

力学量の長時間発展と量子カオス

九工大情報工 高橋公也

早大理工 首藤 啓

時間発展における量子古典対応を考えると、伏見関数と粗視化された古典系の分布関数は時間発展初期の段階で非常によい対応を示す。しかし、時間発展を続けると伏見関数は自分自身で量子干渉を起こし古典力学との対応は破綻する。量子干渉発生までの時間は、トーラス領域では $O(1/\hbar)$ 程度であり、カオス領域では古典的な流れの持つ指数関数的な不安定性の為に非常に短くなる。量子干渉発生後は、準安定な波束が生じ古典的な流れに沿って動き回る。トーラス領域ではこれらの波束は比較的安定で古典粒子のように動き回る。一方、カオス領域では短い時間の間は古典的な流れに沿って動くが流れの指数関数的な不安定性の為に引き延ばされて分裂したり別の波束と衝突融合したりする。この為カオス領域での伏見関数の時間発展はトーラス領域に比べて複雑になる。しかし、量子系は不確定性の為に古典カオスの持つ指数関数的な不安定性を持つことはできずせいぜい短い時間の間古典系を真似するだけである。カオス領域とトーラス領域の波束の時間発展の違いはどこからくるのだろうか？ 微妙な問題ではあるが、我々は量子系は安定性の中にも2つのクラスをもつと考えている。この問題の解決の糸口として力学量の時間発展を考えよう。力学量の期待値は波動関数の時間発展を統計的にはあるが反映し、量子干渉の為に一定値に収束せずに量子力学的にゆらぐ。ここでは、力学量の量子ゆらぎを $\hbar$ を変化させて調べてみる。

数値計算のモデルとして次のような周期外力の入った一自由度系を取り扱う。

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{a_1}{2} q^2 + \frac{a_2}{4} (1 + a_3 \sin \omega t) q^4 \quad (1)$$

$a_1 = 1.0$, $a_2 = 1.0$, $a_3 = 0.25$, $\omega = 0.7$ に選ぶと相空間はトーラスで埋まる。このときの初期状態として $\langle q \rangle = 1.5$, $\langle p \rangle = 0$ の極小波束を選ぶ。 $a_1 = -1.0$, $a_2 = 0.25$, $a_3 = 0.4$, $\omega = 0.7$ に選ぶと相空間には大きなカオス領域ができる。初期状態として $\langle q \rangle = 1.0$, $\langle p \rangle = 0$ の極小波束を選ぶ。

まず、トーラス領域の時間発展を考えよう。図1は、 $0 \leq t \leq 500T$ ($T = 2\pi/\omega$) における $\hbar = 0.08$ と $\hbar = 0.64$ の場合の力学量の期待値 $\langle q \rangle$ のパワースペクトルである。 $\hbar = 0.08$ のパワースペクトルは古典系のスペクトルのピークの回りにガウス分布状に広がっている。 $\hbar = 0.64$ のパワースペクトルは量子効果が大きくなりスペクトルのピークがばらけてきてはいるがガウス分布型のスペクトルのなごりがある。図2に、 $\hbar = 0.08$ と $\hbar = 0.64$ における $\langle q \rangle$ の値分布を示す。 $\hbar = 0.64$ では分布はほぼガウス分布になるが、 $\hbar = 0.08$ では中央に高いピークが現れる。これは、前回報告したように、 $\langle q \rangle$ の時間変化がある特徴的な周期ごとにうなりに似た振幅の変化を起こし、 $\langle q \rangle$ の振幅の絞り込みが起きていることを反映している。図3に、 $\hbar = 0.08$ と $\hbar = 0.64$ における $\langle q \rangle$ の相関関数を示す。

$\hbar=0.08$ では強い規則性があることが暗示される。また、 $\hbar=0.64$ でもある周期を持った振動が大きくなったり小さくなったりしてやはり規則性のあることを暗示する。実は、これらの相関関数の変化は $\langle q \rangle$ の生の時間変化とほぼ一致している。特に $\hbar=0.08$ ではその変化は完全に一致するといってよい。これらの結果は、トーラス領域の波束の時間発展には強い規則性が存在することを示している。その規則性は $\hbar$ を変化させることにより変わる。これは量子力学本来の規則性を古典的な規則性が強化していると考えることができる。従って、 $\hbar$ を小さくすると古典的な規則性が強くなり、全体としての規則性が強くなる。

次に、カオス領域の時間発展を考えよう。図4は、 $0 \leq t \leq 500T$ における $\hbar=0.08$ と $\hbar=0.64$ の場合の力学量の期待値 $\langle q \rangle$ のパワースペクトルである。図7に、 $0 \leq t \leq 5000$ における古典一粒子のパワースペクトルを示す。 $\hbar=0.08$ のパワースペクトルは、古典的なカオスのスペクトルに驚くほど似ていてたいへん複雑なスペクトルである。ただし、高い周波数のスペクトルは古典系の方が厚みがある。これは、古典カオスをもつ不確定性より細かな構造を反映していると考えられる。 $\hbar=0.64$ のパワースペクトルは、量子効果が大きくなりピークがばらけてきてはいるが依然としてかなり複雑なスペクトルになっている。図5は、 $\hbar=0.08$ と $\hbar=0.64$ の値分布を示している。両者とも、ほぼガウス分布に近い形になっているが $\hbar=0.64$ の方が分散が大きくなり量子ゆらぎが増している。これに対し、古典一粒子の分布(図8)はカオス領域全体に広がり量子系との対応を見いだすことができない。これは、量子波束が古典粒子よりも確率分布関数に対応していることから明かである。しかし、古典確率分布関数を考えたとしても力学量の期待値は $t \rightarrow \infty$ で一定値に収束する為に分散をもつことはなくうまく対応していない。図6は $\hbar=0.08$ と $\hbar=0.64$ の相関関数を示している。 $\hbar=0.08$ では相関関数は急激に小さくなり不規則に振動している。これは一粒子の古典系の相関関数(図9)の振舞いにかかなり似ている。 $\hbar=0.64$ では振幅はかなり大きくなるがやはり不規則に振動している。さらに、これらの相関関数はトーラス上とは異なり $\langle q \rangle$ の生の変化とは一致しない。これらの結果は、カオス領域の波束の時間発展にはかなりの不規則性があることを示している。 $\hbar$ が大きなときでも不規則性はかなり強く残っている。 $\hbar$ を小さくすると不規則性は強くなる。このときの不規則な挙動は量子干渉によって生じた波束が短い時間ではあるが古典的な粒子のように流れに従っていることで定性的な説明ができる。つまり、 $\hbar$ が小さいときの力学量の期待値の変化は短時間で生成消滅する古典多粒子の力学量の期待値で近似できそうである。ここでは、単純に生成消滅しない古典多粒子の時間発展を調べてみた。粒子の数は $\hbar=0.08$ のときの伏見関数の量子干渉によって生じた波束の数とほぼ同じ13個にした。図10はパワースペクトル、図11は値分布、図12は相関関数を示している。これらの様子は $\hbar=0.08$ のときのものとかかなりよい一致を示している。従って、 $\hbar$ が小さいときの量子干渉発生後の波束の統計的な性質は古典多粒子でかなりよく近似される。ただし、量子干渉の効果が強く出る高次の力学量の期待値では、この類似性は保証されない。

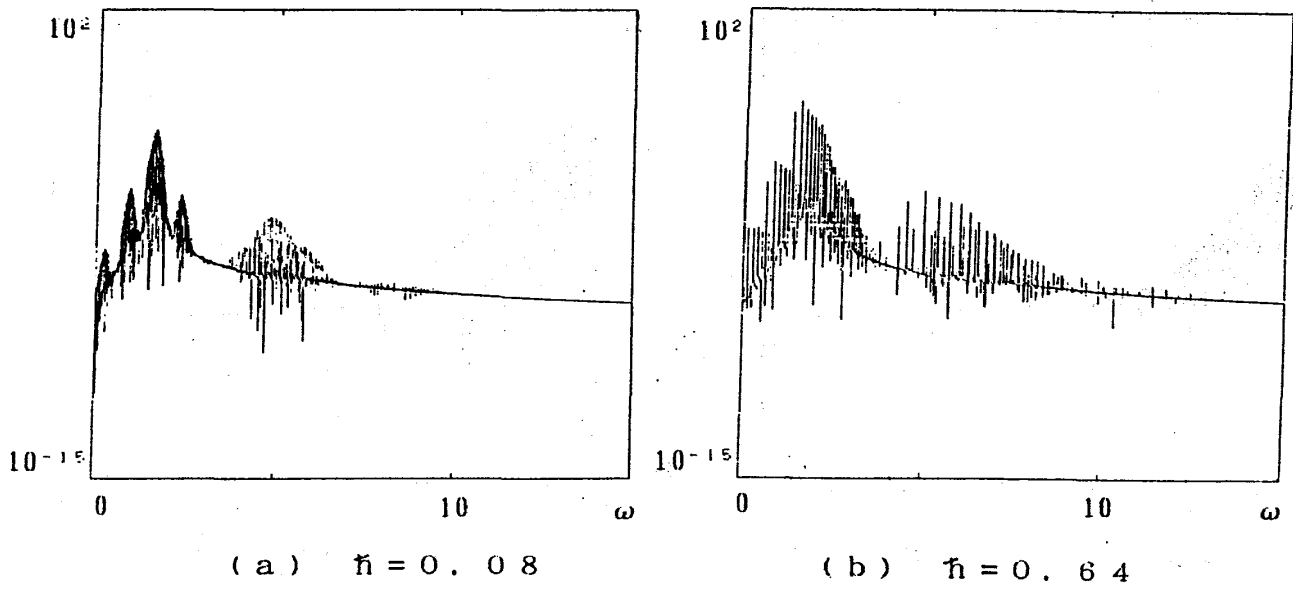


図1 パワースペクトル

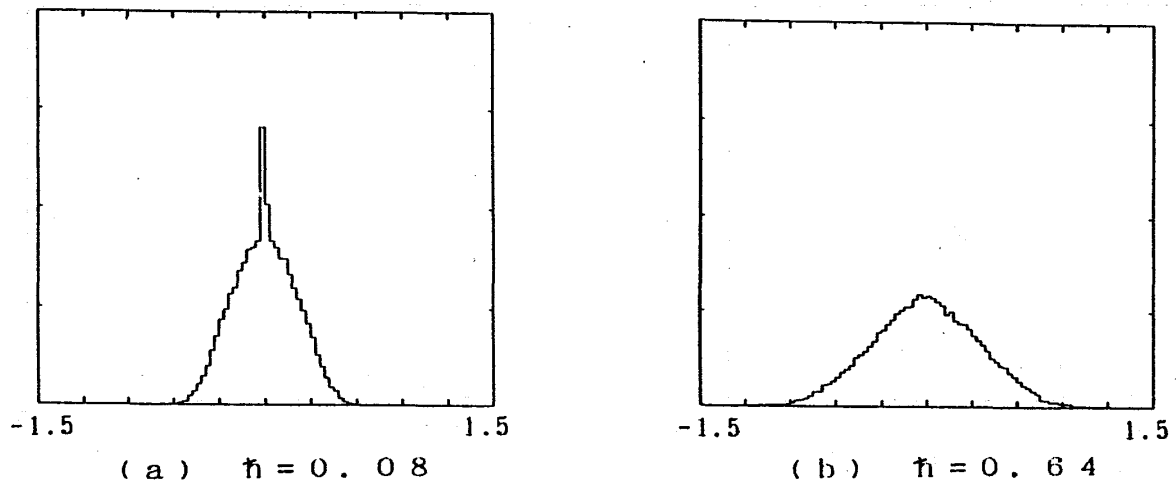


図2 値分布

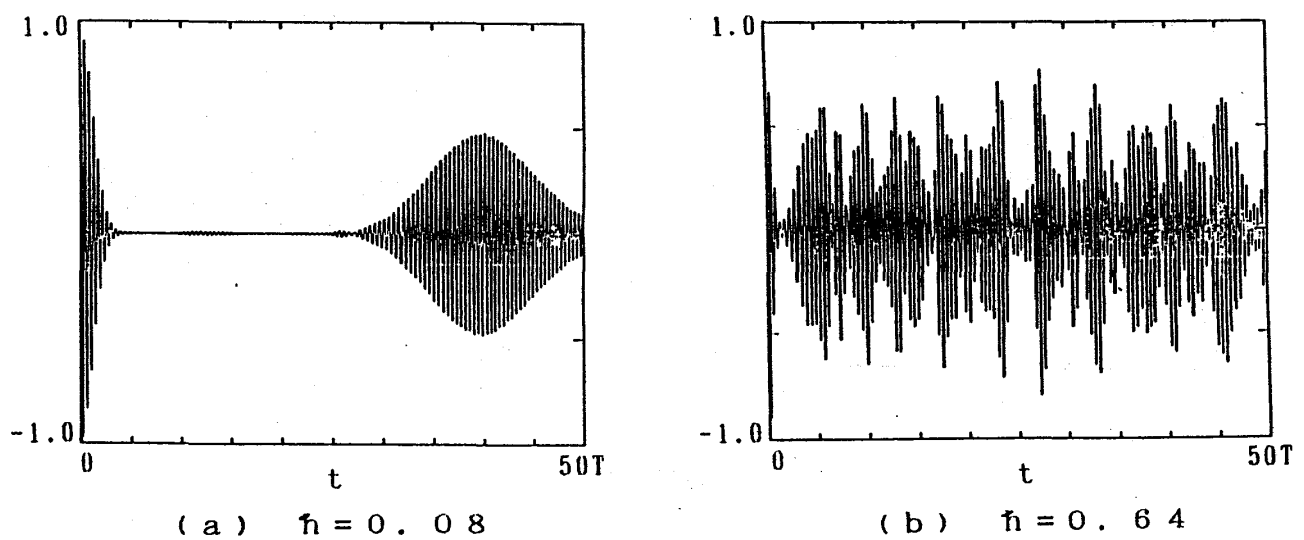
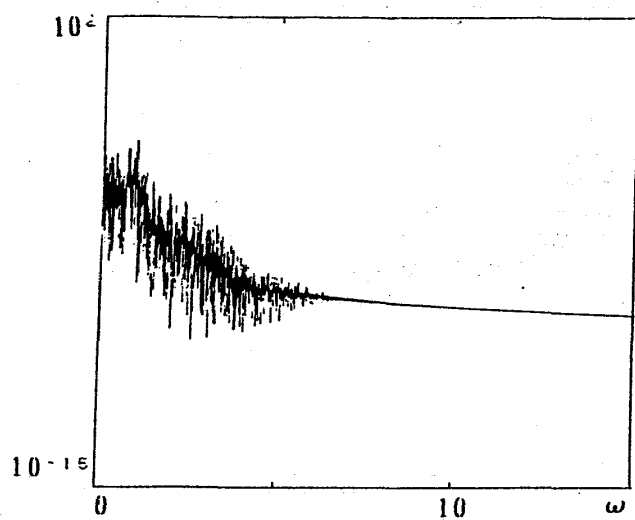
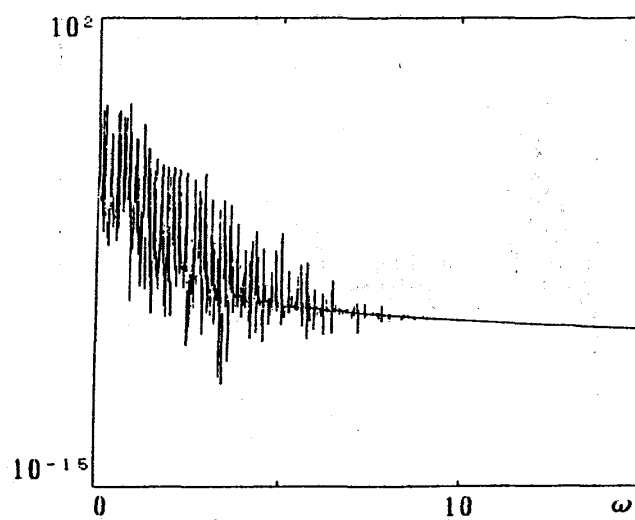


図3 相関関数

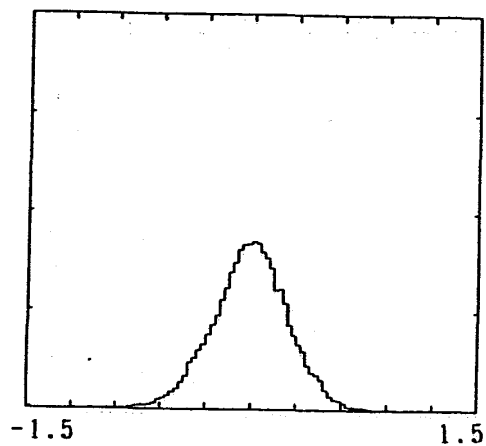


(a) $\hbar = 0.08$

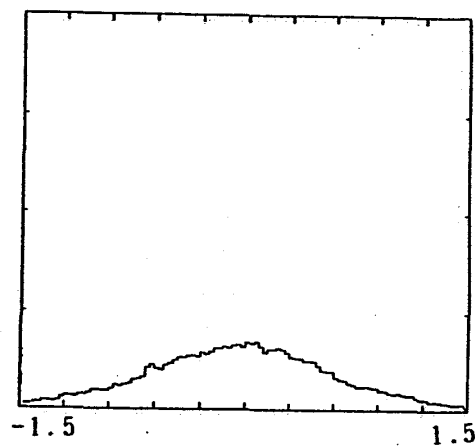


(b) $\hbar = 0.64$

図4 パワースペクトル

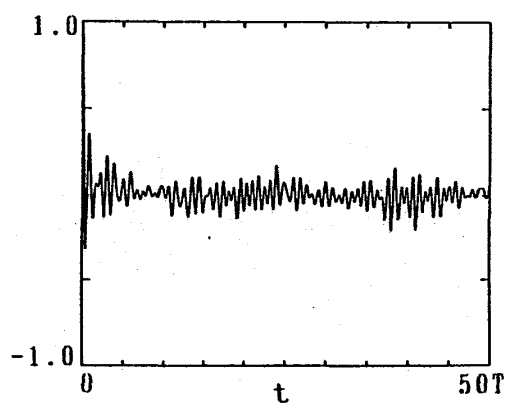


(a) $\hbar = 0.08$

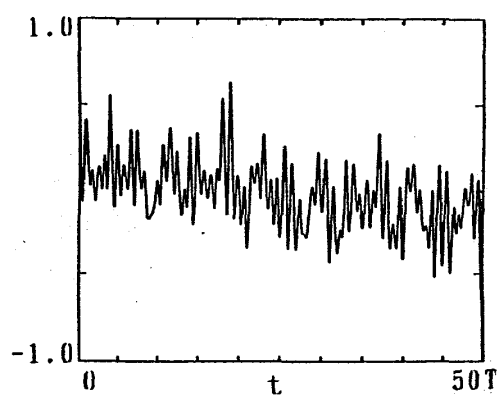


(b) $\hbar = 0.64$

図5 値分布



(a) $\hbar = 0.08$



(b) $\hbar = 0.64$

図6 相関関数

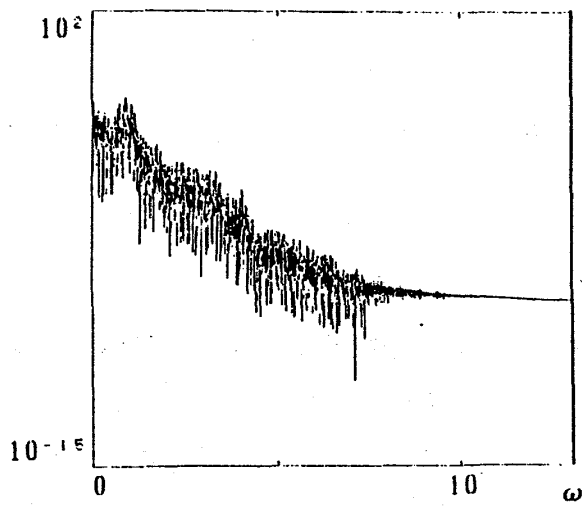


図 7 パワースペクトル

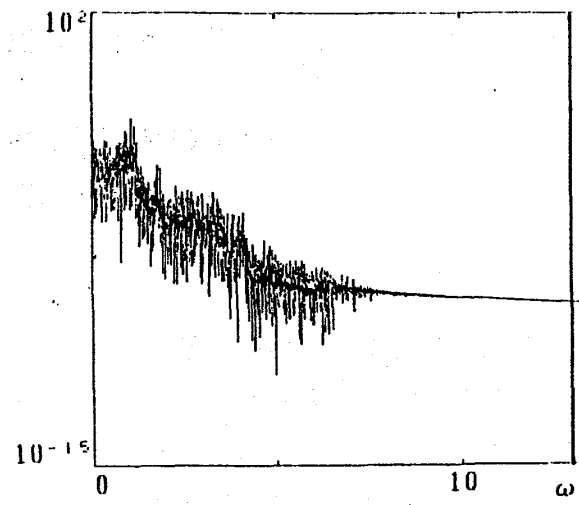


図 10 パワースペクトル

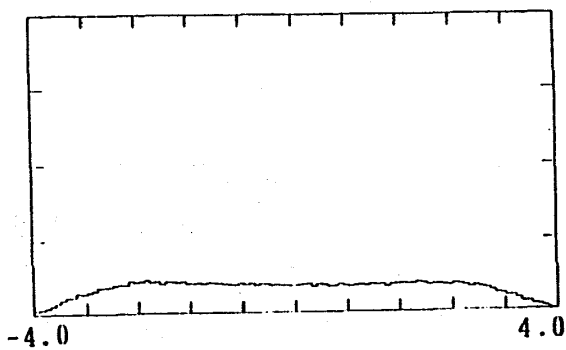


図 8 値分布

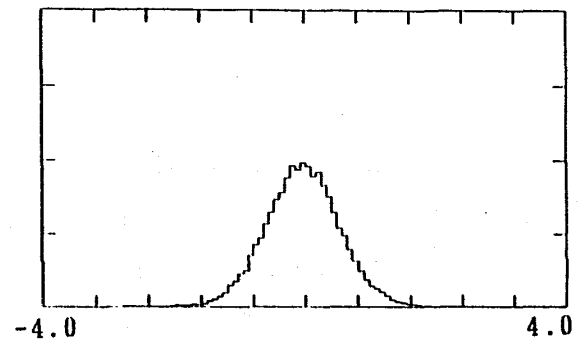


図 11 値分布

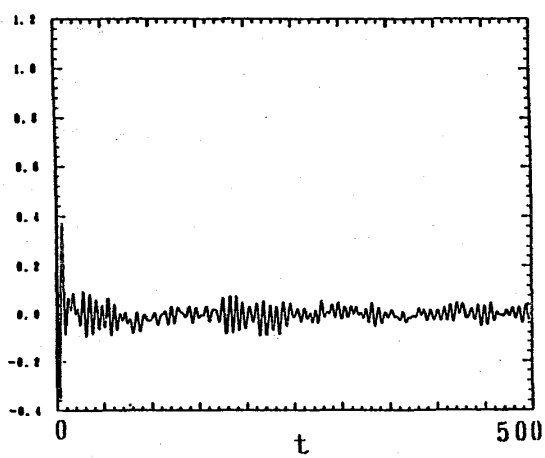


図 9 相関関数

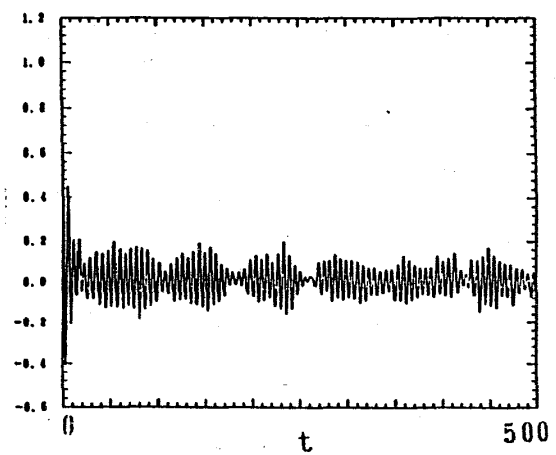


図 12 相関関数