差の指数関数的な減衰が Theorem 1 から理論的に保証されていないことを意味している. また (b) における -- は実際に数値実験でも誤差が減衰しなかったことを示している.

Table 1 から, 緩和パラメータの選択は反復法の収束に重大な影響を及ぼしていること, しかし, 収束率自体は緩和パラメータに滑らかに依存することが見てとれる.

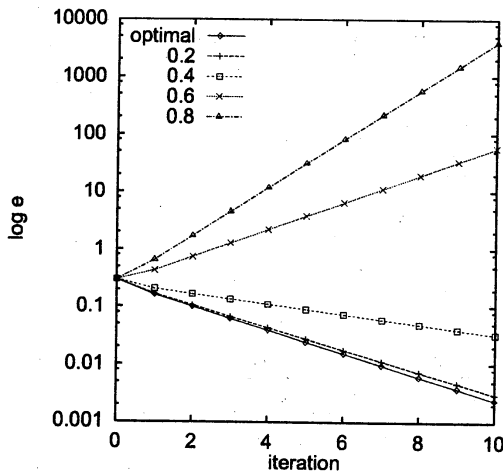
Figure 4(a)-(d) は横軸に反復回数 k を, 縦軸に誤差 e_k の常用対数 ($= \ln e_k$) を採ったものである. すなわち, これらのグラフが負の傾きをもつ直線であるということは, γ 上の誤差が指数的に減少していることを示している. また, それらの直線の傾きが急であるほど収束が速いことを表している. 各々について $\theta = \theta_{\text{opt}}, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の 5 つの場合の結果が重ねて表示してある.



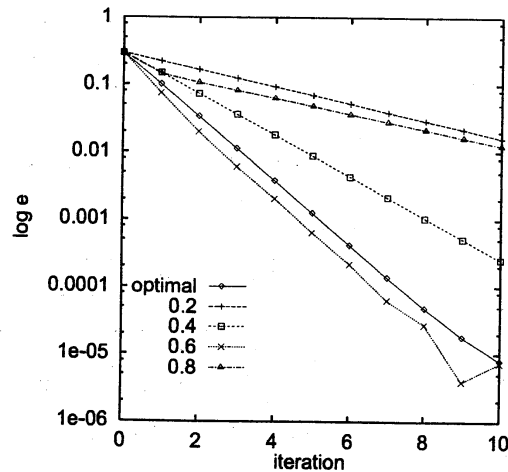
(a) B-type; $p_1 = 2.5, p'_1 = 0.5$,
 $p_2 = 3.5, p'_2 = 1.5, q = 1$,
Cond.(I₇), Cond.(I_{5/3}), $\theta_{\text{opt}} = 0.2083$.



(c) B-type; $p_1 = 3.5, p'_1 = 1.5$,
 $p_2 = 2.5, p'_2 = 0.5, q = 1$,
Cond.(I_{5/3}), Cond.(I₇), $\theta_{\text{opt}} = 0.5250$.



(b) B-type; $p_1 = 2.5, p'_1 = 0.5$,
 $p_2 = 3.5, p'_2 = 1.5, q = 10$,
Cond.(I₇), Cond.(I_{5/3}), $\theta_{\text{opt}} = 0.2083$.

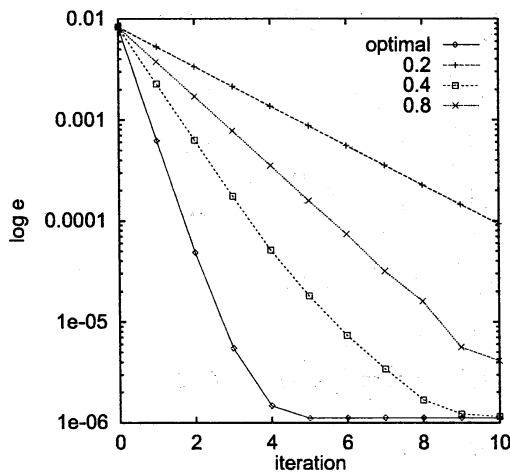


(d) B-type; $p_1 = 3.5, p'_1 = 1.5$,
 $p_2 = 2.5, p'_2 = 0.5, q = 10$,
Cond.(I_{5/3}), Cond.(I₇), $\theta_{\text{opt}} = 0.5250$.

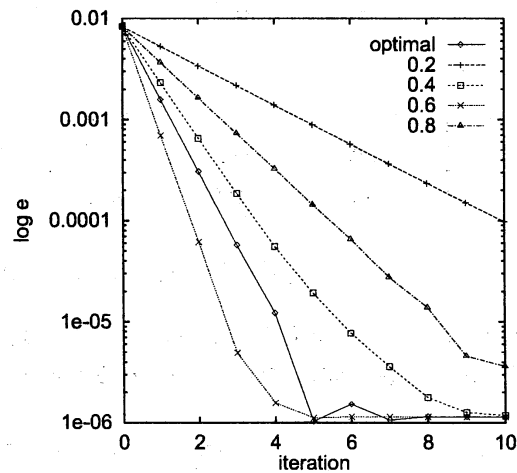
Figure 4. Iteration number k vs $\ln e_k$ with several θ s;
for the domains given Figure 3 (B-type).

Table 1 および Figure 4 から, 次のような傾向が見てとれる; (1°) 縦幅と横幅の比があまり大きくないときには, Theorem 2 が一般的に提出する θ_{opt} よりももっと速い収束を与える緩和パラメータ θ の選択があり得る. しかし, 横幅を固定し, 高さを大きくしていくと, 最良の収束率を与える θ の値が理論的に得られた一般的な最適値 ($= \theta_{\text{opt}}$) に近づく. (2°) Ω_2 よりも Ω_1 が相対的に大きい方が, すなわち Dirichlet 問題を解く方の領域が Neumann 問題を解く方の領域よりも相対的に大きい方が, 最良の収束率を与える θ の値が理論的に得られた θ_{opt} に近い.

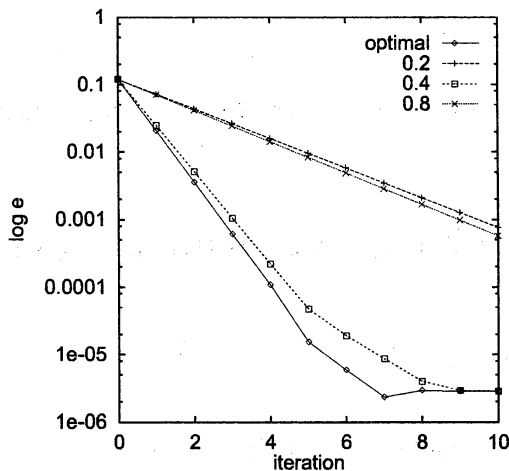
また, Figure 5(a)-(d) は Figure 2 および Example 3 で与えられた領 (diffuser) についての誤差の減衰を調べたものである. いずれの場合も θ_{opt} は実際にも良い収束の速さを与えていること, すなわち (12) が良い評価であることがわかる. また, やはり高さがより大きい方が, すなわち固定された p に対して q を大きくする方が, 最良の収束率を与える θ の値が理論的に得られた θ_{opt} に近づく傾向がみてとれる.



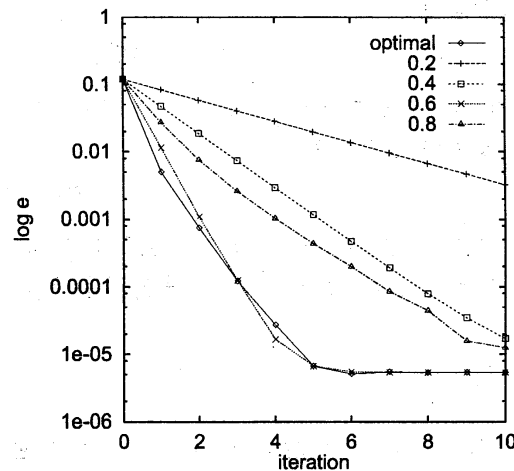
(a) $p = 1, q = 1, \theta_{\text{opt}} = 0.5913$



(c) $p = 5, q = 1, \theta_{\text{opt}} = 0.6595$



(b) $p = 1, q = 5, \theta_{\text{opt}} = 0.5913$



(d) $p = 5, q = 5, \theta_{\text{opt}} = 0.6501$

Figure 5. Iteration number k vs $\ln e_k$ with several θ s;
for the domains given Figure 2 and Example 3.

Remark 4. Figure 3 の A-type の領域については手計算で厳密解が求められるが, それを元に議論すれば上の実験結果が解析的にも正当化できる (Fujita-Saito[6]).

§6. DD-NN 反復法

この節では Dirichlet²-Neumann² (DD-NN) 反復法と呼ばれる次の DDM アルゴリズムについて考察をする。

$(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ と $(v_1^{(k)}, v_2^{(k)})$ を, それぞれ, $(\tilde{u}|_{\Omega_1}, \tilde{u}|_{\Omega_2})$ の 2 組の近似解の列とする. また $\lambda^{(k)}$ を $\tilde{u}|_{\gamma}$ の第 k 次の近似解とする.

DD-NN 反復法: $\lambda^{(0)}$ を初期推定値として, $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}), (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}), \lambda^{(k+1)}$ ($k = 0, 1, \dots$) を次で生成する;

$$(14) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{(k)} = f & \text{in } \Omega_1 \\ u_1^{(k)} = \beta & \text{on } \Gamma_1 \\ u_1^{(k)} = \lambda^{(k)} & \text{on } \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta u_2^{(k)} = f & \text{in } \Omega_2 \\ u_2^{(k)} = \beta & \text{on } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial n} = -\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \nu} & \text{on } \gamma \end{cases},$$

$$(15) \quad \begin{cases} -\Delta v_2^{(k)} = f & \text{in } \Omega_2 \\ v_2^{(k)} = \beta & \text{on } \Gamma_2 \\ v_2^{(k)} = \lambda^{(k)} & \text{on } \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta v_1^{(k)} = f & \text{in } \Omega_1 \\ v_1^{(k)} = \beta & \text{on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial \nu} = -\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial n} & \text{on } \gamma \end{cases},$$

$$(16) \quad \lambda^{(k+1)} = (1 - \sigma - \tau)\lambda^{(k)} + \sigma u_2^{(k)} + \tau v_1^{(k)} \text{ on } \gamma.$$

ここで σ, τ は $\sigma \geq 0, \tau \geq 0, 0 < \sigma + \tau < 1$ なる緩和パラメータである.

DN 反復法のとくと同様に考えると, DD-NN 反復法に対する誤差の増幅作用素は

$$(17) \quad B_{\sigma, \tau} = (1 - \sigma - \tau)I - \sigma H - \tau H^{-1}$$

の形に書けることが直ちにわかる. ただし H は §3 で定義した V 上の自己共役作用素である. すなわち γ 上の誤差は

$$\xi^{(k)} = B_{\sigma, \tau}^k \xi^{(0)}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

により漸化的に生成される. ところで, $\psi(\lambda) = 1 - \sigma - \tau - \sigma\lambda - \tau\lambda^{-1}$ と定義すれば, $B_{\sigma, \tau}$ は自己共役作用素 H の関数として

$$B_{\sigma, \tau} = \psi(H)$$

と書ける. また, $\text{Cond.}(F_m)$ 及び $\text{Cond.}(F^\ell)$ の下では H のスペクトルは区間 $[1/\ell, m]$ に含まれる. これらのこと, および スペクトル写像定理を用いれば

$$\|B_{\sigma, \tau}\|_{\mathcal{L}(V)} \leq \sup_{1/\ell \leq \lambda \leq m} |\psi(\lambda)|$$

を得る. 結局, 一般的に最適な緩和パラメータの選択を求める趣旨で, 次の結果が得られる.

Theorem 3. はじめに簡単のため, $p = q$ である場合を考える. $0 < \theta < 1$ なる定数 θ に対して $2\sigma = 2\tau = \theta$ を仮定する. $m, \ell \geq 1$ に対して, $\text{Cond.}(F_m), \text{Cond.}(F^\ell)$, さらに一般性を失うことなく $m \geq \ell$ を仮定すれば, DD-NN 反復法に関して, 一般的に最適な緩和パラメータの選択は

$$\theta_{\text{opt}} = \frac{4m}{m^2 + 6m + 1} \quad \text{であり, このとき} \quad \tilde{r}_{\text{opt}} = \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 6m + 1}.$$

Theorem 4. $m, \ell \geq 1$ に対して, $\text{Cond.}(F_m), \text{Cond.}(F^\ell)$, さらに一般性を失うことなく $m \geq \ell$ を仮定すれば, DD-NN 反復法に関して, 一般的に最適な緩和パラメータの選択は

$$\sigma_{\text{opt}} = \frac{2\ell}{\rho}, \quad \tau_{\text{opt}} = \frac{2m}{\rho}, \quad \text{であり, このとき} \quad \tilde{\tau}_{\text{opt}} = \frac{m\ell - 2\sqrt{m\ell} + 1}{\rho}.$$

ただし $\rho = \rho(m, \ell) = m\ell + 2(m + \ell + \sqrt{m\ell}) + 1$ である.

Remark 5. 上で述べた DD-NN 反復法の解析法により, J.F.Bourgat らによって提案された Neumann/Neumann アルゴリズム ([2]), あるいは福原, 竹田によって研究された交互境界条件法 ([9]) を全く同様に扱うことができる ([10],[6]).

References

- [1] P.E. Børstad and O.B. Widlund: *Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures*, SIAM J. Numer. Anal., **23**(6), 1986, 1097-1120.
- [2] J. F. Bourgat, R. Glowinski, P. Le Tallec and M. Vidrascu: *Variational formulation and algorithm for trace operator in domain decomposition calculations*, in Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, II, SIAM, 1989, 3-16.
- [3] H. Fujita: *Remarks on the domain-dependence of convergence rates of a certain DDM*, Lecture at International Conference on Parallel Algorithm for Scientific and Engineering Computations, May 1995, Chiba, Japan.
- [4] H. Fujita: *Remarks on the domain-dependence of convergence rate of iterations in a certain domain decomposition method*, Meiji Univ. Math. Dept. Preprint series, No.2, 1995 and to appear in "Collection of Papers on Geometry, Analysis and Mathematical Physics" in honor of Prof. G. Chaochao.
- [5] 藤田宏, 桂田祐史, 小張朝子, 長坂吉晃: 領域分割法の収束に関する解析的ならびに数値的研究, I, 明治大学科学技術研究所紀要.
- [6] H. Fujita M. Fukuhara and N. Saito: *On the rate of convergence of iterations in the domain decomposition methods*, to appear in Proc. of the third Japan-China joint seminar on numerical mathematics, August 26-30, 1996, Dalian, P.R. China.
- [7] H. Fujita and N. Saito: *An analytical study of optimal speed of convergence of iterations in DDM under certain shape assumptions of domains*, to appear in Proc. of "the Computational Science for the 21st Century" conference in honor of Prof. R. Glowinski on the occasion of his 60th birthday, 1997, in France.
- [8] D. Fujiwara: *Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order*, Proc. Japan Acad., **43**, 1967, 82-86.
- [9] 福原誠, 竹田辰興: 交互境界条件法を用いた領域分割法の数値計算, 統計数理研究所共同研究リポート 85, MHD 数値モデルによる核融合計算と最適設計, 1996.
- [10] 福原誠, 竹田辰興, 斉藤宣一, 藤田宏: 領域分割法における収束の速さと領域の形状; III, 日本応用数理学会平成 8 年度会, 講演予稿集 222-223, 東京大学駒場キャンパス, 1996 年 9 月.
- [11] P. Grisvard: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, 1985.
- [12] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1978.
- [13] J.L. Lions and E. Magenes: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, I, Springer-Verlag, 1972.
- [14] L.D. Marini and A. Quarteroni: *A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements*, Numer. Math., **55**, 1989, 575-598.
- [15] A. Quarteroni and A. Valli: *Theory and application of Steklov-Poincaré operators for boundary-value problems: the heterogeneous operator case*, in Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, IV, SIAM, 1990, 58-81.
- [16] K. Yosida: *Functional Analysis*, 6th edition, Springer-Verlag, 1980.