

ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の 解の漸近公式について

早稲田大学 小池 茂昭

Shigeaki Koike

§0 序

次のハミルトン・ヤコビ・ベルマン(HJB)方程式の解 u^ε の $\varepsilon (>0)$ を 0 に近づけた時の挙動に関する結果を述べる。

$$(1) \quad \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k u_{x_i x_j}^\varepsilon + \lambda u^\varepsilon \right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = 1 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

但し、 ε と λ は正定数、 Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域、 Ω の境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。また、今後、和の記号は省略する。

HJB方程式(1)は、次の様な確率最適制御の問題から導かれる。まず、次の I_t 確率微分方程式を考える。

$$(2) \quad \begin{cases} dx_t^\varepsilon = \varepsilon C^{k_t}(x_t^\varepsilon) dW_t & t > 0 \\ x_0^\varepsilon = x \end{cases}$$

但し、 W_t は n 次元ブラウン運動であり $C^k(x) = (C_{ij}^k(x))$ は、 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に依存した n 次元正方行列である。次にコスト関数 $J(x, k)$ を定める。

$$J(x, k) = E[e^{-\lambda \tau_x^\varepsilon}]$$

但し、 $k = k_t$ は、値域を $\{1, 2, \dots, m\}$ とする。ブラウン運動を考えている確率空間上の progressively 可測過程であり、コ

コントロールと呼ぶことにする。 E は期待値、 τ_t^ε は (2) の解 x_t^ε の Ω からの脱出時間 $\inf\{t > 0 \mid x_t^\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$ とする。P.L. Lions [9] は、 $A_{ij}^\varepsilon(x) = C_{li}^\varepsilon(x) C_{lj}^\varepsilon(x)$ の時に、最適コスト関数 $U^\varepsilon(x) = \inf\{J(x, u) \mid u \text{ は、すべてのコントロール}\}$ が、(1) の解になる事を示した。

(1) の解の漸近挙動に関する研究について、知られている結果を簡単に述べておこう。まず、コントロールのない場合、つまり $m=1$ の時の研究は、Varadhan[12]によって、解析的な手法で次の漸近公式が得られた。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{-\varepsilon \log U^\varepsilon(x)\} = \sqrt{2\lambda} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

但し、 $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ は、 $(A_{ij})^{-1}$ から作られるリーマン距離の意味における境界からの距離である。又、収束は、 $x \in \bar{\Omega}$ に関して一様収束の意味である。さらに、Ventcel と Freidlin [13] は、同じ結果を確率論的手法で得ている。さらに、最近 Evans と Ishii によって、粘性解の方法を用いてより単純に同じ結果が得られている ([3] では、同様の方法で、(1) 以外の HJB 方程式の解の漸近公式も研究されている)。

今までの研究は、コントロールのない場合に限られていたが、コントロールのある場合 ($m \geq 2$) は、著者の知る限り Fleming と Souganidis [6] が、別の形の(放物型)HJB方程式に対して得た結果だけである。しかも、この研究は、低階の

項にコントロールがある場合のみ扱っており、二階微分の係数にコントロールが入る場合は、まだ研究されていないと考えられる。

§ 1 定理と証明

係数 a_{ij}^R に関して、次の仮定をする。

$$(3) \quad \begin{cases} a_{ij}^R \in C^2(\bar{\Omega}) & , \quad a_{ij}^R = a_{ji}^R \quad \text{in } \Omega \\ a_{ij}^R \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (\theta > 0) & \text{for } \forall \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

さらに次の様な記号を導入する。

$$\mathbb{K} \equiv \{k: [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} \mid k(\cdot): \text{可測}\}$$

$$\mathbb{A} \equiv \{\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \gamma(\cdot): \text{可測}\}$$

$$\Gamma \equiv \{\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{A} \mid k, \tilde{k} \in \mathbb{K} \text{ が } k(s) = \tilde{k}(s) \text{ a.e. } 0 \leq s \leq t \text{ ならば、} \alpha[k](s) = \alpha[\tilde{k}](s) \text{ a.e. } 0 \leq s \leq t\}$$

[定理] ([8])

(3) の仮定の下で、(1) の解 u^ε に対し、次の漸近公式が得られる。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{-\varepsilon \log u^\varepsilon(x)\} = v(x)$$

但し、収束は、 $x \in \bar{\Omega}$ に対して一様収束であり、 $v(x)$ は、次の様に与えられる。

$$\begin{aligned}
v(x) = \inf_{\alpha \in \Gamma} \sup_{k \in K} \left\{ \int_0^{\tau_x} \left(\frac{1}{2} a_{ij}^{k(t)}(x(t)) \alpha_i[k](t) \alpha_j[k](t) + \lambda \right) dt \right. \\
\left. \begin{aligned}
& \dot{x}_i(t) = a_{ij}^{k(t)}(x(t)) \alpha_j[k](t) \\
& x(0) = x
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

[注意]

(i) [4], [1], [11] によって、仮定(3)の下で、各 $\varepsilon > 0$ に対して、 $W^{2,p}(\Omega) \cap C^{2,\sigma}(\overline{\Omega})$ ($\exists \sigma > 0$) に属する解 u^ε は、唯一存在する。

(ii) 強最大値原理から、 $0 < u^\varepsilon \leq 1$ in $\overline{\Omega}$ が得られるので、漸近公式の左辺は、意味がある。

(iii) $(a^{k,i,j}) = (a_{ij}^k)^{-1}$, $N_k(x, v) = \{a^{k,i,j}(x) v_i v_j\}^{\frac{1}{2}}$, $N(x, v) = \max \{N_k(x, v) \mid k \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ とおく。さらに、境界からの距離 $d_k(x, \partial\Omega)$, $d^*(x, \partial\Omega)$ を次の様にとる。

$$\begin{aligned}
d_k(x, \partial\Omega) &= \inf \left\{ \int_0^{\tau_x} N_k(x(t), \dot{x}(t)) dt \mid y \in A \right. \\
&\quad \left. \dot{x}_i(t) = a_{ij}^k(x(t)) y_j(t), x(0) = x \right\}
\end{aligned}$$

$$d^*(x, \partial\Omega) = \inf \left\{ \int_0^{\tau_x} N(x(t), \dot{x}(t)) dt \mid x(0) = x \right\}$$

すると、これらを用いて、 $v(x)$ は、次の様に評価される。

$$\sqrt{2\lambda} \max_{1 \leq k \leq m} d_k(x, \partial\Omega) \leq v(x) \leq \sqrt{2\lambda} d^*(x, \partial\Omega)$$

[定理の証明]

$v^\varepsilon = -\varepsilon \log u^\varepsilon$ とおき、 v^ε が満たす方程式を導く。簡単な計算により次の様になる。

$$(4) \quad \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon a_{ij}^k v_{ij}^\varepsilon - \frac{1}{2} a_{ij}^k v_i^\varepsilon v_j^\varepsilon + \lambda \right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ v^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで、 v^ε の $W^{1,\infty}$ 評価に関する次の補題を述べる。

[補題]

ε に依存しない定数 C で次式を満たすものがある。

$$(5) \quad \|v^\varepsilon\|_{C(\bar{\Omega})} + \|Dv^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

補題の証明は、次の章で述べるとして、(5)の評価を用いて定理の証明を続けよう。

[補題]より、0に収束する点列 ε_j と、ある関数 $\bar{v} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ が選べて、 $\bar{\Omega}$ 上一様に v_{ε_j} が $\bar{v}$ に収束するようにできる。粘性解の方法の一般論から(4)の解の ε を0に収束させた時の一様収束の意味での極限は、次のハミルトン・ヤコビ(HJ)方程式の粘性解になっている。

$$(6) \quad \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{1}{2} a_{ij}^k v_i v_j - \lambda \right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

又、方程式(6)は、次の様に書き換えられる。

$$(7) \quad \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq m} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \left\{ -a_{ij}^k v_i \alpha_j - \frac{1}{2} a_{ij}^k \alpha_i \alpha_j - \lambda \right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

一方、[5]の中での議論と同様に(7)の粘性解は、定理の中の $v(x)$ で与えられる。ここで、石井[7]の凸でないハミル

Γ に対する粘性解の一意的結果により $v(x) = \widehat{v}(x)$ が得られ、定理が証明される。

§ 2 補題の証明

ψ を滑らかな非減少関数で、次の条件を満たすとする。

$$\psi(t) = 0 \quad \text{for } t \leq 0, \quad \psi(t) = t - 1 \quad \text{for } t \geq 2$$

$$\psi'' \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$\delta \in (0, 1)$ に対して、 $\beta_\delta(t) = \psi(t/\delta)$ とする。

まず、 $w^\varepsilon = -v^\varepsilon$ とおき、 w^ε の満たす方程式を考えると、次の様になる。

$$(8) \quad \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon a_{ij}^k w_{ij}^\varepsilon - \frac{1}{2} a_{ij}^k w_i^\varepsilon w_j^\varepsilon + \lambda \right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ w^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(8) の解を次の近似方程式系(9) の解 $\{w^{\varepsilon, \delta, k} \mid 1 \leq k \leq m\}$ で近似する事を考える。

$$(9) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \varepsilon a_{ij}^k w_{ij}^k - \frac{1}{2} a_{ij}^k w_i^k w_j^k + \lambda + \beta_\delta(w^k - w^{k+1}) = 0 & \text{in } \Omega \\ w^k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

但し、 $w^{m+1} = w^1$ とする。

最大値原理と、良く知られたバリアー関数を用いると、 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ と $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ に依存しない定数 C_0 で次式を満たすものがある。

$$(10) \quad -C_0 \leq w^{\varepsilon, \delta, k} \leq 0, \quad \max_{\partial\Omega} |D w^{\varepsilon, \delta, k}| \leq C_0$$

簡単のため、以後 $w^{\varepsilon, \delta, k}$ の ε と δ 及び β_δ の δ を省略しよう。 $M = \max\{\|Dw^k\|_{L^2(\Omega)} \mid 1 \leq k \leq m\}$ とし、 $W^k = |Dw^k|^2 + \mu M w^k$ とおく。但し、 μ は後で固定する十分大きな正数とする。 $\max_{1 \leq k \leq m} \sup_{\Omega} W^k = \sup_{\Omega} W^1$ と仮定し、 $x_0 \in \overline{\Omega}$ を $W^1(x)$ の $\overline{\Omega}$ における最大値をとる点とする。

まず、 $x_0 \in \Omega$ と仮定すると、 $W^1(x)$ に最大値原理を適用することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{1}{2}\varepsilon a_{ij}^1 W_{ij}^1 \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon a_{ij}^1 (2w_{ki}^1 w_{kj}^1 + 2w_k^1 w_{kij}^1 + \mu M w_{ij}^1) \quad \text{at } x_0 \end{aligned}$$

仮定(3) と方程式(9) を用いると次の様になる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\varepsilon \theta |D^2 w^1|^2 - \varepsilon a_{ij}^1 w_k^1 w_{kij}^1 \\ &\quad + \mu M \left\{ \frac{1}{2} a_{ij}^1 w_i^1 w_j^1 - \lambda - \beta(w^1 - w^2) \right\} \quad \text{at } x_0 \end{aligned}$$

ここで、方程式(9)を微分した式の変形：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\varepsilon a_{ij}^1 w_{ij,k}^1 &= \frac{1}{2}\varepsilon a_{ij,k}^1 w_{ij}^1 + \frac{1}{2}a_{ij,k}^1 w_i^1 w_j^1 \\ &\quad + a_{ij}^1 w_i^1 w_{jk}^1 - \beta_k \end{aligned}$$

と、 $W_k^1 = 2w_j^1 w_{jk}^1 + \mu M w_k^1 = 0$ at x_0 を用いると、次の様に変形できる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\varepsilon \theta |D^2 w^1|^2 + \frac{1}{2}\mu a_{ij}^1 w_i^1 w_j^1 - \lambda \mu M \\ &\quad - \mu M \beta(w^1 - w^2) + 2w_k^1 \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon a_{ij,k}^1 w_{ij}^1 + \frac{1}{2}a_{ij,k}^1 w_i^1 w_j^1 \right. \\ &\quad \left. + a_{ij}^1 w_i^1 w_{jk}^1 - \beta_k \right\} \end{aligned}$$

さらに、 β の作り方から導かれる $-\beta(r) \leq -r\beta(r) + C$ や、

$W'(x_0) \geq W^2(x_0)$ 等を用いると次の様になる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\varepsilon \theta |D^2 w'|^2 - \frac{1}{2} \mu M \theta |D w'|^2 - \mu M \beta (w' - w^2) \\ &\quad + \beta' (w' - w^2) (-2 |D w'|^2 + 2 w'_k w_k^2) \\ &\quad + \varepsilon C |D w'| |D^2 w'| + C |D w'|^3 \\ &\leq -\frac{1}{2} M \mu \theta |D w'|^2 + C \mu M + C(M+1) |D w'|^2 \end{aligned}$$

但し、 C は ε, δ, k に依存しない適当な定数であり、今後ともとわらずに用いる事にする。上式より次の関係を得る。

$$0 \leq \mu M (C - |D w'|^2) + M |D w'|^2 (C - \mu)$$

但し、 $M \geq 1$ を仮定している。故に μ を十分大きくとると、 $|D w'(x_0)|^2 \leq C$ を得る。よって、

$$\begin{aligned} M^2 &\leq \max_{1 \leq k \leq m} \sup_{\Omega} W^k + C M \\ &= W'(x_0) + C M \leq C + \frac{1}{2} M^2 \end{aligned}$$

を得るので、 ε, δ, k に依存しない定数 C_1 で次式を満たすものが存在する。

$$(11) \quad \|D w^k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$$

次に、 $D^2 w$ の δ と k に依存しない L^∞ 評価を求める。まず、 $N = \max\{\|D^2 w^k\|_{L^\infty(\Omega)} \mid 1 \leq k \leq m\}$ とおく。P.L.Lions [10] の 3(b) と同様にして次式を得る。

$$(12) \quad \|D^2 w^k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C + C \sqrt{N}$$

但し、今後、 C は ε に依存するかもしれない定数としておく。今、 $N = \|D^2 w'\|_{L^\infty(\Omega)}$ と仮定し、 $\|D^2 w'\|_{L^\infty(\Omega)} =$

$|D^2 w'(x_0)|$ となる点を x_0 とする。 $x_0 \in \partial\Omega$ の時は、(12) より N の評価は完了するので、 $x_0 \in \Omega$ と仮定する。適当に変数変換して、次式が点 x_0 で成立するので、初めから仮定する。

$$(13) \quad -a'_{ij} w'_{ij} = -\alpha_k w'_{kk}, \quad a'_{ij} w'_i w'_j = \alpha_k (w'_k)^2$$

但し、 $\alpha_k (\geq 0)$ は、定数である。

$V^k = |D^2 w^k|^2 + \mu N d_i w^k_{ii} + \nu N |D w^k|^2$ とおく。但し、 μ と ν は後で固定する正数とする。 $\max_{1 \leq k \leq m} \sup_{\Omega} V^k = \sup_{\Omega} V^r$ とおき、 $\sup_{\Omega} V^r = V^r(x_1)$ と仮定しよう。

まず、 $x_1 \in \Omega$ と仮定すると、最大値原理より、 x_1 において

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{1}{2} \varepsilon a^r_{ij} V^r_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon a^r_{ij} (2 w^r_{kl} w^r_{klij} + 2 w^r_{keli} w^r_{klj} + \mu N d_k w^r_{kkij} \\ &\quad + 2 \nu N w^r_{kl} w^r_{klij} + 2 \nu N w^r_{ki} w^r_{kj}) \end{aligned}$$

が成立する。簡単のため $\varepsilon = 2$ とし、 a^r_{ij} , w^r , w^{r+1} の代わりに a_{ij} , w , z と書き、 β , β' , β'' の変数 $w - z$ は省略する。ここで、方程式(9)を微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} -a_{ij} w_{ijk} &= a_{ij,k} w_{ij} + \frac{1}{2} a_{ij,k} w_i w_j + a_{ij} w_i w_{jk} - \beta_k \\ -a_{ij} w_{ijk\ell} &= 2 a_{ij,k} w_{ij\ell} + a_{ij,k\ell} w_{ij} + 2 a_{ij,k} w_i w_{j\ell} - \beta_{k\ell} \\ &\quad + a_{ij} w_{ik} w_{j\ell} + \frac{1}{2} a_{ij,k\ell} w_i w_j + a_{ij} w_i w_{jk\ell} \end{aligned}$$

さらに、 $V_k = 2 w_{ij} w_{ijk} + \mu N d_i w_{ik} + 2 \nu N w_i w_{ik} = 0$ at x_1 , も用いると次式の様に変形されていく。

$$\begin{aligned}
0 \leq & -2\mu N \theta |D^2 w|^2 + \beta''(C|D^2 w| - \mu N \theta) |D(w-z)|^2 \\
& + \beta' \{ -2|D^2 w|^2 + 2w_{\mathbb{R}L} z_{\mathbb{R}L} - \mu N \alpha_A (w_{\mathbb{R}L} - z_{\mathbb{R}L}) \\
& \quad - 2\mu N |Dw|^2 + 2\mu N w_{\mathbb{R}} z_{\mathbb{R}} \} \\
& + C(|D^2 w|^3 + \mu^2 N^2 + C\mu N |D^2 w|^2 + \mu N |D^2 w|)
\end{aligned}$$

ここで、 μ を十分大きく固定して、さらに $V^r(x_1) \geq V^{r+1}(x_1)$ を用いると次の様になる。

$$0 \leq N\{|D^2 w|^2(C-\mu) + (1+\mu)(CN - |D^2 w|^2)\}$$

μ を十分大きく固定すると、 $|D^2 w(x_1)| \leq C\sqrt{N}$ を得る。故に、

$$\begin{aligned}
N^2 &= V^1(x_0) + \frac{1}{2} \mu N \alpha_{\mathbb{R}} (w'_{\mathbb{R}}(x_0))^2 - \mu N \beta(w^1 - w^2)(x_0) \\
&\quad - \mu N |Dw^1|^2(x_0) \\
&\leq V^r(x_1) + CN \leq C + CN^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

となり、 δ と $\mathbb{R}$ に依存しない定数 C_ε で次式を満たすものが存在する。

$$(14) \quad \|D^2 w^{\mathbb{R}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\varepsilon$$

次に、 $x_1 \in 2\Omega$ と仮定すると、上述の議論の中で定めた μ , $\mathbb{R}$ を固定すると、(12) より、簡単に(14)式が導かれる。

評価(10), (11), (14)より、各 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対し、 0 に収束する点列 δ_j と関数 $\tilde{w}^\varepsilon \in W^{2, \infty}(\Omega)$ と ε に依存しない定数 C_2 で、

$w^{\varepsilon, \delta_j, \mathbb{R}}$ が $\tilde{w}^\varepsilon$ に $W^{1, \infty}$ の意味で強収束し、 $D^2 w^{\varepsilon, \delta_j, \mathbb{R}}$ が $D^2 \tilde{w}^\varepsilon$ に L^∞ の意味で弱*収束し、さらに、 $\|\tilde{w}^\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \leq C_2$ を満足す

るものが存在する。従って、[2]と同様の議論により、 $\hat{w}^\varepsilon$ は(8)の解になり、方程式(8)の一意性より $w^\varepsilon = \hat{w}^\varepsilon$ となり、補題の証明が終わる。

§3 引用文献

- [1] L.C. Evans 「Classical solutions of HJB equation for uniformly elliptic operators」 Trans. A.M.S. 275 P.245~255 '83
- [2] L.C. Evans & A. Friedman 「Optimal stochastic switching & the Dirichlet problem for the Bellman equation」 Trans. A.M.S. 253 P.365~389 '79
- [3] L.C. Evans & H. Ishii 「A pde approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities」 Ann. I. Henri Poincaré 2 P.1~20 '85
- [4] L.C. Evans & P. L. Lions 「Résolution des équations de HJB」 C.R. A.S. Paris 290 P.1049~1052 '82
- [5] L.C. Evans & P. E. Souganidis 「Differential games & representation formula for solutions of HJ-Isaacs equations」 to appear in Indiana U. Math. J.
- [6] W.H. Fleming & P. E. Souganidis 「PDE - viscosity

solution approach to some problems of large deviation, to appear

- [7] H. Ishii 'A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the HJB equations of Eikonal type, to appear
- [8] S. Koike 'An asymptotic formula for solutions of HJB equations, to appear in Nonlinear Analysis
- [9] P. L. Lions 'Optimal control of diffusion processes & HJB equations I, Comm in P.D.E. 8 P.1101~1174 '83
- [10] P. L. Lions 'Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet, Acta Math. 146 P.151~166 '81
- [11] P. L. Lions & N. S. Trudinger 'Linear Oblique derivative problems for uniformly elliptic HJB equation, Math. Z. 191 P.1~15 '86
- [12] S. R. S. Varadhan 'On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, C.P.A.M. 20 P.431~455 '67
- [13] A. D. Ventcel & M. I. Freidlin 'On small random perturbations of dynamical systems, Russian Math. Surveys 25 P.1~56 '70