

無限直積測度の絶対連続性に関連する積分不等式

東北学院大学教養学部 渡利 千波 (Chinami WATARI)

1988 年の実解析セミナーで、次の問題が佐藤坦氏によって提出された。この問題の確率論的な意義（それが本稿の表題の理由である）は引用文献 [2] およびこの稿の直前に所載の佐藤氏の報告を見られたい。

問題 $f \in C^1 \cap L^1(-\infty, \infty)$, $f' \in AC$, $f'^2/f \in L^1(-\infty, \infty)$, $f > 0$ a. e. (dx) とする。この仮定から $f'^2/f \in L^1(-\infty, \infty)$ が結論できるか。

§ 1. 問題の解決

佐藤氏[3]は「 f が ∞ の近傍で単調である」という付帯条件のもとでこの問題を肯定的に解かれたが、次の定理は、この問題を付帯条件なしに解決する。

定理 1. 問題の条件の下で

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f'^2/f) dx \leq (3/2) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (f'^2/f) dx \right\}^{1/2}.$$

証明の核心は、(有限と限らない)区間 (a, b) において成立する次の補題である。

補題 1. 閉区間 $[a, b]$ (無限区間を許す) 上で定義された非負関数 f が $f \in C^1$, $f' \in AC$, $f'(a) = f'(b) = 0$, $f(x) \neq 0$ ($a < x < b$), $f'^2/f \in L^1(a, b)$ をみたしているとする。このとき次の等式・不等式が成立する。

$$(1) \quad \int_a^b \frac{f'^4}{f^3} dx = \frac{3}{2} \int_a^b \frac{f'^2 f''}{f^2} dx,$$

$$(2) \quad \int_a^b \frac{f'^4}{f^3} dx \leq \frac{9}{4} \int_a^b \frac{f''^2}{f} dx,$$

証明 f は非負という仮定だけで、正であるとは仮定されていないが、区間 (a, b) の内部で 0 になることはない。(もし 2 点で 0 になれば、Rolle の定理からその中間に $f'(x) = 0$ となる点があるし、ただ 1 点で 0 になればその点で f は極小で、やはり $f'(x) = 0$ となり、仮定に反する。)

端点 a, b では f も 0 になる可能性があり、議論は若干微妙になるが、次のようにすれば、すべて正当化される。

- ① 自然数 n をとり、まず f 自身のかわりに $f_n(x) = (1/n) + f(x)$ で定義される関数 $f_n(x)$ を考える。 $f_n' = f'$, $f_n'' = f''$ であるし、 f_n は補題 1 のすべての条件をみたし、しかも $f_n(x) > 0$ である。
- ② 積分範囲を「少し」切り落として、コンパクト区間 $[c, d] \subset (a, b)$ を考える。この区間はすぐに現れるように、「十分大きく」定める。さて、区間 (a, b) の内部では f' の除算も自由に行なうことができるから、 $[(1/f')]' = -f''/f'^2$ に注意して、

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{f'^2 f''}{f_n^2} dx &= \int_c^d \frac{f''}{f'^2} \cdot \frac{f'^4}{f_n^2} dx \quad \text{から部分積分で} \\ &= \left[-\frac{1}{f'} \cdot \frac{f'^4}{f_n^2} \right]_c^d + \int_c^d \frac{1}{f'} \cdot \left(\frac{f'^4}{f_n^2} \right)' dx \\ &= 4 \int_c^d \frac{f'^2 f''}{f_n^2} dx - 2 \int_c^d \frac{f'^4}{f_n^3} dx \end{aligned}$$

を見て、移項して整理すれば

$$(*) \quad \int_c^d \frac{f'^4}{f_n^3} dx = \frac{3}{2} \int_c^d \frac{f'^2 f''}{f_n^2} dx + \frac{1}{2} \left[\frac{f'^3}{f_n^2} \right]_c^d$$

が得られる。ここで左辺の積分値は正であり、右辺第 2 項は $[c, d]$ を十分大きく $[(a, b)$ に近く] とっておけば、絶対値においてたとえば左辺の積分値の $1/4$ をこえないと考えてよい。したがって $(*)$ から

$$(**) \quad \int_c^d \frac{f'^4}{f_n^3} dx \leq 2 \int_c^d \frac{f'^2 f''}{f_n^2} dx$$

が成立し、Schwarz の不等式で上式の右辺は

$$2 \left\{ \int_c^d \frac{f'^4}{f_n^3} dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_c^d \frac{f''^2}{f_n} dx \right\}^{1/2}$$

をこえないから、 $(*)$ の左辺の積分は $c \downarrow a, d \uparrow b$ とするとき有限確定値に収束する。つまり、 $(*)$ において $c \downarrow a, d \uparrow b$ とすることが許されて、 f のかわりに f_n とした形で (1) が成立する。自然数 n は任意に大きくとっておけるから、左辺で単調収束定理、右辺で優収束定理を適用しながら $n \rightarrow \infty$ とすると、(1) の成立することがわかる。

(2) は (1) を用いて

$$\int_a^b \frac{f'^4}{f^3} dx = \frac{3}{2} \int_a^b \frac{f'^2}{f^{3/2}} \cdot \frac{f''}{f^{1/2}} dx$$

の右辺に Schwarz の不等式を適用し、簡約・平方 で得られる。

補題 2. さらに $f \in L^1(a, b)$ であれば

$$(3) \quad \int_a^b \frac{f'^2}{f} dx \leq \frac{3}{2} \left\{ \int_a^b f dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b \frac{f''^2}{f} dx \right\}^{1/2}.$$

証明 $\int_a^b \frac{f'^2}{f} dx = \int_a^b f^{1/2} \cdot \frac{f'^2}{f^{3/2}} dx$ に Schwarz の不等式と

補題 1. (2) を用いればよい。 (以上)

定理の証明を完結するには、開集合 $\{x; f'(x) \neq 0\}$ を 开区間 (a, b) の和として表しておいて、各 (a, b) 上での積分 (3) を、補題 2. を利用して評価し、加え合わせる。因数 $(3/2)$ を別にすれば、積分の平方根の積を加え合わせることになるが、級数論の (Cauchy-)Schwarz の不等式で自然に処理される。

§ 2. 若干の拡張 (その 1)

f'^{p+2}/f^{p+1} の積分を $f'^p f''/f^p$ ($p > -1$, $p \neq 0$) の積分で表示する等式が成立する。その際の「比例定数」は $(p+1)/p$ である。証明のためには、補題 1. (1) に相当するものを部分積分で証明すればよい。 $f \neq 0$ と仮定しても一般性を失わないこと、 f' での除算ができること、等は補題 1. の証明と同じである。

f'^{p+1}/f^p の可積分性は p が大きいほど強い性質である。このことは直接に (Holder の不等式で) 検証することができる。実際、 $0 < r < s$ のとき、 $(s+1)/(r+1)$ と $(s+1)/(s-r)$ が一組の共役指数であるから、 $r = \{s(r+1)/(s+1)\} - (s-r)/(s+1)$ に注意して、この共役指数について Holder の不等式を適用すればよい。したがって次の定理は定理 1 の拡張であると同時に、精密化にもなっている。

定理 2. $p > 0$, $f \in C^1 \cap L^1(-\infty, \infty)$, $f' \in AC$, $f'^{p+1}/f^p \in L^1(-\infty, \infty)$, $f > 0$ a.e. (dx) とすると $f'^{2p+2}/f^{2p+1} \in L^1(-\infty, \infty)$ である。

証明 補題 1. に相当するものを $f'^{2p} \cdot f''/f^{2p}$ から出発して作り、 f の可積分性と Holder の不等式とを利用する。その際、自明な等式

$$2p = \{p/(p+1)\}(2p+1) + p/(p+1)$$

に注意せよ。この結果が「ほとんど最良」であることは、次の例でわかる。

例.
$$g(x) = \begin{cases} (1-x^2)^\alpha & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \quad \text{から}$$

$$f(x) = \sum c_k g(|x-2k|)$$

(和は $-\infty < k < \infty$ でとり、 $\{c_k\}$ は正規化定数列: $c_k > 0$, $\|f\|_1 = 1$)

を作る。 $r > 2p+1$ に対して α を $2p+1 < \alpha < r$ と採れば、

$|f'|^{p+1}/f^p \in L^1(-\infty, \infty)$ かつ $|f'|^{r+1}/f^r \notin L^1(-\infty, \infty)$ である。

実際、区間 $[0, 1]$ (特に $x = 1$ の近傍) での可積分性 (右辺)・積分不能性 (左辺) が容易に検証できる。全区間に拡張するには単に繋ぎ合わせればよい。

この例を修正して、 α を $3 < \alpha < 4$ となるように採れば、

「定理 1. は成立するが ∞ の近傍で単調でない f 」の例も得られる。

§ 3. 若干の拡張 (その 2) (古田孝之氏 [1] による)

補題 1. の段階では f の可積分性は要求されていない。補題 1. と f の可積分性を組み合わせて 補題 2. ひいては 定理 1. が証明されたのであった。 f の可積分性のかわりに、 f の 2 乗可積分性を仮定して (補題 1. ないしそれを修正したもの) と組み合わせると、一連の積分不等式が得られる。たとえば、

定理 3. $f \in C^1 \cap L^2(-\infty, \infty)$, $f' \in AC$, $f'^2/f \in L^1(-\infty, \infty)$, $f > 0$ a. e. とする。このとき $f'^2/\sqrt{f} \in L^1(-\infty, \infty)$ 。

証明 補題 1. から $f'^4/f^3 \in L^1(-\infty, \infty)$ だから、 $f \in L^2(-\infty, \infty)$ と組み合わせて Schwarz の不等式を用いればよい。

最後に、関連した 1 つの結果 (佐藤 坦氏による) を紹介しておこう。

定理 4. $f'^2/f \in L^1(-\infty, \infty)$ であれば、 f'^2/f の積分と $(\sqrt{f})'$ の積分とは「ほぼ同じ大きさ」である。つまり、一方は他方の定数倍を超えない。

注意. $(\sqrt{f})'$ が 2 乗可積分ということから f'^4/f^3 の可積分性は出ない (前出の例で $\alpha = 2$ とせよ)。その条件から f'^2/f が自動的に可積分になるか否かは、目下のところわかっていない。

文献

[1] 古田孝之 private communication, March 1991.

[2] K. Kitada and H. Sato :

On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution, Prob. Theory and Related Fields, 81(1989), 607-627.

[3] 佐藤 坦 $\int (f'^2/f) < \infty \Rightarrow \int (f'^2/f) < \infty$?

実解析セミナー 1988, 44-48.