

Poisson-Boltzmann 方程式系の解の存在定理

阪市大工 鶴飼正二

第1 序

天体力学及びプラズマ物理の基礎方程式である衝突のない Boltzmann 方程式 (標題の方程式系及び Vlasov 方程式) に対する初期値問題の (主として) 大域解の存在について述べる。ここで大域解とは、時刻 $t=0$ で与えられた初期値から出発した解が途中 (有限時刻) で断切れることなく $t \rightarrow +\infty$ 迄存在しつづけている解のことである。有限時刻で爆発 (解自身又はその何階かの導関数等が無限大になること) するか、或いは有限時間の存在のかが証明される解を局所解と言う。解の存在定理を除くと、上記初期値問題の、漸近挙動その他、解のさらに詳しい性質に関する数学的研究は未だないようである。

考える初期値問題は、 $t \in [0, \infty)$ を時間変数、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を空間変数、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ を速度変数として、

$$(1.1) \begin{cases} f_t + \varepsilon \cdot \nabla_x f + \alpha \nabla_x \varphi \cdot \nabla_\xi f = 0 & , \quad (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \Delta_x \varphi = \beta \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, \xi) d\xi & , \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ f|_{t=0} = f_0 & , \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \nabla_x \varphi \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty) & , \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

ここで $f = f(t, x, \xi)$ は時刻 t に於ける, x -空間での質量密度,
 $\varphi = \varphi(t, x)$ は重力ポテンシアル, $f_0 = f_0(x, \xi)$ は f の初期値 (既知), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ は定数, ∇_x (∇_ξ) は x (ξ) に関する gradient operator,
 Δ_x は x に関する Laplacian, $\cdot$ は $\mathbb{R}^n$ に於ける内積を表す。

一次元 ($n=1$) の場合の大域解が Iordanskii [5] によって,
 $n=2$ の場合は [7] でその存在が示されている。いずれも古典
 解 (3.2 の定義 2.1 参照) である。 $n \geq 3$ に対しては, 一般の f_0 に対し
 てはその古典的な大域解の存在は未解決の問題である。しか
 し古典的な局所解の存在が [1], [6] で示され, ある種の弱い
 解 (古典的な弱い解, 定義 3.1 参照) が大域的に存在すること
 が Arsen'ev [2] によって証明された。最近 Batt [3] によって f_0
 が球対称でかつ ξ に関して support compact ならば (i.e. 有界集
 合の外で 0 となる), 同じ性質を持つ古典的な大域解が存在す
 ることが示された。[3] 以外の結果は Vlasov 方程式に對しても
 成り立ち, [3] の証明を Vlasov 方程式にあてはめることは出
 来ない。以下 [2] と [7] の結果を紹介する。

2.2 古典的解

m 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の (開) 集合 Ω 上で定義された l 回連続的
微分可能な関数の全体を $C^l(\Omega)$, そのうち l 階迄のすべての導
関数が Ω で有界なもの全体の全体を $B^l(\Omega)$, $B^l(\Omega)$ に属し, l 階導関数
が指数 $\sigma \in (0, 1]$ の Hölder 連続性を持つ関数の全体を $B^{l+\sigma}(\Omega)$ で表
わす。 $B^l(\Omega), B^{l+\sigma}(\Omega)$ は次のノルムで Banach 空間である。

$$(2.1) \quad \|u\|_{B^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)|, \quad \|u\|_{B^{l+\sigma}(\Omega)} = \|u\|_{B^l(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = l} \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\sigma},$$

$$\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m.$$

$L^p(\Omega)$ は Ω 上で p 乗可積分関数 (の同値類) の全体で, ノルムを

$$(2.2) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty; \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

とする Banach 空間である。

$T > 0$ とし $Q_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\Omega_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ とおく。 $C^{l_1, l_2}(\Omega_T)$
は Ω_T 上で t に関して l_1 回, $x \in \mathbb{R}^n$ に関して l_2 回連続的微分可能な関数
 $\varphi(t, x)$ の全体, $B^{\sigma_1, l+\sigma_2}(\Omega_T)$ は t に関して指数 σ_1 の Hölder 連続性を持
ち, x に関する l 階導関数が指数 σ_2 の Hölder 連続性を持つ φ
 $= \varphi(t, x) \in C^{0, l}(\Omega_T)$ の全体, とする。

定義 2.1. 次の条件 (2.3) (2.4) を満たす (f, φ) の組を (1.1) の古典的
な解と呼ぶ。

$$(2.3) \quad (i) \quad f = f(t, x, \xi) \in C^1(Q_T),$$

$$(ii) \quad f(t, x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}_\xi^n) \quad (\forall (t, x) \in \Omega_T),$$

$$(iii) \quad \varphi = \varphi(t, x) \in C^{0, 2}(\Omega_T).$$

(2.4) (f, φ) は (1.1) を $(t$ に關しては $[0, T])$ で満たす。

ここで $T < +\infty$ ならば (f, φ) は局所解, $T = +\infty$ と取れば "大域解" あり。(2.3) により (1.1) の各項が通常の (古典的な) 意味で well-defined となり, (2.4) が意味を持つことになる。古典的な解の存在定理を述べよう。詳しくは [7] を参照。

定理 2.2. $f_0 = f_0(x, \xi)$ n 次の条件を満たすとする。

(2.5) (i) $f_0 \in B^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,

(ii) $\exists \gamma > 2n, \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|)^\gamma (1+|\xi|)^\gamma f_0(x, \xi)| < +\infty$.

この時, $n=2$ ならば (1.1) は古典的な大域解 ($T = +\infty$) を, $n \geq 3$ ならば f_0 に関し依存する定数 $T_0 > 0$ が存在して (1.1) は古典的な局所解 ($T = T_0$) を持ち, さらにこれらの解は次の性質を持つ。

(2.6) (i) $f \in B^\delta(\Omega_T) \cap L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$,

$\varphi \in B^{\delta_1, 2+\delta_2}(\Omega_{T'})$, $(\forall T' < T)$,

(ii) $\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} = \|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}$, $(1 \leq p \leq +\infty, \forall t \in [0, T])$,

(iii) $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(t, x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq g(t) \leq \begin{cases} ae^{bt}, & n=2, \\ \frac{a}{(T_0-t)^{\frac{1}{n-2}}}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (\forall t \in [0, T]).$

ここで $\delta, \delta_1, \delta_2, a, b, T_0$ は f_0 のみに依存する定数である。

注意 2.3. $f_0(x, \xi) \geq 0$ ならば $f(t, x, \xi) \geq 0$ である。

注意 2.4. $n \geq 3$ の場合 (2.5) の下での大域的存在は未だ得られていないが, Poisson 方程式に次の修正を施せば, $n \geq 3$ でも 初期値問題 (1.1) の 古典的な解が大域的に構成できる。詳しくは [2], [7] 参照。

$$(2.7) \quad \Delta_x \varphi = \beta \int_{|\xi| \leq R} f(t, x, \xi) d\xi, \quad (R > 0), \quad ([7]),$$

又は

$$(2.8) \quad -\varepsilon (-\Delta_x)^m \varphi + \Delta_x \varphi = \beta \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, \xi) d\xi, \quad (\varepsilon > 0, 2m - n > 1) \quad ([2]).$$

ここで $R \rightarrow \infty$ 又は $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば元の (1.1) の解に (何らかの意味で) 収束すること が期待される (参照)。

定理 2.2 で得られた解の一意性については ([7]),

定理 2.5. f_0 が (2.5) の他に, 更に

$$(2.6) \quad (i) \quad \nabla_x f_0, \nabla_\xi f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

$$(ii) \quad \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} [(1+|\xi|)^{\frac{n}{2}} \{|\nabla_x f_0| + |\nabla_\xi f_0|\}] < +\infty,$$

を満せば, 次の条件を満す (f, φ) のクラスで, 定理 2.2 で得られた解が唯一の解である。

$$(2.7) \quad (i) \quad f \in B^0(Q_T) \cap C^1(Q_T),$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, \xi) d\xi \in B^5(\Omega_T) \cap B^5([0, T]; L^1(\mathbb{R}^n)),$$

$$(iii) \quad \nabla_x \varphi \in B^{0,1}(\Omega_T).$$

注意 2.6. 以上述べたことは, Vlasov 方程式に対する初期値問題に対してもそのまゝ (証明の修正を除けば) 成り立つ。

定理 2.2 の証明の概略を述べておく。有名な Schauder の不動点定理 [4] を用いる。注意 2.4 の場合も同じである。

定理 2.7 (Schauder) Banach 空間 X のコンパクト凸閉集合 S をそれ自身に写す連続写像 V は不動点 $u \in S$, $u = V[u]$, を持つ。

$y = g(t, x, \xi)$ が与えられたとすると, (1.1) の poisson の方程式 E , ξ の

右辺の f を g で置き代え ϕ 4 式の条件の下で解き、得られた ψ を用いて (1.1) の第 1 式を ϕ 3 式の初期条件で解き求める。
 g を f に対応する写像 $S \in V$ とし、 $X = B^0(Q_T)$, $S \in V$ の条件を
 満たす f の集合とする。

$$(2.8) \quad (i) f \in B^0(Q_T) \cap L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)),$$

$$(ii) \|f\|_{B^0(Q_T)} \leq M_1,$$

$$(iii) \|(1+|x|)^{\frac{\alpha}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{\beta}{2}} f\|_{B^0(Q_T)} \leq M_2,$$

$$(iv) \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \leq M_3,$$

$$(v) \sup_x \|f(t, x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq S(t).$$

ここで δ, T, M_1, M_2, M_3 を f_0 に依存して適当に定め、 (X, S, V)
 が定理 2.7 の条件をすべて満たすように出来る [7]。

3.3 弱い解

定義 3.1. 次の条件 (3.1) (3.2) を満たす (f, ψ) を (1.1) の弱い解と呼ぶ。

$$(3.1) \quad (i) f \in L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)),$$

$$(ii) \nabla \psi \in L^p(Q_T) \quad (1 \leq p \leq +\infty),$$

$$(3.2) \quad \text{任意の } \psi \in C_0^\infty(Q_T), \chi \in C_0^\infty(Q_T) \text{ に対して,}$$

$$(i) \int_{Q_T} f(t, x, \xi) \{ \psi_t + \xi \cdot \nabla_x \psi + \alpha \nabla_x \psi \cdot \nabla_\xi \psi \} dt dx d\xi = - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_0(x, \xi) \psi(0, x, \xi) dx d\xi,$$

$$(ii) \int_{Q_T} \nabla_x \psi \cdot \nabla_x \chi dt dx = -\beta \int_{Q_T} f(t, x, \xi) \chi(t, x) dt dx d\xi$$

が成り立つ。ここで $C_0^\infty(Q)$ は support compact な $\bigcap_{l=0}^\infty C^l(Q)$ に属す

関数の全体を表わす。

(f, φ) が (3.1) を満たせば (3.2) は well-defined となる。 (3.2) は形式的には (1.1) の Ψ 、 $\Psi =$ 式に夫々 Ψ, χ を乗じ部分積分によって得られたものである。

注意 3.2. 弱い解の定義は上のものが唯一ではない。

定義 3.1 の意味の弱い解の大域的存在については Arsen'ev の結果を述べよう。[2]。

定理 3.3. f_0 が (2.5) を満たし、 $\alpha/\beta < 0$ ならば (1.1) は大域的な弱い解を持つ。

注意 3.4. [2] では (2.5) より強い条件が f_0 に課されている。

[2] では, Poisson 方程式を (2.8) で置き代えた (1.1) の古典的な大域解 $(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ とし定理 3.3 を得ている。即ち

定理 3.5. 定理 3.3 の条件の下で, $(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ は $\varepsilon \rightarrow 0+$ の時次の意味で収束する。 $\varepsilon > 0, p \in [1, \infty)$ を任意とし,

$$(3.3) \quad (i) \quad f_\varepsilon \rightarrow f \text{ weakly in } L^p(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v^n) \text{ uniformly in } t \in [0, T],$$

$$(ii) \quad \nabla_x \varphi_\varepsilon \rightarrow \nabla_x \varphi \text{ strongly in } L^p(\Omega) \text{ uniformly in } t \in [0, T], \quad (\forall \Omega \subset \mathbb{R}_x^n \text{ 有界}).$$

更に極限 (f, φ) は (1.1) の弱い解である。

注意 3.6. この証明からは定理 3.3 の弱い解の一貫性は従わない。

参考文献

- [1] Arsen'ev A.A., Local uniqueness and existence of a classical solutions of Vlasov's system of equations. Soviet Math. Dokl. 15, 1223-1225 (1974).

- [2] Arsen'ev A.A., Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations. *Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz.* 15, 136-147 (1975)
- [3] Batt J., Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics, *J. Differential Equations*, 25, 342-364 (1977)
- [4] Courant, R. Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics*, vol II, Interscience 1962.
- [5] Iordanskii S.V., The Cauchy problem for the kinetic equation of plasma, *Amer. Math. Soc. Transl. series 2*, 35, 351-363 (1964).
- [6] Kurth R., Das Anfangswertproblem der Stelldynamik, *Z. Astrophysik*, 30 213-229 (1952).
- [7] Ukai S. Okabe T., On classical solutions in the large in time of Two-dimensional Vlasov's equation, To appear on *Osaka J. Math.*