

$SU(2, 2)$ に付随する力学系

京大・工 岩井敏洋 Iwai, Toshihiro

解ける力学系の例として、古くから、幾何学的な、あるいは、変換群論的な研究がなされているのは、調和振動子とケプラー問題である。この講演では、ケプラー問題の拡張の一つである MIC-ケプラー問題を取り扱う。変換群論的には、MIC-Kepler 問題は $SU(2, 2)$ の作用に強く結びついている。この事実を利用して、MIC-Kepler 問題のエネルギー多様体、対称性群、等エネルギー軌道空間を論ずる。最後に、 $\mathbf{R}^4 - \{0\}$ で定義される Taub-NUT 計量とその拡張計量に付随する力学系を取り扱う。この計量に対する測地流は $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上のハミルトン系をなす。それを $U(1)$ 作用で簡約化してできる $T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\})$ 上の力学系は、ハミルトン関数が異なるにもかかわらず、MIC-ケプラー問題と同じ幾何学的構造をもつことを示す。

1 MIC-Kepler 問題の導入

MIC-kepler 問題 [1] は、 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ において、次の運動方程式で支配される力学系である。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\mathbf{B} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\mu^2}{2r^2}$$

ただし、 $r = |\mathbf{r}|$ で、 μ, k は実定数 ($k > 0$). $\mu = 0$ のときが普通の Kepler 問題である。この系には 2 つの保存ベクトル

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{J} - k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

が存在し、そのことから、解軌道が円錐曲線になることが結論できる。すなわち、 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{r} / r = \mu$ から、解軌道は円錐上にのっていることがわかり、また

$$\mathbf{N} = \mu \mathbf{A} + k \mathbf{J}$$

とおくとき、 $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = \mu(|\mathbf{J}|^2 - \mu^2)$ から、軌道は平面曲線をなすことがいえるから、結局解軌道は、円錐と平面との交線である円錐曲線であることがわかる。

ハミルトン力学系と考えて、MIC-Kepler 問題のエネルギー多様体は何か。エネルギー多様体上を流れるハミルトン流全体のなす軌道空間は何か。この問に答えるのに、2 つの keys がある。1 つは $\mathbf{R}^4 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$ が $U(1)$ バンドルであること。もう 1 つは、 $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 = \mathbf{C}^4$ への $SU(2, 2)$ の作用である。

2 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ の簡約化と MIC-Kepler 問題

$\pi : \mathbf{R}^4 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$ は構造群 $SO(2) \cong U(1)$ をもつ主バンドルである。 $U(1)$ の作用は行列

$$T(t) = \begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & R(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} \cos t/2 & -\sin t/2 \\ \sin t/2 & \cos t/2 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$x \mapsto T(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^4$$

で定義される。このとき、底空間 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ のデカルト座標を $(q_k), k = 1, 2, 3$ とすれば、射影は π は

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で与えられる。また、

$$r := \sqrt{\sum_{k=1}^3 q_k^2} = \sum_{j=1}^4 x_j^2$$

に注意。

$U(1)$ の作用を、symplectic 作用として、 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ に持ち上げて

$$(x, y) \mapsto (T(t)x, T(t)y), \quad (x, y) \in (\mathbf{R}^4 - \{0\}) \times \mathbf{R}^4$$

とし、これを用いて 標準的 symplectic 形式

$$d\theta = \sum_{j=1}^4 dy_j \wedge dx_j, \quad \theta = \sum_{j=1}^4 y_j dx_j$$

をもつ相空間 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ を簡約化する。 $U(1)$ に付随する運動量写像 $\Phi : T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}$ は

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(-x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_4 y_3 + x_3 y_4)$$

で与えられる。 $\mu \neq 0$ のとき、簡約化相空間 P_μ は

$$\pi_\mu : \Phi^{-1}(\mu) \longrightarrow P_\mu := \Phi^{-1}(\mu)/U(1)$$

で定義され、 $T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}) \cong (\mathbf{R}^3 - \{0\}) \times \mathbf{R}^3$ と同相になることが証明できる。実際、 $(q, p) \in (\mathbf{R}^3 - \{0\}) \times \mathbf{R}^3$ は前述の q と

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \Phi/r \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

で実現できる。今

$$\iota_\mu : \Phi^{-1}(\mu) \longrightarrow T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$$

を包含写像とすると、簡約化 symplectic 形式 σ_μ は簡約化相空間上で

$$\pi_\mu^* \sigma_\mu = \iota_\mu^* d\theta$$

により定義される。具体的には、

$$\sigma_\mu = \sum_{k=1}^3 dp_k \wedge dq_k - \frac{\mu}{r^3} (q_1 dq_2 \wedge dq_3 + \text{cyclic})$$

と書ける。この第2項は $B = -\mu \mathbf{r}/r^3$ に対応する。

MIC-Kepler 問題は symplectic 多様体 $(T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}), \sigma_\mu)$ 上で定義される力学系である。その Hamiltonian H_μ は $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上の Hamiltonian

$$H_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4r} \sum_{j=1}^4 y_j^2 \right) - \frac{k}{r} \quad (k > 0, \text{const.})$$

を簡約化 $H_c \circ \iota_\mu = H_\mu \circ \pi_\mu$ して得られる [2]。

$$H_\mu = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$$

この Hamiltonian に対し $i(X_{H_\mu})\sigma_\mu = -dH_\mu$ で Hamiltonian ベクトル場 X_{H_μ} を導けば、前節で与えた運動方程式が得られる。ただし、 $i(\cdot)$ は内部積 (縮約) を表す。

3 $SU(2, 2)$ に付随する運動量写像

$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ に複素変数を導入する。

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + ix_2 + x_3 + ix_4 \\ z_2 &= -x_1 - ix_2 + x_3 + ix_4 \\ z_3 &= y_1 + iy_2 + y_3 + iy_4 \\ z_4 &= -y_1 - iy_2 + y_3 + iy_4 \end{aligned}$$

さらに、変数変換を行って

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \right) \\ v &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

とする。このとき、 $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \cong \mathbf{C}^4$ 上の標準的 symplectic 形式は

$$d\theta = \frac{i}{2} \text{tr}(Gdw \wedge dw^*), \quad G = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$$

と書ける。これをみて、

$$\Theta = \frac{i}{2} \text{tr}(Gwdw^*)$$

を導入する。明らかに、 $d\Theta = d\theta$ 。また、 $U(1)$ 作用は

$$w \longmapsto e^{it/2} w$$

で表され、対応する運動量写像は

$$\Phi = \frac{1}{4}(|w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2)$$

と書ける。

$g \in SU(2, 2)$ は $g^* G g = I_4$, $\det g = 1$ をみたすから、 $SU(2, 2)$ は明らかに Θ を、したがって $d\Theta$ を不変に保つ。ただし、 I_4 は 4×4 の単位行列である。この $SU(2, 2)$ 作用に付随する運動量写像を求めるために、 $SU(2, 2)$ のリー代数 $su(2, 2)$ について触れておかねばならない。定義により、すべての $t \in \mathbf{R}$ に対し $\exp it\xi \in SU(2, 2)$ のとき、 $i\xi \in su(2, 2)$ である。さらに、 $i\xi, i\eta \in su(2, 2)$ に対して、

$$\gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \text{tr}(\xi^* \eta)$$

で内積を導入して、 $su(2, 2)$ とその双対空間 $su(2, 2)^*$ とを同一視する。また、 $\exp it\xi \in SU(2, 2)$ の無限小変換を $i\xi_P$ ($P = \mathbf{C}^4$) で表すと、 Θ に対して

$$\Theta(i\xi_P) = \frac{1}{2} \text{tr}((Gww^*)^* \xi)$$

を得る。これより、運動量写像 $K: \mathbf{C}^4 \longrightarrow su(2, 2)$ が

$$K(w) = Gww^* - \Phi I_4$$

の形にもとまる。 $\text{tr}(Gww^*) = 4\Phi$ に注意。

K は $SU(2, 2)$ に対して同変 (equivariant), $U(1)$ に対して不変である。

$$K(gw) = \text{Ad}_{g^{-1}} \cdot K(w), \quad K(e^{it/2}w) = K(w), \quad g \in SU(2, 2)$$

さらに、定義から、 Φ は $SU(2, 2)$ 不変である。

$\Phi^{-1}(\mu)$, $\mu \neq 0$ には $SU(2, 2)$ が推移的に作用することと、 K の $SU(2, 2)$ 同変性 とから、 $K(\Phi^{-1}(\mu))$ が $SU(2, 2)$ の余随伴軌道になることが証明できる。その軌道を、 $\mathcal{O}_{K(w_0)}$ と書く。すると

$$\widetilde{K}_\mu \circ \pi_\mu = K \circ \iota_\mu$$

により $\widetilde{K}_\mu$ が定義できる。

$$\begin{array}{ccc} T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) & \xleftarrow{\iota_\mu} & \Phi^{-1}(\mu) \\ & & \downarrow \pi_\mu \\ & & \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow K \circ \iota_\mu \\ \xrightarrow{\widetilde{K}_\mu} \end{array} \quad \mathcal{O}_{K(w_0)}$$

このとき、 $\widetilde{K}_\mu$ は微分同相であることが証明できる。さらに、 $\mathcal{O}_{K(w_0)}$ に KKS (Kirillov, Kostant, Souriau) 形式 ω を次式で定義する。

$$\omega_\nu(\xi_Q, \eta_Q) := -\frac{i}{2} \text{tr}(\nu^*[\xi, \eta]), \quad \nu \in \mathcal{O}_{K(w_0)}$$

ただし、 $i\xi_Q$ は $Q = su(2, 2)$ における無限小変換であり、

$$i\xi_Q(\nu) = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-it\xi)} \cdot \nu \right|_{t=0}$$

で定義される。このとき、 $(K \circ \iota_\mu)^* \omega = \iota_\mu^* d\theta$ より

$$\widetilde{K}_\mu^* \omega = \sigma_\mu$$

が証明でき、 $\widetilde{K}_\mu$ は symplectomorphic となる。

以後、上記の可換図式が基本になる。ここでは $\mu \neq 0$ としたが、 $\mu = 0$ の場合、すなわち普通の Kepler 問題の場合については Kummer の仕事 [3,4,5] がある。

4 MIC-Kepler 問題と対称性群

MIC-Kepler 問題のエネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ とその上に作用する対称性群を知るには、 $H_c \circ \iota_\mu = H_\mu \circ \pi_\mu$ にさかのぼって、 $H_c^{-1}(E)$ を知るのがよい。実際

$$H_\mu^{-1}(E) = H_c^{-1}(E) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1)$$

だからである。ここで、 $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ 上の関数

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 y_j^2 + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^4 x_j^2 \\ R_\lambda &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 y_j^2 - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^4 x_j^2 \\ F &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 y_j^2 \end{aligned}$$

を導入する。ただし、 $\lambda > 0$ はパラメータである。このとき、

$$\begin{aligned} 4r(H_c + \frac{\lambda^2}{8}) &= A_\lambda - 4k \\ 4r(H_c - \frac{\lambda^2}{8}) &= R_\lambda - 4k \\ 4rH_c &= F - 4k \end{aligned}$$

が成り立つ。 $r \neq 0$ であるから、この関係式から

$$H_c^{-1}(E) = \begin{cases} A_\lambda^{-1}(4k) & E = -\lambda^2/8 < 0 \\ R_\lambda^{-1}(4k) & E = \lambda^2/8 > 0 \\ F^{-1}(4k) & E = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、エネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ は

$$H_\mu^{-1}(E) = \begin{cases} A_\lambda^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) & E = -\lambda^2/8 < 0 \\ R_\lambda^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) & E = \lambda^2/8 > 0 \\ F^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) & E = 0 \end{cases}$$

で与えられる。これらの多様体は、位相的には E の符号だけに依存しているので、以下、 E の符号によって議論が分かれる。特に、 $\lambda = 1$ に固定しておく、 $E = 1/8, 0, -1/8$ 。

この節の残りの部分で、エネルギー多様体上に作用する対称性群を論ずる。ただし、ハミルトン流に由来する 1 パラメータ群は除いて考えたいので、まずハミルトン流についてみておく。 H_μ が H_c の簡約化であるという事実から、 H_μ のハミルトン流の性質が分かる。実際、 $H_c^{-1}(E)$, $E = -\lambda^2/8, \lambda^2/8, 0$ 上で

$$4rX_{H_c} = X_{A_\lambda}, X_{R_\lambda}, X_F$$

が成り立つから、時間発展のパラメータの取り替えで、 H_c のハミルトン流は、 A_λ, R_λ, F のそれと同じとみなしてよく、したがって、 H_μ のハミルトン流もそこからの射影で得ら

れる。それ故、 H_μ のハミルトン流は、エネルギー多様体上に、 $E < 0$, $E > 0$, $E = 0$ に応じて、 $U(1)$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ の作用をひきおこす。

さて、対称性群は、すでにみたエネルギー多様体の表示から分かるように、 $E < 0$, $E > 0$, $E = 0$ に応じて ($\lambda = 1$ として)、 A_1 と Φ , R_1 と Φ , F と Φ をそれぞれ不変に保たねばならない。したがって、対称性群はすべて $SU(2, 2)$ の部分群として得られる。それらを G_- , G_+ , G_0 とすれば、結果は以下の通りである。

(1) $E < 0$ のとき、

$$G_- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}; A, B \in SU(2) \right\} \\ \cong SU(2) \times SU(2)$$

(2) $E > 0$ のとき、

$$G_+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}; \begin{array}{l} A^*A - B^*B = I_2, \quad A^*B + B^*A = 0 \\ \det(A + iB) = 1 \end{array} \right\} \\ \cong SL(2, \mathbf{C})$$

(3) $E = 0$ のとき、

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A + 2B \end{pmatrix}; \begin{array}{l} A^*A - B^*B = I_2, \quad \det(A + B) = 1 \\ A^*A + B^*(A + 2B) = 0, \quad \text{tr}(A + B)^{-1}B = 0 \end{array} \right\} \\ \cong SU(2) \ltimes \mathbf{R}^3$$

定理 [6]: MIC-Kepler 問題の対称性群は、 $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$ に応じて、 $SU(2, 2)$ の部分群 $SU(2) \times SU(2)$, $SU(2) \ltimes \mathbf{R}^3$, $SL(2, \mathbf{C})$ で与えられ、それぞれのエネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ に推移的に作用する。より正確には、 $SU(2) \times SU(2)/\mathbf{Z}_2 \cong SO(4)$, $SU(2) \ltimes \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}_2 \cong E(3)$, $SL(2, \mathbf{C})/\mathbf{Z}_2 \cong SO_0(1, 3)$ が対称性群となる。

5 等エネルギー軌道空間

すでに述べたように、エネルギー多様体 $H_\mu^{-1}(E)$ の上にはハミルトン流 $T_t = \exp tX_{H_\mu}$ が 1 パラメータ群の作用を与えている。 $H_\mu^{-1}(E)$ 上のハミルトン流の全体のなす空間 $H_\mu^{-1}(E)/T_t$ を等エネルギー軌道空間と呼ぶ。すると、前節の結果から明らかに、

$$H_\mu^{-1}(E)/T_t = \begin{cases} A_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \times U(1) & E < 0 \\ R_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \times \mathbf{R} & E < 0 \\ F^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu)/U(1) \times \mathbf{R} & E = 0 \end{cases}$$

を得る。ここで、 (A_1, Φ) , (R_1, Φ) , (F, Φ) をそれぞれ $U(1) \times U(1)$, $U(1) \times \mathbf{R}$, $U(1) \times \mathbf{R}$ の運動量写像とみなせば、等エネルギー軌道空間は、それらの群の作用による $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ の簡約化相空間とみなせる。そして、それらはすべて対称性群の余随伴軌道として実現できることが、第3節の可換図式と同様の考えで証明できる。

(1) $E < 0$ のとき、 K^- を G_- に付随する運動量写像とすると、

$$\begin{array}{ccc} T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) & \xleftarrow{\iota_\mu^-} & A_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu) \\ & & \downarrow \pi_\mu^- \\ & & A_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu) / U(1) \times U(1) \\ & \xrightarrow{\tilde{K}_\mu^-} & \mathcal{O}^- \subset \mathcal{G}_- \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow K^- \circ \iota_\mu^- \end{array}$$

(2) $E > 0$ のとき、 K^+ を G_+ に付随する運動量写像とすると、

$$\begin{array}{ccc} T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) & \xleftarrow{\iota_\mu^+} & R_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu) \\ & & \downarrow \pi_\mu^+ \\ & & R_1^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu) / U(1) \times \mathbf{R} \\ & \xrightarrow{\tilde{K}_\mu^+} & \mathcal{O}^+ \subset \mathcal{G}_+ \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow K^+ \circ \iota_\mu^+ \end{array}$$

(3) $E = 0$ のとき、 K^0 を G_0 に付随する運動量写像とすると、

$$\begin{array}{ccc} T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) & \xleftarrow{\iota_\mu^0} & F^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu) \\ & & \downarrow \pi_\mu^0 \\ & & F^{-1}(4k) \cap \Phi^{-1}(\mu) / U(1) \times \mathbf{R} \\ & \xrightarrow{\tilde{K}_\mu^0} & \mathcal{O}^0 \subset \mathcal{G}_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow K^0 \circ \iota_\mu^0 \end{array}$$

ただし、 $\mathcal{G}_-$, $\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_0$ はそれぞれ G_- , G_+ , G_0 のリー代数を表す。このとき、 $\tilde{K}_\mu^-$, $\tilde{K}_\mu^+$, $\tilde{K}_\mu^0$ はいずれも symplectomorphic あることが証明できる。ただし、 $\mathcal{O}^-$, $\mathcal{O}^+$, $\mathcal{O}^0$ にはそれぞれ KKS 形式が定義されているものとする。

定理 [6]: 等エネルギー軌道多様体は、 $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$ に応じて、 $SU(2) \times SU(2)$, $SU(2) \ltimes \mathbf{R}^3$, $SL(2, \mathbf{C})$ の余随伴軌道として実現できる。

6 Taub-NUT 計量に付随する力学系

ここまで行ってきた MIC-Kepler 問題の議論をもっと広いクラスの力学系に対しても適用できる。ここでは、そのひとつの例として、Taub-NUT 計量に付随する力学系をとりあげる。 $\mathbf{R}^4 - \{0\}$ において

$$x_1 + ix_2 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi+\phi}{2}}, \quad x_3 + ix_4 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\phi}{2}}$$

により、座標系 (r, θ, ϕ, ψ) を導入する。ただし、 $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$. この座標系で

$$ds^2 = f(r)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) + g(r)(d\psi + \cos \theta d\phi)^2$$

で定義される計量を考える。この計量に対する測地流は $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上の力学系である。これを、第2節の方法で簡約化すると、 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu)$ 上の力学系で Hamiltonian

$$K_\mu = \frac{1}{2f(r)} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2g(r)}$$

をもつものが得られる。回転対称性から、角運動量

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

が保存量であることが容易に証明できる。MIC-Kepler 問題のときのように

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{J} - \kappa \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \kappa = \text{const. of motion}$$

の形の保存量が存在すること (κ を単なる定数でなく、運動の定数としているところに注意) を要請すると、 f, g, κ が次のように決まる [7]。

$$f(r) = \frac{a + br}{r}, \quad g(r) = \frac{(a + br)r}{1 + cr + dr^2}$$

$$\kappa = aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2}$$

ただし、 a, b, c, d は定数である。このように定められた $f(r), g(r)$ をもつ計量を拡張型 Taub-NUT 計量と呼ぶ。実際、 $4m = a/b$ のときには、定数倍をのぞいて、

$$f(r) = 1 + \frac{4m}{r}, \quad g(r) = \frac{(4m)^2}{1 + 4m/r}$$

をもつ Taub-NUT 計量に帰着するからである。Taub-NUT 計量に対しては、上記の $\mathbf{A}$ の形の保存量の存在することが知られていた [8,9]。

拡張型 Taub-NUT 計量に付随する力学系 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu, K_\mu)$ の Hamiltonian を具体的に書いておくと

$$K_\mu = \frac{r}{a + br} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} + \frac{c\mu^2}{2r} + \frac{d\mu^2}{2} \right)$$

特に、 $a = 0, b = 1, c\mu^2/2 = -k, d = 0$ とすると、MIC-Kepler 問題の Hamiltonian となる。

ここで、第1節と同様

$$\mathbf{N} = \mu \mathbf{A} + \kappa \mathbf{J}$$

とおくと、やはり、

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = \mu(|\mathbf{J}|^2 - \mu^2)$$

が成り立ち、 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ 内で運動方程式の解軌道は円錐曲線となる。

もし、

$$\kappa = aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2} = k > 0$$

をみたすように、保存量 $K_\mu = \text{const.}$ の値を選べば、 $\mathbf{J}, \mathbf{A}$ は MIC-Kepler 問題のものと一致する。したがって、解軌道も、パラメーターの取り方を除いて、MIC-Kepler 問題のものと一致する。さらに、Hamiltonian K_μ を書き直した式

$$bK_\mu - \frac{d\mu^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} - \left(aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2}\right) \frac{1}{r}$$

により、エネルギー多様体も

$$H_\mu = bK_\mu - d\mu^2/2 = E = \text{const.}$$

のものと一致する。こうして、拡張型 Taub-NUT 計量に付随する力学系 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu, K_\mu)$ は、エネルギー多様体、等エネルギー軌道空間について、MIC-ケプラー問題と同じ構造をもつことが分かる。特に、 $bK_\mu - d\mu^2/2$ の、負、正、零に応じて、解曲線は、楕円、双曲線、放物線となる。

参考文献

- [1] H.V. McIntosh and A. Cisneros, Degeneracy in the presence of a magnetic monopole, J. Math. Phys. **11**, 896-916 (1970).
- [2] T. Iwai and Y. Uwano, The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three-dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory, J. Math. Phys. **27**, 1523-1529 (1986).
- [3] M. Kummer, On the regularization of the Kepler problem, Commun. Math. Phys. **84**, 133-152 (1982).
- [4] M. Kummer, On the three-dimensional lunar problem and the perturbation problems of the Kepler problem, Math. Anal. Appl. **93**, 142-194 (1983).
- [5] M. Kummer, A group theoretical approach to a certain class of perturbations of the Kepler problem, Arch. Rat. Math. Anal. **91**, 55-82 (1985).
- [6] T. Iwai, A dynamical group $SU(2, 2)$ and its use in the MIC-Kepler problem, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 609-630 (1993).

- [7] T. Iwai and N. Katayama, On the extened Taub-NUT metrics, J. Geom. Phys. **12**, 55-75 (1993).
- [8] G.W. Gibbons and N.S. Manton, Classical and quantum dynamics of BPS monopoles, Nucl. Phys. B **274**, 183-224 (1986).
- [9] B. Cordani, Gy. Fehér and P.A. Horváthy, Kepler-type symmetries of long-range monopole interactions, J. Math. Phys. **31**, 202-211 (1989).