

五河数と Hasse zeta の値に関する予想

東大理 加藤和也

ハッセゼータ関数の特殊値についての一般的予想を与えることを Spencer Bloch 氏と考えたので、それについて報告する。予想それ自体についてはほとんど結果がなく、むしろ予想を立てるための local な考察など副産物的なものか、現状では実質的な結果である。保型形式のゼータの特殊値の予想についてはいろいろなかたかたの研究があり、ハッセゼータが保型形式のゼータとしてとらえられる場合には、実質的な結果が知られている。そのような結果と、ここに述べる (P 進 Hodge 理論風のことを用いた、異様な) 予想とを結びつけたいと思いつつ、また力が及ばすにいる状況である。

予想は §5 に述べるが、ポイントは五河数の考えにより、Deligne や Beilinson の予想にある「modulo 有理数倍」を除くことである。結局予想は、おおまかに言って

$$L_S(H^m(X), r) = \mu\left(\left(\prod_{p \in S} G(\mathbb{Q}_p)\right)/G(\mathbb{Q})\right) \cdot \frac{\#(\text{III})}{\#(\text{III})}$$

という形である。ここに S は「悪い素点」の有限集合、 $G(\mathbb{Q}_p)$,

$G(\mathbb{Q})$, III, III は 3 つ組 (X, m, r) に伴ってきまる可換群の族 (

III はアーベル多様体のいわゆる III の一般化), μ はある測度,
 n は位数.

§1. 復習 — 代数群の五河数

まず代数群の五河数かどのようにセータ関数と関係するかを見る. あとで §5 の予想に出てくるのは, 代数群ではないものの五河数 (「モチーフの五河数」) なのであるが, この代数群の五河数のまねをして考えてゆくのである.

代数群の例として $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $SL_n(\mathbb{Q})$ を考える. $SL_n(\mathbb{Q})$ の五河数 $Tam(SL_n(\mathbb{Q}))$ は

$$Tam(SL_n(\mathbb{Q})) = \mu\left(\left(\prod_{p \leq \infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)\right) / SL_n(\mathbb{Q})\right)$$

として定義され, ここに p はすべての素数と $\mathbb{Q}$ の無限素点 ∞ を走り, μ は $\prod_{p \leq \infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の五河測度. そして,

$$(1.1) \quad Tam(SL_n(\mathbb{Q})) = 1$$

が知られている. 五河測度を定義するには

$$\omega: \bigwedge^{\max} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

(ここには $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{Q})$ は $SL_n(\mathbb{Q})$ のリ-環, $\bigwedge^{\max} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 線型空間としての次元 $\deg$ の外巾) を固定する. するとある手続きにより, 各 $p \leq \infty$ について $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の Haar 測度 $\mu_{p,\omega}$ が定義される. そして $\prod_{p \leq \infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の積測度 $\mu = \prod_{p \leq \infty} \mu_{p,\omega}$ は ω のとり方によらず, 五河測度と呼ばれる. ($\omega \in c\omega$, $c \in \mathbb{Q}^\times$ にかえると $\mu_{p,c\omega} = |c|_p \mu_{p,\omega}$ となり, 各 p についての $\mu_{p,\omega}$ は変化する

るが、積公式 $\prod_{p \leq \infty} |c|_p = 1$ により、積測度は変化しない。

今特に ω として $sl_n(\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 加群としての base $e_1, \dots, e_m$ について $\omega(e_1 \wedge \dots \wedge e_m) = 1$ となるものをとれば、 $p < \infty$ について

$$(1.2) \quad \mu_{p, \omega}(SL_n(\mathbb{Z}_p)) = \prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^i}\right)$$

であることが計算される ($\# SL_n(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) / \# M_n(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) = \prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{p^i})$

$\forall m \geq 1$ なることによる) よって

$$\prod_{p < \infty} \mu_{p, \omega}(SL_n(\mathbb{Z}_p)) = \prod_{i=2}^n \zeta(i)^{-1}$$

(これはリーマンゼータ)。したがって

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\prod_{p \leq \infty} SL_n(\mathbb{Q}_p)\right) / SL_n(\mathbb{Q})\right) &= \mu_{\infty, \omega}(SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z})) \cdot \prod_{p < \infty} \mu_{p, \omega}(SL_n(\mathbb{Z}_p)) \\ &= \mu_{\infty, \omega}(SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z})) \cdot \prod_{i=2}^n \zeta(i)^{-1}. \end{aligned}$$

よって、 $Tam(SL_n, \mathbb{Q}) = 1$ という事実は、

$$(1.3) \quad \prod_{i=2}^n \zeta(i) = \mu_{\infty, \omega}(SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z}))$$

を意味する。

§2. Hasse zeta.

X を $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth scheme とする。(代数体上の多様体も $\mathbb{Q}$ 上の scheme として考える。その方が記号や定義を簡略化できる。) $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S で、 ∞ を含み、 X が S の外で good reduction であるものとする時、 X の (S を除いた) Hasse zeta の "m-次部分" $L_S(H^m(X), s)$ は、

$$L_S(H^m(X), s) = \prod_{p \notin S} P_p(p^{-s})^{-1}$$

こゝに

$$P_p(T) = \det(1 - \sigma_p^{-1} T : H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell))$$

(σ_p は p の Frobenius, ℓ は p と異なる素数, $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{Q}}$, H_{et} は étale cohomology) と定義される. $P_p(T)$ は $\mathbb{Z}$ 係数の, ℓ に依らない多項式で, $\mathbb{C}[T]$ において $\prod_i (1 - \alpha_i T)$ $|\alpha_i| = p^{\frac{m}{2}}$ の形をもつ. そして $L_S(H^m(X), s)$ は $\operatorname{Re}(s) > \frac{m}{2} + 1$ で絶対収束する.

そして予想としては $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続され, s の値と $m+1-s$ の値を結ぶ関数等式をもつと考えられている.

さて, 整数 r に対し, $L_S(H^m(X), s)$ の $s=r$ での値 (もし, $s=r$ で d 位の零点あるいは $-d$ 位の極をもつときは, '値'

$\lim_{s \rightarrow r} L_S(H^m(X), s) \cdot (s-r)^{-d}$ を問題にする) は, $r \geq \frac{m+1}{2}$ なら,

3つ組 (X, m, r) に伴う群の系 $G(\mathbb{Q}_p)$ ($p \leq \infty$), $G(\mathbb{Q})$ に関する「玉河数」

(あるいは, "モチーフ $H^m(X)(r)$ の玉河数") と関係し, $r \leq \frac{m+1}{2}$

なら $(X, m, m+1-r)$ に伴う上の群の系の「玉河数」に関係する

と予想するのが, 我々の方法である.

§3. 準備 I. 環 B_{crys} , B_{DR} , de Rham 予想.

Fontaine の重要な環 B_{crys} , B_{DR} ([Fo]) の紹介をし, de Rham 予想について述べる.

K を混標数 $(0, p)$ の完備離散付値体で, 剰余体が完全体であ

るものとする。この時 Fontaine の巨大な環 B_{crys} , B_{DR} が定義され、次のような性質をもつ。

- (1) $B_{\text{crys}} \subset B_{\text{DR}}$, これらには $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用し、これらの $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ 不変部分は、それぞれ K_0 , K と同一視される。ここに、 $K_0 \subset K$ は、 K の剰余体 k の Witt 環 $W(k)$ の分体。
- (2) Frobenius 写像 $f: B_{\text{crys}} \rightarrow B_{\text{crys}}$ が与えられている。
- (3) B_{DR} は $\bar{K}$ の完備化 $\mathbb{C}_p$ を剰余体とする完備離散付値体である。($B_{\text{DR}}^i = \{a \in B_{\text{DR}} : a \text{ の正規加法付値 } \geq i\}$ とおく)

一般に $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続に作用する $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次元線型空間 V に対し、

$$\text{Crys}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{crys}} \text{ の } \text{Gal}(\bar{K}/K)\text{-不変部分})$$

$$\text{DR}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{DR}} \text{ の } \text{Gal}(\bar{K}/K)\text{-不変部分})$$

($\text{Gal}(\bar{K}/K) \ni \sigma$ の作用は $\sigma \otimes \sigma$) とおく。この時 $\text{Crys}(V)$ は

K_0 上の有限次元線型空間で Frobenius f をもち (B_{crys} の Frobenius から導かれる), $\text{DR}(V)$ は K 上の有限次元線型空間で filtration

$$\text{DR}^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{DR}}^i \text{ の } \text{Gal}(\bar{K}/K)\text{-不変部分}) \text{ をもち, } K \otimes_{K_0} \text{Crys}(V) \hookrightarrow \text{DR}(V),$$

$\dim_K \text{DR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ となる。Fontaine は [F₀] で次のことを予想した。

X を K 上の proper smooth scheme とする。

de Rham 予想: filtration を保つ標準同型

$$\text{DR}(H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)) = H_{\text{DR}}^m(X/K)$$

がある。(ここに $H_{\text{DR}}^m(X/K)$ は de Rham cohomology $H^m(X, \Omega_{X/K})$ で Hodge

filtration $\text{Fil}^i H_{\text{DR}}^m(X/K) = H^m(X, \Omega_{X/K}^{\geq i})$ をもつ.)

次の定理を得た.

定理. X が potentially i -semi-stable reduction で $p > 2\dim X + 3$ なら de Rham 予想は X について成立する.

semi-stable reduction とは, X の O_K 上の proper regular model $\tilde{X}$ で, special fiber が $\tilde{X}$ 内の reduced, normal crossing な divisor になっていることをいう. "potentially" とは定数体 K の有限次拡大をすれば semi-stable reduction になることで, 任意の X は potentially i -semi-stable reduction であると予想される. 証明には, 兵頭治氏による semi-stable reduction の多様体の p -進 étale cohomology の研究を用いる. ([Hy])

Faltings の Hodge-Tate 分解

$$(*) \quad H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{C}_p \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^{m-i}(X, \Omega_{X/K}^i) \otimes_K \mathbb{C}_p(-i)$$

は, 定理の条件をみたす X については次のように別証が与え

$$\text{られる. 定理より } (**) \quad H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{DR}} \cong H_{\text{DR}}^m(X/K) \otimes_K B_{\text{DR}}$$

$$\text{かわかり, この同型は } H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{DR}}^i \cong \sum_{s+t=i} f_{\alpha^s} \otimes B_{\text{DR}}^t \text{ を導く}$$

$$\text{が, } (i=0 \text{ の時}) / (i=1 \text{ の時}) \text{ をとれば } \text{gr}^s H_{\text{DR}}^m(X/K) = H^{m-s}(X, \Omega_{X/K}^s)$$

$$\text{と } B_{\text{DR}}^t / B_{\text{DR}}^{t+1} \cong \mathbb{C}_p(t) \text{ かつ, } (*) \text{ を得る.}$$

de Rham 予想や $(**)$ は, $\mathbb{C}$ 上の多様体の Hodge 理論

$$H^m(V(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong H_{\text{DR}}^m(V/\mathbb{C}) \quad (V \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上 proper smooth})$$

の類似である. このような " p -進 Hodge 理論" をすべての $p \leq \infty$ につ

いて ($p = \infty$ のときのみでなく) 考えることで, Hasse zeta のことがよくわかると考えるわけである.

なお X を再び上のとおりとすると, 次の予想が $[F_0]$ にあった.

crystalline 予想 X が good reduction とし Y をその reduction とすると Frobenius を伴う同型 $\text{Crys}(H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)) \cong H_{\text{crys}}^m(Y) \otimes \mathbb{Q}_p$ には H_{crys}^m は crystalline cohomology が存在する

この予想は K で p が素元, $p > \dim(X)$ のとき Fontaine-Messing [FM] が証明した. Faltings がそれを一般化したか詳細はよくわからない.

§4 準備 II. カロア cohomology の H^1 について.

§5 では (X, m, r) に対応する群 $G(\mathbb{Q}_p)$ ($p < \infty$) や $G(\mathbb{Q})$ を, カロア・コホモロジーの H^1 の部分群として定義するので, そのための準備的定義をする. 体 k に対し $\text{Gal}(k_{\text{sep}}/k)$ (k_{sep} は k の分離閉包) の連続 Galois cohomology を $H^i(k,)$ と書く. 問題とする所は次のとおり. $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$ ($p \neq \infty$) または $[K:\mathbb{Q}] < \infty$ とし, A を K 上のアーベル多様体とし, T を A の Tate 加群 $\varprojlim_n \text{Ker}(A(\bar{K}) \xrightarrow{n} A(\bar{K}))$ とする. すると $A(K)$ は $H^1(K, T)$ の部分群と解釈される. ("Kummer sequence" $0 \rightarrow T/nT \rightarrow A(\bar{K}) \xrightarrow{n} A(\bar{K}) \rightarrow 0$ の boundary map として単射 $A(K) \rightarrow \varprojlim_n H^1(K, T/nT) = H^1(K, T)$ を得る.) 問題は, $A(K)$ が $H^1(K, T)$ のどんな部分群ととらえ

られるかということである。以下 $H_f^1(K, T) \subset H_g^1(K, T) \subset H^1(K, T)$ を定義するかこれを用いると, $K: \text{local}$ の時,

$$A(K) = H_f^1(K, T) = H_g^1(K, T), \quad K: \text{global} \text{ の時 } A(K) \subset H_f^1(K, T) = H_g^1(K, T)$$

でもし A の値が有限ならこの $\subset$ は $=$ となる。またアーベル多

様体のかわりに K 上の乗法群 G_m とその Tate 加群 $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ を考え

ると, $K: \text{local}$ なら $H_f^1(K, \hat{\mathbb{Z}}(1)) = (O_K)^\times$, $H_g^1(K, \hat{\mathbb{Z}}(1))$ は $K^\times$ の

profinite completion, $K: \text{global}$ なら $H_f^1(K, \hat{\mathbb{Z}}(1)) = O_K^\times \otimes \hat{\mathbb{Z}}$,

$$H_g^1(K, \hat{\mathbb{Z}}(1)) = K^\times \otimes \hat{\mathbb{Z}} \quad (O_K \text{ は } K \text{ の整数環}) \text{ となる。}$$

(1) Local: $[K: \mathbb{Q}_p] < \infty$ ($p \neq \infty$) とする。 l を素数とし,

V を $\mathbb{Q}_l$ 上の有限次元線型空間に $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続に作用するもの

とする。 $H^1(K, V)$ の部分空間 $H_f^1(K, V) \subset H_g^1(K, V) \subset H^1(K, V)$ を

次のように定義する。

$$l \neq p \text{ なら, } H_f^1(K, V) = \text{Ker}(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K_{nr}, V))$$

$$H_g^1(K, V) = H^1(K, V)$$

(K_{nr} は K の最大不分岐拡大),

$$l = p \text{ なら } H_f^1(K, V) = \text{Ker}(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, V \otimes B_{\text{crys}}))$$

$$H_g^1(K, V) = \text{Ker}(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, V \otimes B_{\text{dR}}))$$

と置く。次に T を $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \neq 0} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の有限生成自由加群で

$\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続に作用するものとする時, $* = f, g$ に対し,

$$H_*^1(K, T) = \prod_{l: \text{素数}} \left(H^1(K, T \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Q}_l) \text{ の元で, } H^1(K, T \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Q}_l)^\wedge \text{ の像が } H_*^1(K, T \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Q}_l) \text{ に入るもの全体} \right) \quad \text{と置く。}$$

(2) global : $[K:\mathbb{Q}] < \infty$ とし T を有限生成自由 $\hat{\mathbb{Z}}$ 加群で $G_{\text{al}}(\bar{K}/K)$ が連続に作用するものとする. $H^1(K, T)$ の部分群 $H_f^1(K, T)$ (resp. $H_g^1(K, T)$) を, $H^1(K, T)$ の元で, K のすべての非アルキメデス素点 v についてその $H^1(K_v, T)$ での像が $H_f^1(K_v, T)$ に入るもの (resp. K のすべての非アルキメデス素点 v についてその $H^1(K_v, T)$ での像が $H_g^1(K_v, T)$ に入り, K のほとんどすべての非アルキメデス素点 v について, その $H^1(K_v, T)$ での像が $H_f^1(K_v, T)$ に入るもの) 全体とする. (すなわち, $H_*^1(K_v, T \otimes \mathbb{Q}) = H_*^1(K_v, T) \otimes \mathbb{Q}$ とおく)

定義 X を $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth scheme とし, $m, r \in \mathbb{Z}$ を fix する.

$$\psi = \begin{cases} \text{gr}^r(K_{2r-m-1}(X) \otimes \mathbb{Q}) & m \neq 2r-1 \text{ の時} \\ (CH^r(X) \otimes \mathbb{Q})_{\text{hom} \sim 0} & m = 2r-1 \text{ の時} \end{cases}$$

(gr^r は γ -filtration, $\text{hom} \sim 0$ は homologically equivalent to zero の部分) とおく.

(将来 モチーフ論が完成すれば ψ は

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathbb{Q}, H^m(X)(r) \otimes \mathbb{Q}), \quad \text{これは } \text{Spec}(\mathbb{Q}) \text{ 上の } \mathbb{Q}\text{-係数モチーフの圏}$$

と書かれるはずのものである.) Chern class map

$$\psi \rightarrow H^1(\mathbb{Q}, H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \otimes \mathbb{Q}) \text{ が定義される}$$

$$\text{予想: (1) } \psi \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong H_g^1(\mathbb{Q}, H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \otimes \mathbb{Q}).$$

(2) ψ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間 Φ での上の同型により,

$$\Phi \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong H_f^1(\mathbb{Q}, H_{\text{ét}}^m(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \otimes \mathbb{Q}) \text{ となるものがある}$$

(Φ は あれは 唯一)

(3) X が $\mathbb{Z}$ 上 proper regular なモデル $\mathcal{X}$ をもては

$$\Phi = \begin{cases} \text{gr}^r(K_{2r-m-1}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}) \text{ の 像 } \subset \Psi & (m \neq 2r-1 \text{ の時}) \\ \Psi & (m = 2r-1 \text{ の時}) \end{cases}$$

となる.

なお Beilinson は Φ を 上の (3) で 定義 する 時, $m \neq 2r-1, 2r-2$ の 時

$$\Phi \otimes \mathbb{R} \cong (H_{\text{DR}}^m(X/\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}) / (F \mathcal{L}^r H_{\text{DR}}^m(X/\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R} + H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(2\pi\sqrt{-1})^r)^{\perp})$$

(Beilinson の chern class map に より) を 予想 した. 上の 予想 は この 予想 の Galois cohomology - 類似 である.

§5 予想

X を $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth scheme とし $m, r \in \mathbb{Z}$ $r \geq \frac{m+1}{2}$ を 固定 する. $L_S(H^m(X), r)$ について の 予想 を $r > \frac{m}{2} + 1$ の 場合 に 与える. 他の r について の 予想 は やや こし くなる ため 省く.

($r > \frac{m}{2} + 1$ は 絶対 収束 する 所 である. 関数 等式 $s \leftrightarrow m+1-s$ を 認め れば, 結局 $r = \frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{m}{2} + 1$ を 全く 省略 する こと になる.)

また $H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が torsion free と, (細かい 所 で 定義 を 簡単 に する ため) 仮定 する.

3 つ 組 (X, m, r) について, 群 $G(\mathbb{Q}_p)$ ($p \leq \infty$), $G(\mathbb{Q})$ を 定義 し, 五河 数 $\mu((\prod_{p \leq \infty} G(\mathbb{Q}_p)) / G(\mathbb{Q}))$ を 論じたい. (G は 単なる 記号で, 一般には 代数 群 など であらわしえない.) また $\mathcal{A}_{n, \mathbb{Q}}$ つま

り原点における tangent space, の役割をはたす $\mathbb{Q}$ -vector space は,

$$H_{\text{DR}}^m(X/\mathbb{Q}) / \text{Fil}^r H_{\text{DR}}^m(X/\mathbb{Q})$$

である. $D = H_{\text{DR}}^m(X/\mathbb{Q})$, $D^c = \text{Fil}^{c+r} H_{\text{DR}}^m(X/\mathbb{Q})$ とおくとこの space は D/D^0 と書ける. 各 $p \leq \infty$ について, $D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p$ の原点の近傍で exponential map

$$\exp : D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \dashrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

を定義する. すると

$$\omega : \bigwedge^{\max} (D/D^0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

は各 $p \leq \infty$ について $\bigwedge^{\max} ((D/D^0) \otimes \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$ を導き, $\mathbb{Q}_p$ の標準測度から $D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p$ 上の測度が導かれ, $\exp$ を通して $G(\mathbb{Q}_p)$ の測度 $\mu_{p,\omega}$ が導かれる. そして $\prod_{p \leq \infty} G(\mathbb{Q}_p)$ 上の積測度 $\prod_{p \leq \infty} \mu_{p,\omega}$ ($r > \frac{m}{2} + 1$ と仮定する. するとこの積は収束する) は ω のとり方によらなくなり, こうして五河測度が得られるという方針である. 諸定義の前に例をのべる.

例 1. $m=1$, $r=1$ なら X の Picard variety を P とすると,

$G(\mathbb{Q}_p) = P(\mathbb{Q}_p)$, $G(\mathbb{Q}) = P(\mathbb{Q})$, D/D^0 は P の原点での tangent space, $\exp : D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \dashrightarrow P(\mathbb{Q}_p)$ は通常の exponential map である. ($H_{\text{cr}}^1(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(1))$ は P の Tate 加群になる.)

例 2. $X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$, $m=0$, $r \geq 2$ とすると.

$$p < \infty \text{ に対し } G(\mathbb{Q}_p) = H^1(\mathbb{Q}_p, \hat{\mathbb{Z}}(r))$$

$$G(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}/(2\pi)^r \mathbb{Z} & (r: \text{even}) \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (r: \text{odd}) \end{cases}$$

$$G(\mathbb{Q}) = \begin{cases} H^0(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) & (r: \text{even}) \\ H^1(\mathbb{Q}, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \text{ の元で, } \otimes \mathbb{Q} \text{ すると } K_{2r-1}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} \\ \text{の像に } \lambda \text{ するもの全体} & (r: \text{odd}) \end{cases}$$

$$D/D^0 = \mathbb{Q}$$

となる。

定理 $X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$, $m=0$, $r \geq 2$ の時, $p < \infty$ に対し

$$\exp: \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, \hat{\mathbb{Z}}(r)) \otimes \mathbb{Q} = H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(r))$$

による 1 のゆきまは Coates-Wiles homomorphism の

$$(1-p^{-r}) \frac{1}{(r-1)!} \text{ 倍である}$$

こゝに Coates-Wiles homomorphism は局所体論で重要な標準準同型 $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^{\text{ab}}/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})) \rightarrow \mathbb{Q}_p(r)$ ($\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$)

こゝに ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根, $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^{\text{ab}}$ は $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ の最大アベール拡大, である。Coates-Wiles hom は

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)}(\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})^{\text{ab}}/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})), \mathbb{Q}_p(r)) \\ &= H^0(\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p), H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}), \mathbb{Q}_p(r))) \\ &\cong H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(r)) \quad \text{により } H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(r)) \text{ の元と見られる。} \end{aligned}$$

この定理と Coates-Wiles homomorphism について知られている

事柄を使って次を得る。

定理 X, m, r を上の定理のとおりとすると $p < \infty$ に対し

$\exp: \mathbb{Q}_p \dashrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ によって測られた $G(\mathbb{Q}_p)$ の全測度は

$$(1-p^{-r}) \left((r-1)! \text{の } p \text{ 中成分} \right)^{-1} \# H^0(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-r))$$

となる.

このように局所的な群の測度が計算されることにより,
Mazur-Wiles の岩沢 main conjecture の解決に帰着して, リーマンゼータ
に関しては次の定理が示せる

定理 下で述べる 予想 (本稿の主予想) は $X = \text{Spec}(\mathbb{Q})$,

$m=0$, $r \geq 2$ r : 偶数 なら正しい. 同じく r : 奇数でも

もし Beilinson の $K_{2r-1}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}$ 内の cyclotomic element から chern class map

$H^1(\mathbb{Q}, \hat{\mathbb{Z}}(r))$ 内の Deligne-Soulé の cyclotomic element に移される

なら 予想 は正しい.

ここでは上の "cyclotomic elements" の定義は省略する.

以下 $G(\mathbb{Q}_p)$ と exponential map を定義し, 予想 を述べる.

$p < \infty$ については $G(\mathbb{Q}_p)$ の極大 compact 群 $G(\mathbb{Z}_p)$ の方が定義し
やすいのでそちらを先に述べる.

$$p < \infty \text{ に対し } G(\mathbb{Z}_p) =_{\text{def}} H_{\text{f}}^1(\mathbb{Q}_p, H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r))) \quad (\S 4 \text{ 参照})$$

なお, $H_{\text{f}}^1(\mathbb{Q}_p, H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r)))$ は, $G(\mathbb{Q}_p)$ の profinite completion になる.

$$G(\mathbb{R}) = (D \otimes \mathbb{C} / (D^0 \otimes \mathbb{C} + H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2\pi\sqrt{-1})^r)))^+$$

($+$ は $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -不変部分) とおく.

$$\exp: D/D^0 \otimes \mathbb{R} \rightarrow G(\mathbb{R}) \quad \text{は自然なもの}$$

$$\exp: D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \twoheadrightarrow G(\mathbb{Z}_p) \quad \text{は,}$$

完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow B_{\text{crys}}^{f=1} \oplus B_{\text{DR}}^0 \rightarrow B_{\text{DR}} \rightarrow 0$$

$$(x, y) \mapsto x - y$$

$$(B_{\text{crys}}^{f=1} = \{a \in B_{\text{crys}}; f(a) = a\}) \text{ 上, } H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes \mathbb{L},$$

Galois cohomology をとって得る boundary map

$$H^0(\mathbb{Q}_p, H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes B_{\text{DR}}) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(r)))$$

$$\parallel$$

$$DR(H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(r)))$$

である。(我々は de Rham conjecture の成立を仮定する。したがって

$DR(H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(r))) = D \otimes \mathbb{Q}_p$, 上の boundary map は

$DR^0(H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(r))) = D^0 \otimes \mathbb{Q}_p$ を零化するから, $D/D^0 \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow G(\mathbb{Z}_p)$ が得る。

定理 ω を固定すると, ほとんどの p について $\mu_{p, \omega}(G(\mathbb{Z}_p)) = p_p(p^{-r})$.

次に Ψ, Φ を §4 のとおりとし, $T = H_{\text{et}}^m(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r))$,

$G(\mathbb{Q}) = H_g^1(\mathbb{Q}, T)$ の元で $H_g^1(\mathbb{Q}, T) \otimes \mathbb{Q} \wedge$ によって Ψ の像に入るもの

$G(\mathbb{Z}) = H_f^1(\mathbb{Q}, T)$ の元で $H_f^1(\mathbb{Q}, T) \otimes \mathbb{Q} \wedge$ によって Φ の像に入るもの

$G(\mathbb{Q}_p) = H_g^1(\mathbb{Q}_p, T)$ の元で $H_g^1(\mathbb{Q}_p, T)/H_f^1(\mathbb{Q}_p, T) \otimes \mathbb{Q} \wedge$ によって
($p < \infty$) Φ の像に入るもの

と置く。そして以下 $r > \frac{m}{2} + 1$ と仮定する。

$\text{Tam}_g = (\prod_{p \leq \infty} G(\mathbb{Q}_p))/G(\mathbb{Q})$ の五河 measure による volume

$\text{Tam}_f = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z}) \times \prod_{p < \infty} G(\mathbb{Z}_p)$ の五河 measure による volume

とおく. また $* = f, g$ に対し III_* (resp. III_*) を,

$$H^1(\mathbb{Q}, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / (H_*^1(\mathbb{Q}, T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\rightarrow \bigoplus_{p \leq \infty} H^1(\mathbb{Q}_p, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / (H_*^1(\mathbb{Q}_p, T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \text{ の核 (resp. 余核)}$$

($p = \infty$ では $H_*^1(\mathbb{Q}_p, T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は 0 であると約束する) と定義する.

§4 で述べた予想も仮定する. すると, III_* は有限,

III_* は各素数 p について p 成分が有限となる. III_* 全体も有限とすると,

$$\text{Tam}_g \cdot \frac{\#\text{III}_g}{\#\text{III}_g} = \text{Tam}_f \cdot \frac{\#\text{III}_f}{\#\text{III}_f}$$

である.

予想 上の両辺は 1 に等しい.

これは代数的トラスの玉河数についての小野の公式をまねたものである. §1 で (1.1) か (1.2) によって (1.3) の形に直せるように, p14 の定理によって, 予想 は (1.3) にあたる

特殊値の予想 (ω を fix, S は十分大).

$$\begin{aligned} L_S(H^m(X), r) &= \mu_\omega \left(\left(\prod_{p \in S} G(\mathbb{Q}_p) \right) / G(\mathbb{Q}) \right) \cdot \frac{\#\text{III}_g}{\#\text{III}_g} \\ &= \mu_\omega \left(G(\mathbb{R}) / G(\mathbb{Z}) \times \prod_{\substack{p \in S \\ p \neq \infty}} G(\mathbb{Z}_p) \right) \cdot \frac{\#\text{III}_f}{\#\text{III}_f} \end{aligned}$$

の形に書きかえられる.

[Fo] Fontaine, ".... représentations p -adiques" Ann. of Math. 115 (1982)

[FM] Fontaine-Messing "p-adic periods" Contemp. Math. 67 (1987)

[Hy] 兵頭治 "A note on p-adic étale cohomology" to appear in Inv. Math.