

Duffing 方程式の解の概要
— 3 高調波共振と跳躍現象 —

京大 エ 上田 皖亮

1. はじめに

強制振動系を表わす非線形常微分方程式の代表的な例として Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t \quad (1)$$

がある。(1) 式で記述される系の振動には, 外力周波数成分以外にその高調波および分数調波 (即高調波) 成分の含まれることがある。外力の振幅が大きい場合の振動はこれらの成分を顕著に含み現象そのものが複雑となるのでその解析は困難となる。

本文はこのような外力の振幅 B が大きい場合の (1) 式で記述される系の振動現象に関する計算機実験結果の報告である。

2. 写像 T

(1) 式を次のように書き改める。

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\bar{\omega} y - x^3 + B \cos t \quad (2)$$

(2) 式は相平面をそれ自身に移す写像 T を定義する。この写像の一般的性質は既に報告されている。

3. 実験結果

(1) 式で記述される系には、外力振幅 B のある範囲において、 ω 3 高調波成分を顕著に含む振動が現れ B の増減に伴い跳躍現象を示すことが知られている。 ω 1 図に、現象の概略を説明するため、 $\bar{\omega}$ を一定 (比較的大きい値) に保ち B を変化させた場合の基本調波成分 r_1 および ω 3 高調波成分 r_3 の模様を示した。以下の記述において B を増加させたときに見られる

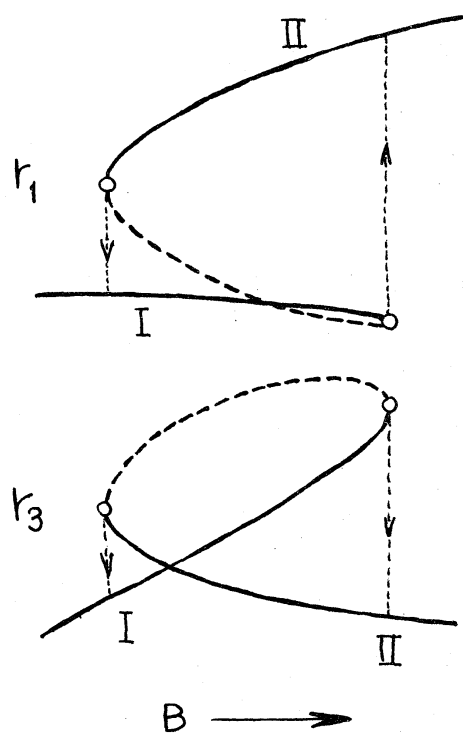


図 1 ω 3 高調波共振と跳躍現象

跳躍現象の跳躍前の状態をⅠの状態，跳躍後の状態をⅡの状態と呼ぶことにする。

3.1 各種振動の発生領域

物理系に持続する振動は写像 T の構造安定でかつ漸近安定な不変集合（一般には極小集合）で表わされる。Fig 2 は実験的に調べた各種振動の発生領域，換言すれば写像 T の安定な不動点，周期点や不変集合の存在領域を示す。図において三角形領域 ABC 内のパラメータ α ， B に対して，写像 T は正不安定不動点を持つ。この不動点は Fig 1 に点線で描いた状態Ⅰ，Ⅱ間の不安定平衡状態に対応する。曲線 BC 上では状態ⅠからⅡへの， AB 上ではⅡからⅠへの跳躍が起る。

状態Ⅱの振動は常に奇数次高調波成分のみからなる振動であるが，状態Ⅰの振動はパラメータ α ， B に応じて種々の型式をとる。つぎにこれらの型式について述べる。Fig 2 の点線における状態Ⅰの振動は奇数次高調波成分から成る。これより B を減少させると点線にもつてくると奇数次以外に偶数次高調波成分を含む振動が現われる。これに対応して写像 T の不動点には分岐現象 $S^1 \rightarrow 'S^1 - D^1 - {}^2S^1$ が生じる。^{*} この境界を与えるのが α ， θ 間の細線である。さらに B を減少さ

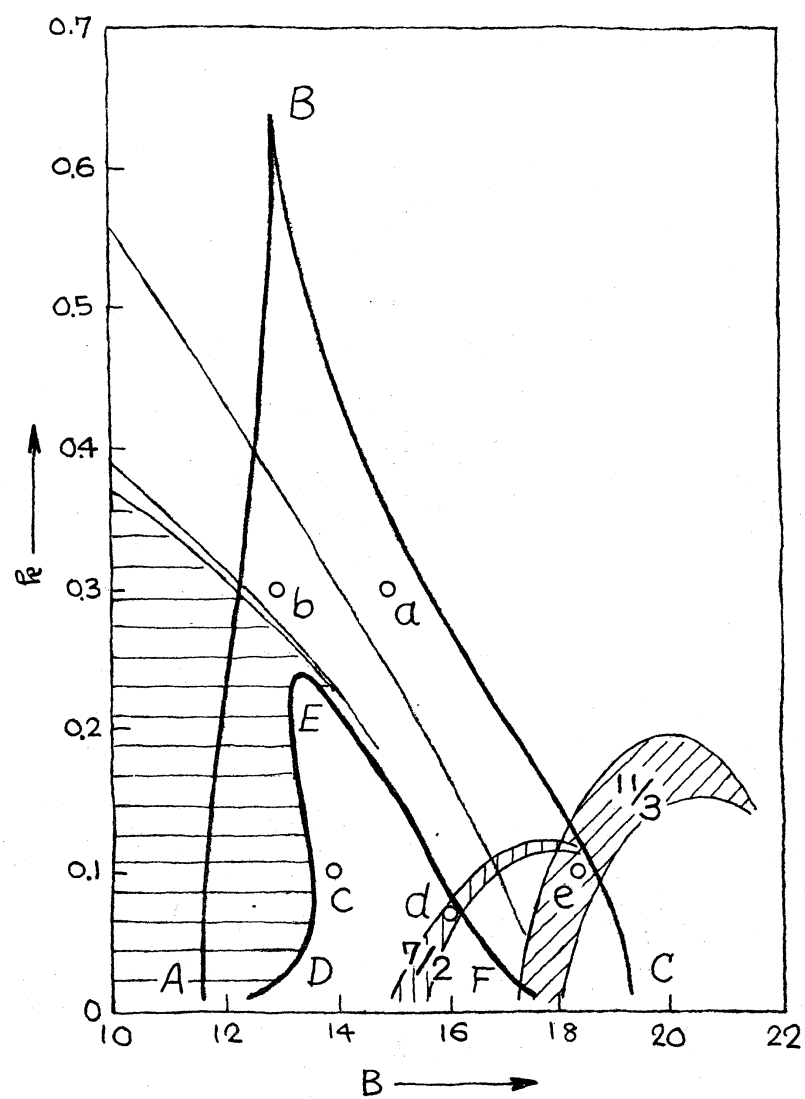
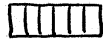


図 2 各種振動の発生領域

せると ${}^1S^1 \rightarrow {}^1S_1^2 - {}^1I^1 - {}^1S_2^2$, ${}^2S^1 \rightarrow {}^2S_1^2 - {}^2I^1 - {}^2S_2^2$ と分岐が進行し、図 2 図  の領域内で写像 T は無限個の周期点をもち考えられるがその詳細は明らかでない。この場合に対応して物理系にはいわゆる不規則遷移振動が持続する。この不規則遷移振動は曲線 DEF 上で消滅して状態 II へ跳躍する。つまり三角形領域 DEF 内の θ , B に対して状態 I は持続しない。

図 2 図において $7/2$ と記した領域  内では $7/2$ 次分数調波の高調波成分を顕著に含む振動が持続し、写像 T は完全安定な 2-周期群をもち、 $11/3$ と記した領域  内では $11/3$ 次分数調波の高調波振動が持続し、写像 T は 3-周期群をもち、

3.2 位相面構造

図 2 図中の点 $a \sim e$ にパラメータ θ および B を与えた場合の、phase diagram の実験結果について述べる。

(a) $\theta = 0.3$, $B = 15$ (図 3 図)

* 本文において記号 ${}^nS_j^m$ は n 番目の完全安定 n -周期点を示し添字 j ($j=1, 2, \dots, n$) は群の中における像の移動順序を示す。同様の記号を正不安定 (D), 逆不安定 (I) 周期点や不動点にも適用する。

状態 I および II を表わす完全安定不動点 1S および 2S が存在する。正不安定不動点 D' の $\omega(D')$ -branch がこれら 2 つの状態の domains of attraction の境界を与える。 1S および 2S を通る周期解はいずれも奇数次高調波成分のみから成っている(付録参照)。

(b) $\epsilon = 0.3$, $B = 13$ (カ 4 図)

状態 I は完全安定不動点 1S あるいは 2S いずれかの周期振動に対応する。これら 2 つの周期振動は偶数次高調波成分を含み, 1S を通る周期解を $x_1(t)$ とすれば 2S を通る周期解は $-x_1(t-\pi)$ で与えられる(付録参照)。

(c) $\epsilon = 0.1$, $B = 14$ (カ 5 図)

状態 I は物理系に持続しない。図に見るように正不安定不動点 $^1D'$ は点 $^2D'$ に, 従って S' (状態 II) に遷移的連鎖で繋がっている。

(d) $\epsilon = 0.07$, $B = 16.1$ (カ 6 図)

状態 II の完全安定不動点 S' のまわりに 2-周期群が 2 つ存在する。

(e) $\epsilon = 0.1$, $B = 18.4$ (カ 7 図)

3-周期群が存在する。対応する振動は $11/3$ 次分数調波的高調波成分を顕著に含む(付録参照)。

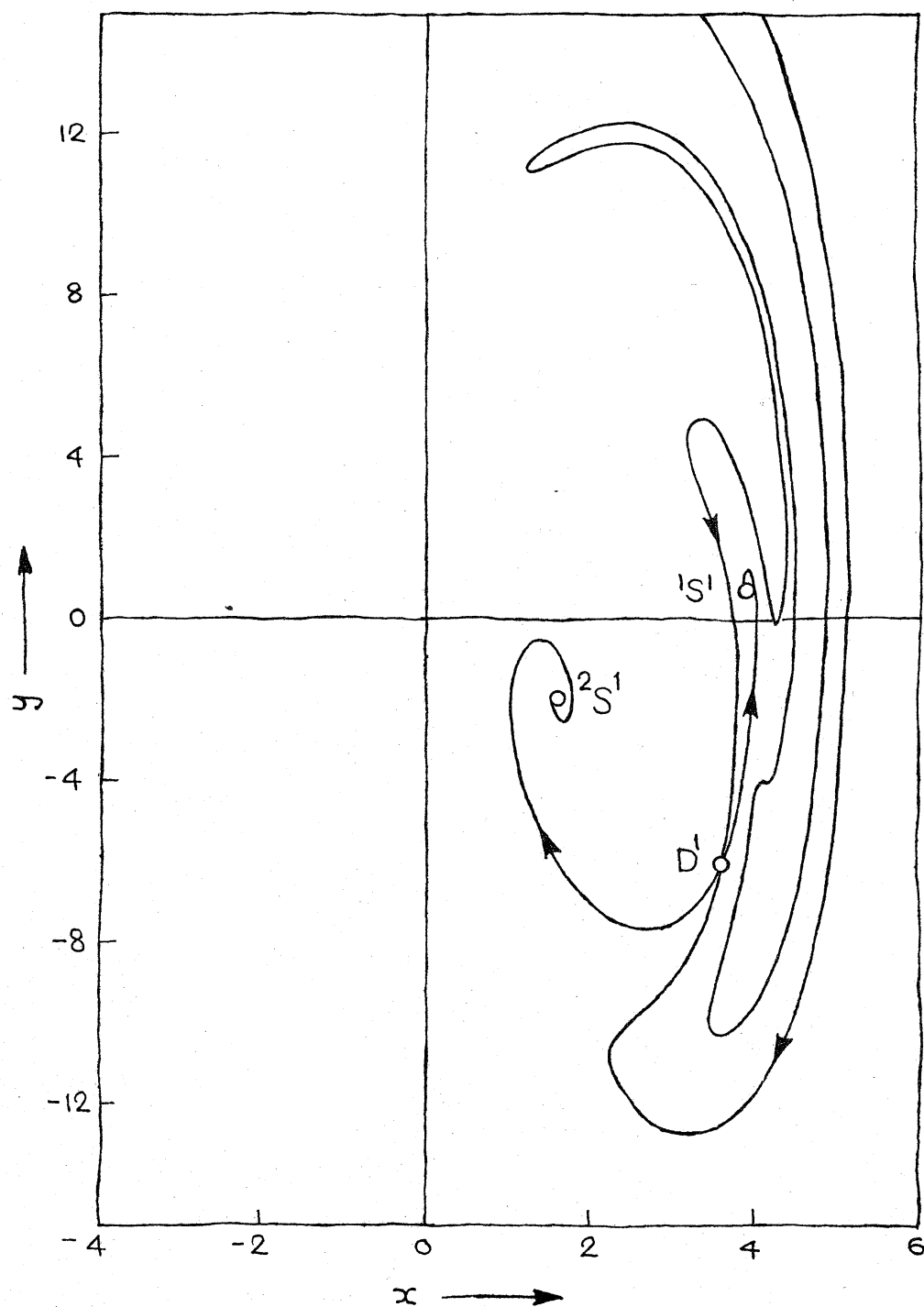


表 3 図 $B=0.3$, $B=15$ に対する phase diagram

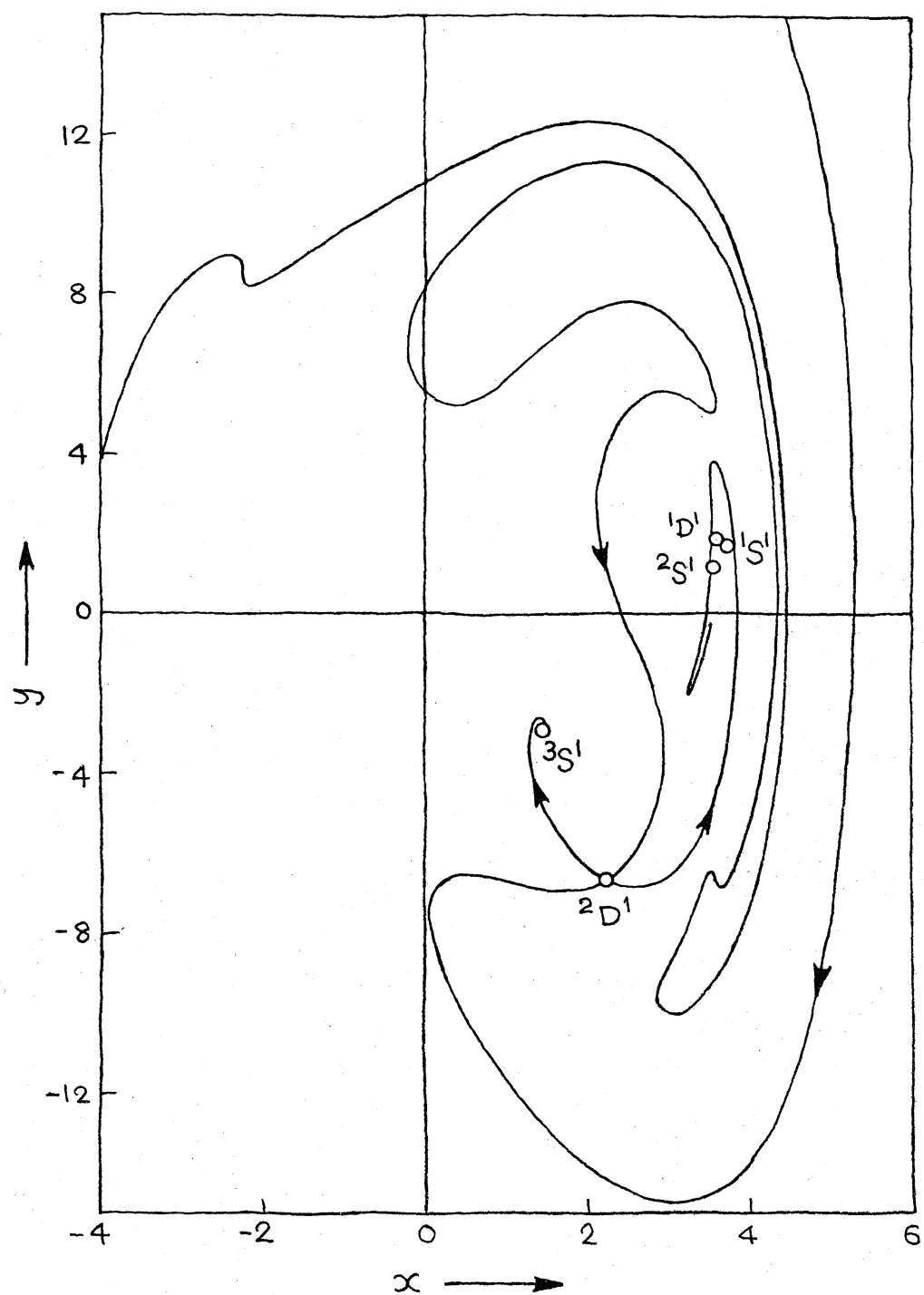


図 4 図 $k = 0.3$, $B = 13$ に対する phase diagram

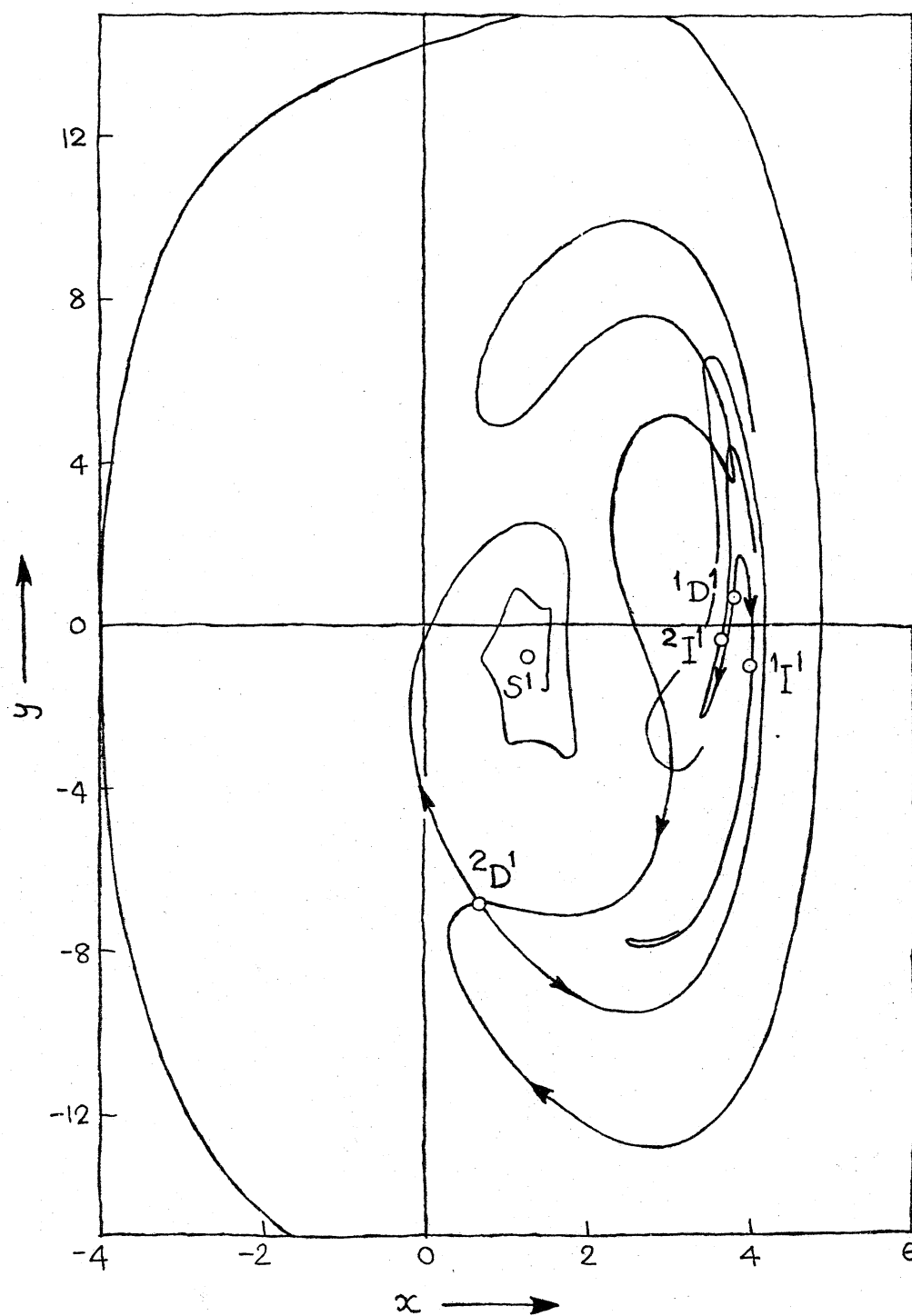


図5 図 $R=0.1$, $B=14$ に対する phase diagram

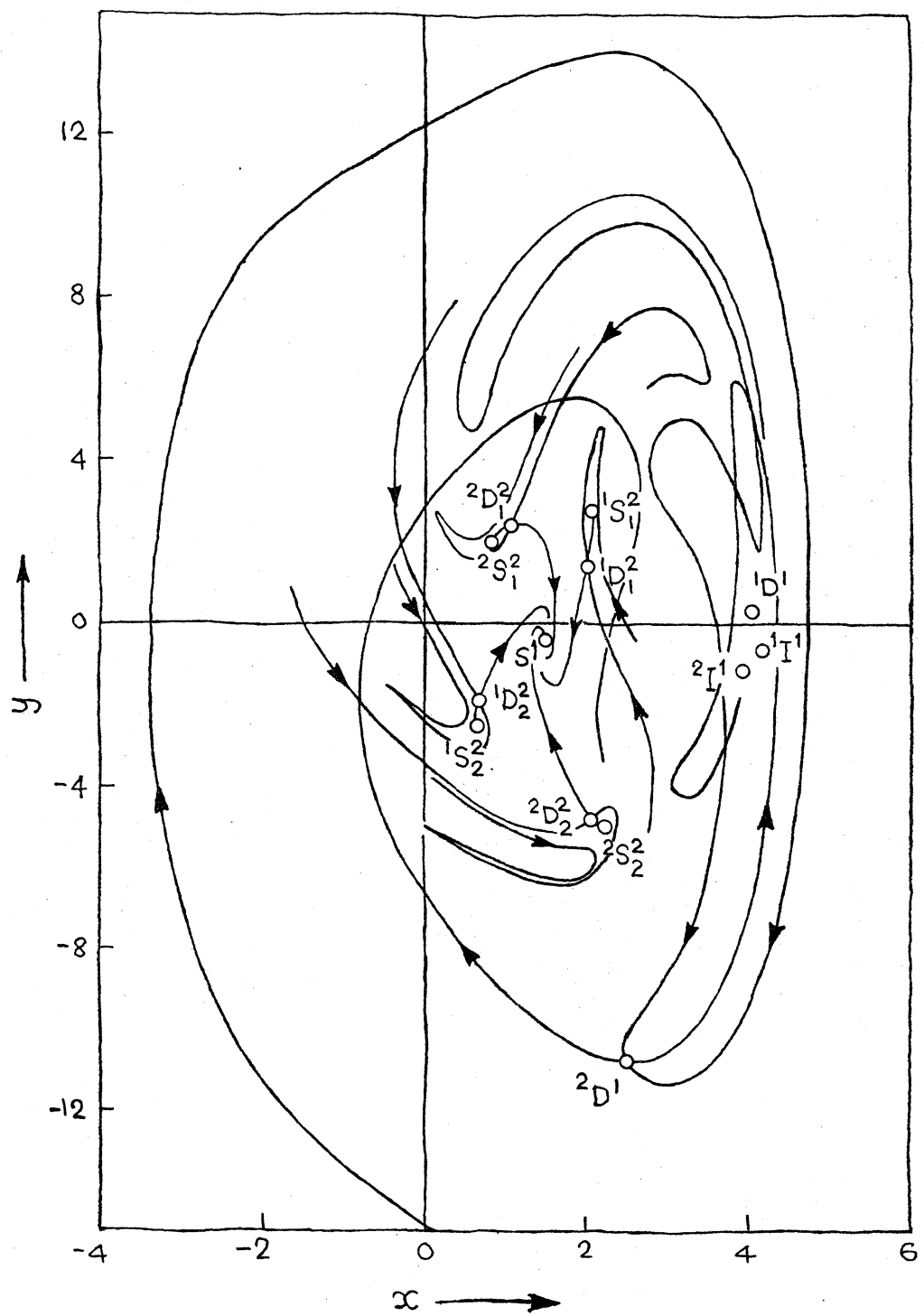
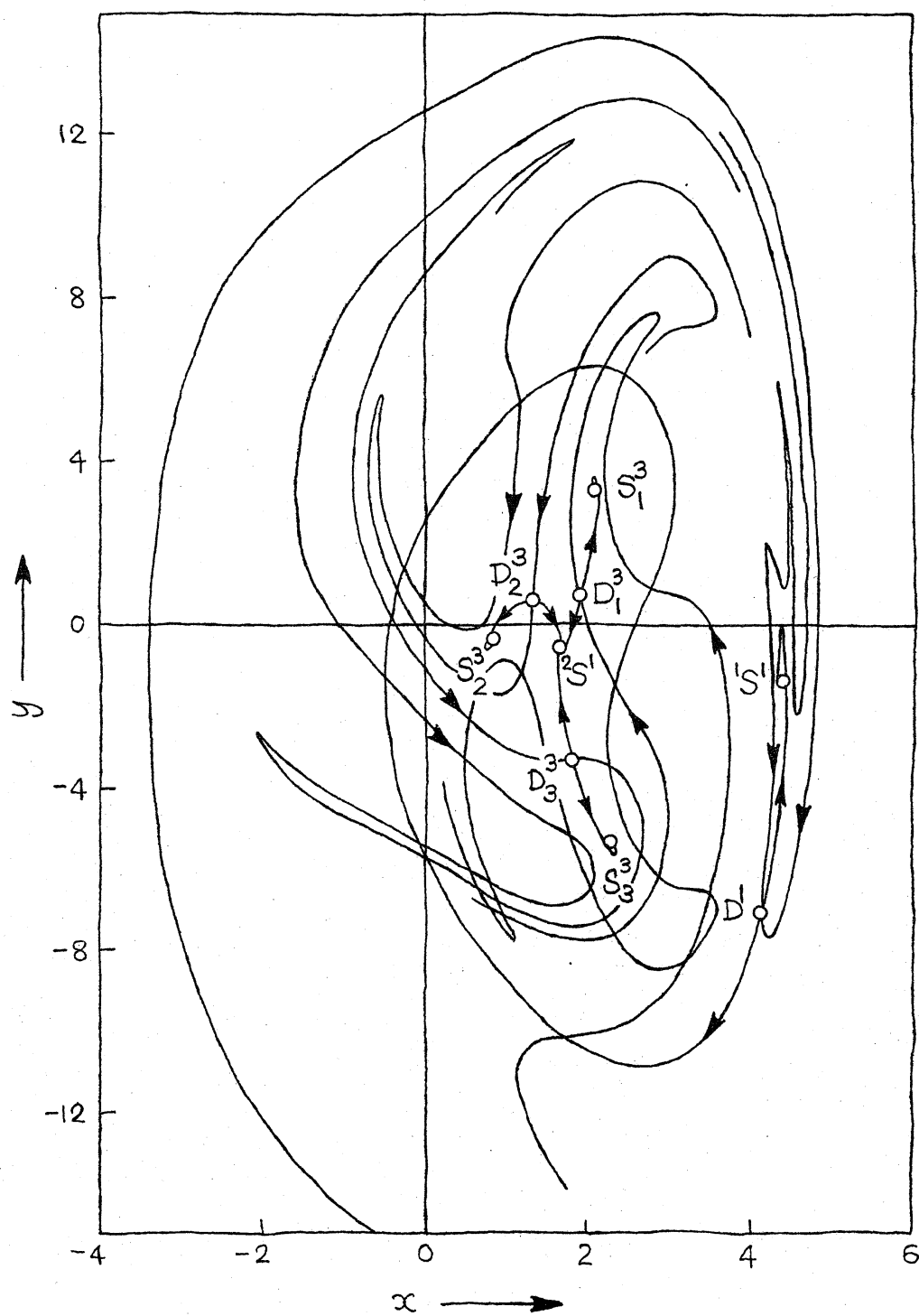


图 6 图 $R=0.07$, $B=16.1$ に対する phase diagram



カ7図 $\bar{\epsilon}=0.1$, $B=18.4$ に対する phase diagram

3.3 パラメータの変化に伴う跳躍現象

カ2図のパラメータ平面上の曲線ABC上で生じる跳躍は完全安定不動点 S' と正不安定不動点 D' の合体消滅による跳躍であり、曲線DEF上では、カ5図における点 D' と $2D'$ に対応する点の、 $\alpha(D')$ -branchと $\omega(2D')$ -branchが接する、いわゆる特殊型ヘテロワリニックス点を介して連鎖を構成することによる跳躍である。

$7/2$, $11/3$ 分数調波的高調波振動の三日月形領域においても、外側の境界上では前者の型、内側の境界上では後者の型の跳躍現象が起る。

本報告作成にあたり佐々木修二君（現安川電機）に御協力をいただいた。ここに感謝の意を表します。

付録

3.2のphase diagram中のいくつかの不動点や周期点に関連した参考資料を以下に挙げる。

* CALCULATION OF SUCCESSIVE IMAGES UNDER THE TRANSFORMATION T (DUFFINGS EQUATION)

SYSTEM PARAMETERS		K=	0.3000	H=	15.0000	H0=	0.0	(N=180)			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0 X	3.9368	3.9369	3.9368	3.9368	3.9368	3.9368	3.9368	3.9368	3.9368	3.9368	3.9368
Y	0.8932	0.8933	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932

SUCCESSIVE IMAGES HAVE CONVERGED TO THE PERIODIC POINTS OF ORDER 1 (CRITERION 0.000100)

* PERIODIC TRAJECTORY (ORDER= 1)

X	3.9368	3.9397	3.8869	3.7819	3.6306	3.4410	3.2219	2.9823	2.7306	2.4743	2.2194	1.9709
Y	0.8932	-0.7240	-2.2845	-3.7060	-4.9238	-5.8976	-6.6123	-7.0752	-7.3096	-7.3488	-7.2296	-6.9881
X	1.7326	1.5069	1.2958	1.1002	0.9207	0.7576	0.6107	0.4798	0.3644	0.2641	0.1783	0.1064
Y	-6.6569	-6.2634	-5.8299	-5.3735	-4.9071	-4.4398	-3.9780	-3.5263	-3.0875	-2.6633	-2.2550	-1.8634
X	0.0480	0.0023	-0.0312	-0.0532	-0.0643	-0.0651	-0.0562	-0.0383	-0.0121	0.0218	0.0627	0.1100
Y	-1.4888	-1.1316	-0.7920	-0.4703	-0.1667	0.1187	0.3857	0.6342	0.8640	1.0751	1.2674	1.4408
X	0.1631	0.2212	0.2837	0.3499	0.4191	0.4907	0.5640	0.6381	0.7124	0.7862	0.8586	0.9288
Y	1.5953	1.7307	1.8469	1.9437	2.0208	2.0779	2.1146	2.1304	2.1287	2.0970	2.0467	1.9732
X	0.9961	1.0595	1.1183	1.1717	1.2188	1.2587	1.2909	1.3145	1.3289	1.3334	1.3277	1.3112
Y	1.8763	1.7554	1.6107	1.4423	1.2507	1.0367	0.8016	0.5467	0.2741	-0.0144	-0.3163	-0.6294
X	1.2836	1.2447	1.1942	1.1320	1.0580	0.9722	0.8744	0.7647	0.6430	0.5091	0.3629	0.2043
Y	-0.9514	-1.2801	-1.6136	-1.9503	-2.2892	-2.6297	-2.9715	-3.3150	-3.6610	-4.0106	-4.3649	-4.7250
X	0.0330	-0.1513	-0.3486	-0.5593	-0.7833	-1.0205	-1.2701	-1.5312	-1.8021	-2.0800	-2.3613	-2.6410
Y	-5.0919	-5.4655	-5.8447	-6.2269	-6.6068	-6.9762	-7.3229	-7.6300	-7.8751	-8.0303	-8.0829	-7.9366
X	-2.9131	-3.1700	-3.4035	-3.6048	-3.7654	-3.8779	-3.9369	-3.9398	-3.8859	-3.7819	-3.6306	-3.4409
Y	-7.6151	-7.0665	-6.2700	-5.2222	-3.9427	-2.4766	-0.8926	0.7247	2.2853	3.7058	4.9246	5.8983
X	-3.2218	-2.9822	-2.7305	-2.4741	-2.2193	-1.9708	-1.7324	-1.5068	-1.2956	-1.1000	-0.9206	-0.7575
Y	6.6130	7.0757	7.3101	7.3492	7.2299	6.9884	6.6571	6.2636	5.8300	5.3736	4.9071	4.4398
X	-0.6106	-0.4796	-0.3642	-0.2639	-0.1781	-0.1063	-0.0478	-0.0021	0.0314	0.0534	0.0644	0.0652
Y	3.9781	3.5263	3.0875	2.6633	2.2551	1.8634	1.4888	1.1316	0.7920	0.4704	0.1667	-0.1187
X	0.0564	0.0385	0.0123	-0.0216	-0.0625	-0.1098	-0.1629	-0.2210	-0.2835	-0.3497	-0.4190	-0.4905
Y	-0.3857	-0.6342	-0.8640	-1.0751	-1.2674	-1.4408	-1.5953	-1.7307	-1.8459	-1.9436	-2.0208	-2.0779
X	-0.5638	-0.6379	-0.7123	-0.7860	-0.8584	-0.9286	-0.9959	-1.0593	-1.1182	-1.1715	-1.2186	-1.2586
Y	-2.1146	-2.1304	-2.1247	-2.0970	-2.0467	-1.9733	-1.8763	-1.7555	-1.6108	-1.4424	-1.2508	-1.0369
X	-1.2907	-1.3143	-1.3287	-1.3333	-1.3276	-1.3111	-1.2835	-1.2446	-1.1941	-1.1320	-1.0580	-0.9721
Y	-0.8017	-0.5489	-0.2743	0.0141	0.3161	0.6292	0.9511	1.2798	1.6133	1.9500	2.2889	2.6293
X	-0.8744	-0.7647	-0.6430	-0.5091	-0.3629	-0.2043	-0.0330	0.1512	0.3486	0.5593	0.7833	1.0204
Y	2.9712	3.3147	3.6607	4.0103	4.3646	4.7247	5.0916	5.4652	5.8444	6.2266	6.6065	6.9760
X	1.2700	1.5311	1.8020	2.0799	2.3611	2.6409	2.9129	3.1699	3.4034	3.6047	3.7653	3.8778
Y	7.3227	7.6297	7.8749	8.0502	8.0828	7.9566	7.6151	7.0667	6.2703	5.2226	3.9432	2.4773
X	3.9369											
Y	0.8933											

* FOURIER ANALYSIS OF WAVE FORM (DUFFINGS EQUATION K= 0.3000 B= 15.0000 B0= 0.0 N=180)

ORDER	COS	WAVE FORM X SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)	COS	WAVE FORM Y SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)
0	0.0000	0.7084	1.6928	-0.4317	0.0000	-1.5375	1.6929	1.1390
1/1	1.5375	0.0000	0.0001	-2.4441	0.0001	0.0001	0.0001	-0.7861
2/1	-0.0001	0.0000	0.0001	0.0442	-0.2249	-5.0815	5.0865	1.6150
3/1	1.6938	-0.0750	1.6955	-1.8767	0.0001	0.0000	0.0001	-0.2582
4/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0473	0.1848	-2.2185	2.2189	1.5235
5/1	0.4433	0.0210	0.0000	-2.2883	0.0001	0.0000	0.0001	-0.5347
6/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.1398	0.1627	-1.1563	1.1677	1.4310
7/1	0.1652	0.0232	0.1668	-2.4836	0.0000	0.0000	0.0000	-0.6128
8/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.1185	0.0664	-0.5575	0.5615	1.4523
9/1	0.0619	0.0074	0.0624	-3.0804	0.0000	0.0000	0.0000	-0.6511
10/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.1532	0.0379	-0.2431	0.2480	1.4175
11/1	0.0223	0.0034	0.0225	2.4086	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8514
12/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.1856	0.0199	-0.1060	0.1078	1.3851
13/1	0.0082	0.0015	0.0083	2.0375	0.0000	0.0000	0.0000	-1.4458
14/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.2110	0.0096	-0.0446	0.0456	1.3595
15/1	0.0030	0.0006	0.0030	1.8496	-0.6000	0.0000	0.0000	-2.6684
16/1	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.2391	0.0045	-0.0184	0.0189	1.3309
17/1	0.0011	0.0003	0.0011	1.9186	-0.0000	0.0000	0.0000	2.8863
18/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.2662	0.0021	-0.0075	0.0077	1.3027
19/1	0.0004	0.0001	0.0004	1.9971	-0.0000	0.0000	0.0000	2.8227
20/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.2908	0.0009	-0.0030	0.0031	1.2751
21/1	0.0011	0.0000	0.0011	1.6560	-0.6000	0.0000	0.0000	2.5278
22/1	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.3117	0.0004	-0.0012	0.0013	1.2477
23/1	0.0001	0.0000	0.0001	2.0165	-0.0000	0.0000	0.0000	2.7909
24/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.3259	0.0002	-0.0005	0.0005	1.2212
25/1	0.0000	0.0000	0.0000	1.8028	-0.0000	0.0000	0.0000	2.5835
26/1	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.3295	0.0001	-0.0002	0.0002	1.1973
27/1	0.0000	0.0000	0.0000	2.0795	-0.0000	0.0000	0.0000	2.8785
28/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.2000	0.0000	-0.0001	0.0001	1.1793
29/1	0.0000	0.0000	0.0000	2.0853	-0.0000	0.0000	0.0000	2.8623
30/1	-0.0000	-0.0000	0.0000					

* CHARACTERISTIC MULTIPLIERS AND CHARACTERISTIC EXPONENTS

PERIODIC POINTS OF ORDER 1

X0 = 0.393660E+01 Y0 = 0.893200E+00

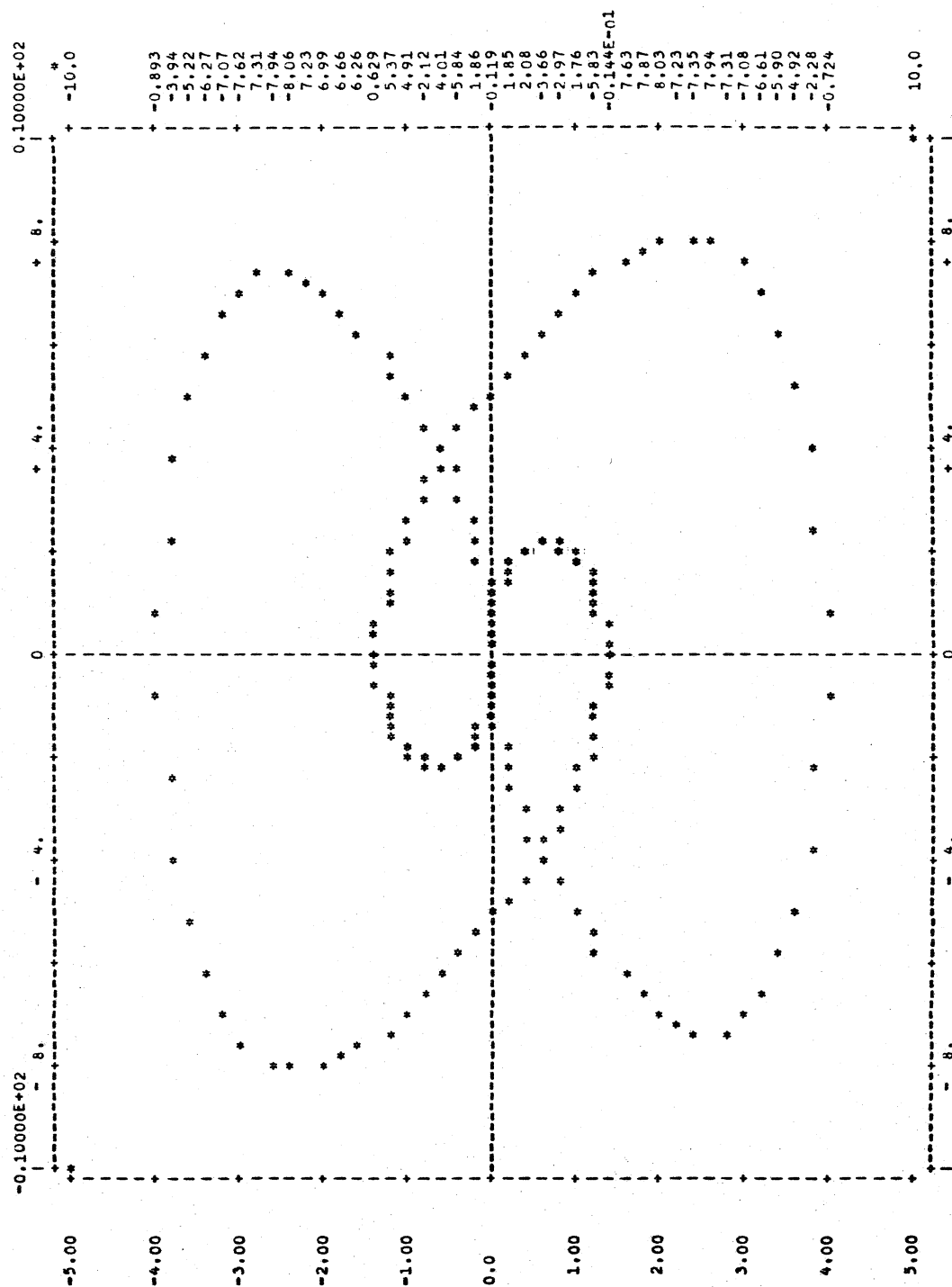
CHARACTERISTIC MULTIPLIERS

CONJ. COMPLEX ROOTS: RM = -0.387443E+00 IM = 0.415217E-01 ABSM = 0.389661E+00

CHARACTERISTIC EXPONENTS (MULTIPLIERS: CONJUGATE COMPLEX)

RE = -0.150000E+00 IE = 0.483008E+00

* PERIODIC TRAJECTORY (ORDER= 1; DUFFINGS EQUATION K= 0.3000 B= 15.0000 B0= 0.0 N=180)



* CALCULATION OF SUCCESSIVE IMAGES UNDER THE TRANSFORMATION T (DUFFINGS EQUATION)

SYSTEM PARAMETERS		K= 0.3000		B= 15.0000		B0= 0.0		(N=180)							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
0 X	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066	1.6066					
Y	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616	-2.0616					

SUCCESSIVE IMAGES HAVE CONVERGED TO THE PERIODIC POINTS OF ORDER 1 (CRITERION 0.000100)

* PERIODIC TRAJECTORY (ORDER= 1)

X	1.6066	1.5417	1.4912	1.4553	1.4342	1.4276	1.4355	1.4576	1.4932	1.5419	1.6030	1.6755
Y	-2.0616	-1.6545	-1.2380	-0.8170	-0.3960	0.0211	0.4305	0.8286	1.2118	1.5761	1.9173	2.2308
X	1.7583	1.8503	1.9300	2.0557	2.1655	2.2772	2.3885	2.4969	2.5995	2.6937	2.7768	2.8461
Y	2.5114	2.7533	2.9505	3.0962	3.1838	3.2065	3.1585	3.0349	2.8328	2.5518	2.1945	1.7671
X	2.8994	2.9349	2.9310	2.9471	2.9229	2.8790	2.8162	2.7362	2.6407	2.5319	2.4119	2.2830
Y	1.2793	0.7442	0.1776	-0.4029	-0.9794	-1.5347	-2.0536	-2.5259	-2.9370	-3.2879	-3.5754	-3.8013
X	2.1472	2.0084	1.8623	1.7162	1.5693	1.4224	1.2760	1.1306	0.9861	0.8426	0.6999	0.5575
Y	-3.9701	-4.0819	-4.1623	-4.2010	-4.2121	-4.2032	-4.1815	-4.1532	-4.1251	-4.0987	-4.0812	-4.0747
X	0.4152	0.2724	0.1285	-0.0170	-0.1649	-0.3155	-0.4696	-0.6276	-0.7898	-0.9365	-1.1278	-1.3035
Y	-4.0817	-4.1042	-4.1432	-4.1995	-4.2728	-4.3626	-4.4673	-4.5845	-4.7109	-4.8420	-4.9722	-5.0942
X	-1.4832	-1.6662	-1.8312	-2.0368	-2.2208	-2.4007	-2.5737	-2.7384	-2.8851	-3.0162	-3.1263	-3.2122
Y	-3.1993	-3.2774	-3.3167	-3.3043	-3.2267	-3.0706	-2.8240	-2.4776	-2.0265	-1.4714	-0.8201	-0.0876
X	-3.2714	-3.3023	-3.3044	-3.2783	-3.2256	-3.1489	-3.0515	-2.9373	-2.8105	-2.6751	-2.5353	-2.3946
Y	-1.2962	-0.4736	0.3490	1.1396	1.8687	2.5115	3.0497	3.4721	3.7750	3.9605	4.0356	4.0108
X	-2.2563	-2.1233	-1.9979	-1.8822	-1.7776	-1.6855	-1.6066	-1.5417	-1.4912	-1.4553	-1.4342	-1.4276
Y	3.8983	3.7111	3.4617	3.1621	2.8229	2.4534	2.0617	1.6546	1.2361	0.8171	0.3961	-0.0210
X	-1.4355	-1.4573	-1.4932	-1.5419	-1.6030	-1.6754	-1.7583	-1.8503	-1.9500	-2.0577	-2.1655	-2.2772
Y	-0.4304	-0.8286	-1.2117	-1.5760	-1.9173	-2.2307	-2.5113	-2.7593	-2.9505	-3.0962	-3.1838	-3.2065
X	-2.3885	-2.4968	-2.5995	-2.6937	-2.7768	-2.8461	-2.8994	-2.9349	-2.9510	-2.9471	-2.9229	-2.8790
Y	-3.1585	-3.0349	-2.8329	-2.5518	-2.1946	-1.7671	-1.2794	-0.7443	-0.1777	0.4028	0.9793	1.5346
X	-2.8162	-2.7362	-2.6407	-2.5319	-2.4119	-2.2830	-2.1472	-2.0084	-1.8623	-1.7162	-1.5693	-1.4224
Y	2.0535	2.5238	2.9369	3.2878	3.5753	3.8013	3.9701	4.0879	4.1623	4.2010	4.2121	4.2033
X	-1.2760	-1.1306	-0.9861	-0.8426	-0.6999	-0.5576	-0.4152	-0.2744	-0.1285	0.0170	0.1649	0.3155
Y	4.1815	4.1533	4.1241	4.0987	4.0812	4.0747	4.0617	4.1042	4.1432	4.1995	4.2729	4.3627
X	0.4696	0.6276	0.7898	0.9565	1.1278	1.3035	1.4833	1.6662	1.8512	2.0368	2.2208	2.4008
Y	4.4673	4.5845	4.7109	4.8421	4.9722	5.0942	5.1994	5.2775	5.3167	5.3043	5.2267	5.0706
X	2.5737	2.7364	2.8851	3.0163	3.1263	3.2122	3.2714	3.3033	3.3044	3.2783	3.2256	3.1489
Y	4.8240	4.4776	4.0265	3.4714	2.8200	2.0876	1.2961	0.4735	-0.3490	-1.1397	-1.8684	-2.5116
X	3.0515	2.9373	2.8105	2.6751	2.5353	2.3945	2.2563	2.1233	1.9979	1.8822	1.7776	1.6854
Y	-3.0497	-3.4722	-3.7751	-3.9605	-4.0357	-4.0109	-3.8984	-3.7111	-3.4617	-3.1621	-2.8229	-2.4534
X	1.6066											
Y	-2.0616											

* FOURIER ANALYSIS OF WAVE FORM (DUFFINGS EQUATION K= 0.3000 B= 15.0000 B0= 0.0 N=180)

ORDER	COS	WAVE FORM X SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)	COS	WAVE FORM Y SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)
0	0.0000	0.4611	2.8247	-0.1640	-0.0000	-2.7868	2.8247	1.4068
1/1	2.7868	-0.0000	0.0000	0.0042	0.4611	-0.0000	0.0000	2.2929
2/1	0.0000	-0.6607	1.1197	2.5105	-0.0000	2.7119	3.3590	-2.2019
3/1	-0.9040	0.0000	0.0000	-2.4234	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9362
4/1	-0.0000	-0.2869	0.3743	2.4444	-1.2016	1.4346	1.8714	-2.2660
5/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.4537	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0954
6/1	-0.0000	0.0674	0.0674	-1.5798	0.4719	0.0042	0.4719	-0.0090
7/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.6044	0.0000	-0.0000	0.0000	1.3156
8/1	0.0067	0.0276	0.0284	-1.3324	0.2483	-0.0603	0.2555	0.2384
9/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2061	0.0000	-0.0000	0.0000	1.1085
10/1	0.0041	-0.0029	0.0030	0.6112	-0.0317	-0.0453	0.0553	2.1821
11/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-1.6185	-0.0000	0.0000	0.0000	-1.9470
12/1	0.0010	-0.0021	0.0023	1.1425	-0.0274	-0.0125	0.0301	2.7134
13/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.2522	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2770
14/1	-0.0004	0.0001	0.0004	2.7797	-0.0021	0.0057	0.0061	-1.9333
15/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.3473	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9844
16/1	-0.0002	0.0001	0.0002	-2.7012	0.0014	0.0029	0.0032	-1.1313
17/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2134	0.0000	0.0000	0.0000	-1.1284
18/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2897	0.0006	-0.0002	0.0007	0.2804
19/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-1.7034	0.0000	0.0000	0.0000	-0.7999
20/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2954	0.0001	-0.0003	0.0003	1.2798
21/1	0.0000	-0.0000	0.0000	0.1646	0.0000	0.0000	0.0000	-1.5162
22/1	0.0000	-0.0000	0.0000	0.9166	-0.0001	-0.0000	0.0001	2.5489
23/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.3716	0.0000	0.0000	0.0000	-0.7180
24/1	-0.0000	-0.0000	0.0000	2.1744	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.6002
25/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.7428	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2471
26/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.3936	0.0000	0.0000	0.0000	-1.4318
27/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.4036	0.0000	0.0000	0.0000	-0.6413
28/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.3792	0.0000	0.0000	0.0000	-0.3896
29/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.5862	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0494
30/1	-0.0000	0.0000	0.0000					

* CHARACTERISTIC MULTIPLIERS AND CHARACTERISTIC EXPONENTS

PERIODIC POINTS OF ORDER 1

X0 = 0.160660E+01 Y0 = -0.206160E+01

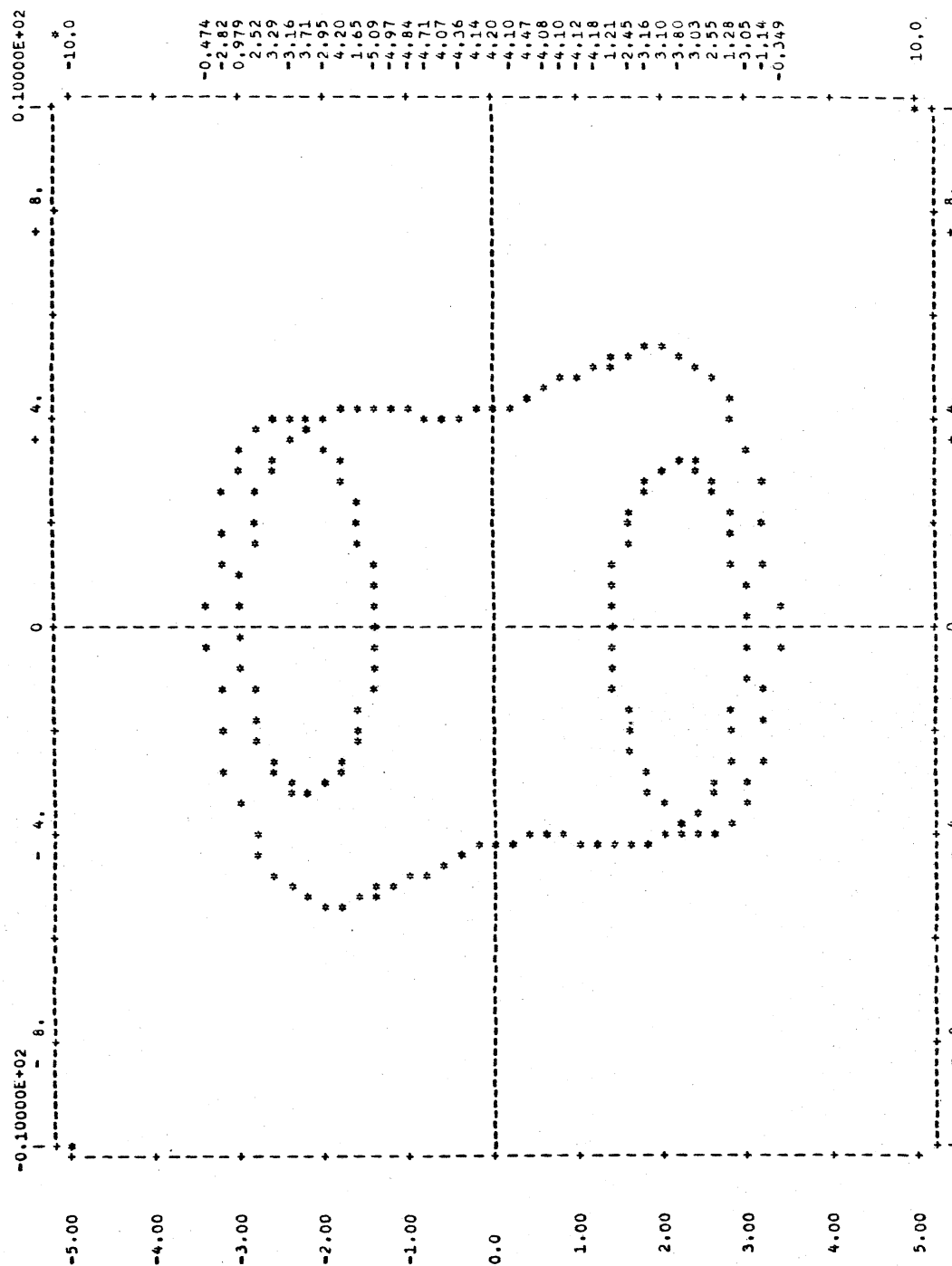
CHARACTERISTIC MULTIPLIERS

CONJ. COMPLEX ROOTS: RM = -0.385446E+00 IM = 0.371609E-01 ABSM = 0.389661E+00

CHARACTERISTIC EXPONENTS (MULTIPLIERS: CONJUGATE COMPLEX)

RE = -0.150000E+00 IE = 0.476568E+00

* PERIODIC TRAJECTORY (ORDER= 1) DUFFING'S EQUATION K= 0.3000 B= 15.0000 BU= 0.0 N=180)



* FOURIER ANALYSIS OF WAVE FORM (DUFFINGS EQUATION K= 0.3000 B= 13.0000 BU= 0.0 N=180)

ORDER	COS	WAVE FORM X SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)	COS	WAVE FORM Y SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)
0	-0.1639				0.0000			
1/1	1.6722	0.5989	1.7762	-0.3439	0.5989	-1.6722	1.7762	1.2269
2/1	0.1756	0.0601	0.1856	-0.3299	0.1203	-0.3512	0.3712	1.2409
3/1	1.4239	0.0376	1.4244	-0.0264	0.1129	-4.2717	4.2732	1.5444
4/1	0.0275	0.0040	0.0278	-0.1441	0.0160	-0.1102	0.1113	1.4267
5/1	0.3633	0.0620	0.3685	-0.1691	0.3101	-1.8165	1.8427	1.4017
6/1	0.0128	0.0134	0.0186	-0.8079	0.0806	-0.0771	0.1115	0.7629
7/1	0.1225	0.0337	0.1270	-0.2684	0.2358	-0.8573	0.8891	1.3024
8/1	0.0074	0.0034	0.0092	-0.6286	0.0431	-0.0593	0.0733	0.9422
9/1	0.0412	0.0133	0.0433	-0.3117	0.1196	-0.3712	0.3900	1.2591
10/1	0.0027	0.0024	0.0036	-0.7268	0.0241	-0.0271	0.0363	0.8439
11/1	0.0135	0.0055	0.0146	-0.5894	0.0610	-0.1487	0.1607	1.1814
12/1	0.0010	0.0011	0.0015	-0.8112	0.0131	-0.0124	0.0180	0.7596
13/1	0.0044	0.0022	0.0050	-0.4628	0.0288	-0.0378	0.0645	1.1080
14/1	0.0004	0.0004	0.0006	-0.8737	0.0063	-0.0053	0.0083	0.6971
15/1	0.0014	0.0009	0.0017	-0.5352	0.0129	-0.0217	0.0253	1.0355
16/1	0.0001	0.0002	0.0002	-0.9458	0.0030	-0.0021	0.0037	0.6248
17/1	0.0005	0.0003	0.0006	-0.6093	0.0056	-0.0080	0.0097	0.9614
18/1	0.0000	0.0001	0.0001	-1.0176	0.0013	-0.0008	0.0016	0.5540
19/1	0.0002	0.0001	0.0002	-0.6834	0.0023	-0.0029	0.0037	0.8870
20/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0919	0.0006	-0.0003	0.0007	0.4831
21/1	0.0000	0.0000	0.0001	-0.7571	0.0010	-0.0010	0.0014	0.8122
22/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.1385	0.0002	-0.0001	0.0003	0.4118
23/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8292	0.0004	-0.0003	0.0005	0.7561
24/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2443	0.0001	-0.0000	0.0001	0.3393
25/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9049	0.0002	-0.0001	0.0002	0.6584
26/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.2488	0.0000	-0.0000	0.0000	0.2722
27/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0023	0.0001	-0.0000	0.0001	0.5795
28/1	0.0000	0.0000	0.0000	-1.3991	0.0000	-0.0000	0.0000	0.1763
29/1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9632	0.0000	-0.0000	0.0000	0.5034
30/1	-0.0000	0.0000	0.0000	-1.6873	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0902

* CHARACTERISTIC MULTIPLIERS AND CHARACTERISTIC EXPONENTS

PERIODIC POINTS OF ORDER 1

XU = 0.370701E+01 Y0 = 0.179832E+01

CHARACTERISTIC MULTIPLIERS

CONJ. COMPLEX ROOTS: RM = -0.235747E+00 IM = 0.310257E+00 ABSM = 0.389661E+00

CHARACTERISTIC EXPONENTS (MULTIPLIERS: CONJUGATE COMPLEX)

RE = -0.150000E+00 IF = 0.353414E+00

* FOURIER ANALYSIS OF WAVE FORM (DUFFINGS EQUATION K= 0.1000 B= 18.4000 B0= 0.0 N=180)

ORDER	COS	WAVE FORM X SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)	COS	WAVE FORM Y SIN	AMPLITUDE	PH.ANG(RAD)
0	-0.0000	-0.1314	0.2961	2.6819	0.0000	0.0885	0.0987	-2.0304
1/3	-0.2654	-0.0000	0.0000	3.1321	-0.0438	0.0000	0.0000	-0.2125
2/3	-0.0000	0.1972	2.7884	-0.0708	0.0000	-2.7814	2.7884	1.5000
3/3	2.7814	-0.0000	0.0000	1.6420	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.9226
4/3	-0.0000	0.0000	0.2847	-0.0116	0.0025	-0.4745	0.4746	1.5591
5/3	0.2847	-0.0000	0.0000	2.9184	0.0000	0.0000	0.0000	-0.5700
6/3	-0.0000	0.0635	0.0670	-1.2468	0.1481	-0.0497	0.1562	0.3240
7/3	0.0213	0.0000	0.0000	-2.7070	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4837
8/3	-0.0000	-0.2486	0.8464	2.8435	-0.7458	2.4273	2.5393	-1.8689
9/3	-0.8091	0.0000	0.0000	-1.9285	0.0001	0.0000	0.0001	-0.2989
10/3	-0.0000	-0.1320	1.1436	3.0259	-0.4840	4.1653	4.1934	-1.6865
11/3	-1.1360	-0.0000	0.0000	2.0505	0.0000	0.0000	0.0000	-2.5486
12/3	-0.0000	0.1056	0.1611	-0.7147	0.4575	-0.5272	0.6980	0.8561
13/3	0.1217	-0.0000	0.0000	1.2592	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.7453
14/3	0.0000	-0.0462	0.2050	2.9142	-0.2311	0.9986	1.0250	-1.7982
15/3	-0.1997	0.0000	0.0000	-1.4575	0.0000	-0.0000	0.0000	0.1237
16/3	0.0000	0.0347	0.2265	2.9877	-0.1967	1.2682	1.2834	-1.7247
17/3	-0.2238	-0.0000	0.0000	1.6078	0.0000	-0.0000	0.0000	3.0432
18/3	-0.0000	0.0025	0.0450	-0.0550	0.0157	-0.2848	0.2852	1.5158
19/3	0.0450	-0.0000	0.0000	1.0158	0.0000	-0.0000	0.0000	1.5034
20/3	0.0000	0.0011	0.0035	-0.3331	0.0080	-0.0230	0.0244	1.2374
21/3	0.0033	-0.0000	0.0000	1.1621	-0.0000	0.0000	0.0000	2.4296
22/3	0.0000	0.0474	0.1003	-0.4916	0.3631	-0.6781	0.7692	1.0791
23/3	0.0884	-0.0000	0.0000	1.1501	-0.0000	-0.0000	0.0000	2.4424
24/3	0.0000	0.0097	0.0640	-0.1523	0.0809	-0.5270	0.5331	1.4185
25/3	-0.0632	0.0000	0.0000	-2.2287	0.0000	0.0000	0.0000	-0.1505
26/3	-0.0000	-0.0082	0.0084	1.8110	-0.0735	0.0180	0.0756	-2.9014
27/3	-0.0020	-0.0000	0.0000	2.3790	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9619
28/3	-0.0000	0.0072	0.0204	-0.3588	0.0693	-0.1849	0.1974	1.2120
29/3	0.0191	-0.0000	0.0000	1.7698	-0.0000	0.0000	0.0000	-2.7083
30/3	-0.0000	-0.0000	0.0000					

* CHARACTERISTIC MULTIPLIERS AND CHARACTERISTIC EXPONENTS

PERIODIC POINTS OF ORDER 3

X0 = 0.775200E+00 Y0 = -0.527000E+00

CHARACTERISTIC MULTIPLIERS

CONJ. COMPLEX ROOTS: KM = -0.125220E+00 IM = 0.368993E+00 ABSM = 0.389661E+00

CHARACTERISTIC EXPONENTS (MULTIPLIERS: CONJUGATE COMPLEX)

RE = -0.500000E-01 IE = 0.100690E+00