

球面のある部分多様体について

東工大 理 阪本邦夫

本題の部分多様体について述べる前に, Berne [1] に従って, 調和多様体の定義と若干の事実を述べておきたい。

M を n 次元リーマン多様体, $x \in M$, $v \in T_x M - \{0\}$ とする。

$\gamma: t \mapsto \exp_x\left(\frac{t}{\|v\|}v\right)$ を弧長により媒介変数表示された測地線, $\{Y_i\}_{i=2, \dots, n}$ を γ に沿うヤコビ場で, $Y_i(0) = 0$, $Y_i'(0)$ は $\{v\}^\perp$ の正規直交基となるものとする。その時 $\theta: TM \rightarrow \mathbb{R}$ を $\theta(v) = \|v\|^{1-n} \det(Y_2(\|v\|), \dots, Y_n(\|v\|))$, $\theta(0) = 1$ により定義する。

定義. 各 $x \in M$ に対し, 正の数 $\varepsilon(x)$ と $\theta_x: [0, \varepsilon(x)) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\theta(v) = \theta_x(\|v\|)$, ($\|v\| < \varepsilon(x)$) が成立する時, M は *locally harmonic* と呼ばれる。特に M が完備で $\varepsilon(x) = \infty$ である時, M は *globally harmonic* と呼ばれる。

さらに, K を熱方程式の基本解, $\delta(x, y)$ を x と y の距離を表わすことにすれば,

(1)

定義. M がコンパクトで, 任意の $x, y \in M$ に対し,
 $K(x, y, t) = \Psi(\delta(x, y), t)$ を満たす $\Psi: [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する時, M は strongly harmonic と呼ばれる。

ところで, M が実解析的である時, locally harmonic であることと globally harmonic であることは同値であり, M がコンパクト単連結である時, globally harmonic であることと strongly harmonic であることは同値であることが知られている。さらに次の事実が Besse により示されている。すなわち, M が strongly harmonic である時, λ をラプラス作用素の固有値, V をその固有空間, $N = \dim V$, $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, N}$ を V の正規直交基とすれば, $F(\delta(x, y)) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ をみたす $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 写像 $f: M \rightarrow V$ ($f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))$) は埋入となる。 M の計量を適当に相似拡大してやれば, 次の定理を得る。

定理. (Besse [1]). $f(M)$ は V のある超球 S に含まれる。さらに $f: M \rightarrow S$ は極小的等長埋入であり, M の各測地線の f による像は S の曲線として曲率がすべて曲線にそって定数である。しかも, すべての2つの測地線は S 上で互いに合同である。

さて, 本題に移ろう。上に述べた定理は次の概念を導入してくれる。

M を n 次元, $\bar{M}$ を $(n+p)$ 次元リーマン多様体とし, $f: M \rightarrow \bar{M}$ を等長的埋入とする。

定義. M の各測地線 γ に対し, $\sigma = f \circ \gamma$ の曲率 $K_1, \dots, K_{d-1}$ は σ によって 0 ではない定数, $K_d \equiv 0$ であり, しかも d 及び $K_1, \dots, K_{d-1}$ は γ に依存しない時, f を helical immersion of order d という。

今後, $\bar{M}$ は $(n+p+1)$ 次元ユークリッド空間における単位超球 $S(1)$ とする。 $\iota: S(1) \hookrightarrow E^{n+p+1}$ を包含写像とする。

$f: M \rightarrow S(1)$ を helical immersion of order d としよう。
 $\sigma = f \circ \gamma$ のフレネー標構を計算することによって次の結果を得る。

命題. $d \leq p+1$.

命題. 埋入 f は isotropic である。

命題. f が極小的であれば, M はアインシュタイン空間である。

最後の結果は harmonic manifold がアインシュタイン空間であるという事実に対応している。さらに曲線 $\tau = \iota \circ f \circ \gamma$ の曲率, フレネー標構を調べれば, 次の結果を得る。

命題. $\iota \circ f: M \rightarrow E^{n+p+1}$ は d が偶数のとき order が d , d が奇数の時 order が $d+1$ の helical immersion である。

以後, d が偶数の場合のみ述べることにする (d が奇数の

場合もほぼ同様であらう) $x_0 \in M$ を任意に固定された点, $X \in T_{x_0}M$ を単位接ベクトルとする。 γ を $\gamma(0) = x_0$, $\dot{\gamma}(0) = X$ なる測地線とする。

さて, $\tau = \tau \circ f \circ \gamma$ の x_0 におけるフレネー標構 $\tau^{(i)}(x)$, ..., $\tau^{(d)}(x)$ は, その点における f の第二基本形式及びその高階共変微分によって表現される。これらを初期値とし, τ が満たすフレネーの微分方程式を解けば, 我々は次の命題を得る。

命題. x_0 を中心とする測地的極座標により f は次のように表現される。

$$f(t, x) = \tau(f(x_0)) + \sum_{k=1}^d f_k(t) \tau^{(k)}(x).$$

ここで, 関数 $f_k(t)$ は次のように定義されるものである。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & 0 \\ \lambda_1 & & & \\ & 0 & & -\lambda_{d-1} \\ & & \lambda_{d-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \text{ は } \tau \text{ の第 } i \text{ 曲率としたとき}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix} \text{ は } (e^{t\Lambda} - I) \Lambda^{-1} \text{ の第一列.}$$

この命題により次の定理が証明される。

定理. $f: M \rightarrow S(1)$ が極小的であれば, M は *locally harmonic* である。

この定理により, 上記 *harmonic manifold* についての事実を考慮をすれば, コンパクト調和多様体の研究は, ほぼ, $S(1)$

への極小的 helical immersion の研究と同等であるといえる。

参考文献

- [1] Arthur L. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed, Springer, 1978.
- [2] H. Nakagawa, On a certain minimal immersion of a Riemannian manifold into a sphere, preprint.
- [3] K. Sakamoto, Planar geodesic immersions, Tohoku Math. J., vol. 29, no. 1, 25-56, 1977.