

Jacobi 和の universal power series と Vandiver 予想

東大理 市村文男 (Humio Ichimura)

東大理 金子昌信 (Masanobu Kaneko)

序. ℓ を素数とし, 自然数 $n \geq 1$ に対し J_n を Fermat 曲線 $X^{\ell^n} + Y^{\ell^n} = Z^{\ell^n}$ の Jacobi 多様体, $T_{\ell}(J_n)$ をその Tate 加群とする. Ihara [Ih] の中で次のことが示されている.

定理 (Ihara) $\varprojlim_n T_{\ell}(J_n)$ は階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_{\ell}[[u, v]]$ 加群.

ここで, $\mathbb{Z}_{\ell}[[u, v]]$ 加群の構造は, まず 1 の ℓ 巾根のシステム $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ (ζ_n は 1 の原始 ℓ^n 乗根, $\zeta_{n+1}^{\ell} = \zeta_n$) を固定し $(X, Y, Z) \mapsto (\zeta_n X, Y, Z)$, $(X, Y, Z) \mapsto (X, \zeta_n Y, Z)$ より誘導される作用をそれぞれ $1+u$ 倍, $1+v$ 倍 として入れる。

$\varprojlim_n T_{\ell}(J_n)$ にはガロア群が作用するのでこの定理より

特に準同型

$$F: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})) \ni \rho \mapsto F_\rho(u, v) \in \mathbb{Z}_\ell[[u, v]]^\times$$

を得る。 $(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))$ は有理数体に 1 の ℓ 巾根すべてを添加した体。
この $F_\rho(u, v)$ が Jacobi 和の universal power series,
或いは ℓ -adic beta series と呼ばれるものである。その
諸性質については [IH] 以後, Anderson [A], Coleman
[C], Ihara-Kaneko-Yukinari [IKY] といった研究
があり, 特に準同型 F の kernel の体はわかっている。(な
おこの体については Ichimura-Sakaguchi [IS] も参照。)

以下では F の image についての結果を与える。詳しいこ
とは [IK] として発表予定。

結果. 以下専ら ℓ は奇素数と仮定する。又, 同型 $\mathbb{Z}_\ell[[u, v]]$
 $\simeq \mathbb{Z}_\ell[[u, v, w]] / \{(1+uX+vX+w)-1\}$ によって $\mathbb{Z}_\ell[[u, v]]$
の元 $F(u, v)$ を適宜 mod $\{(1+uX+vX+w)-1\}$ の代表
元 $F(u, v, w)$ と見做す。

さて, [IKY], [C] によって $F = F_\rho$ ($\rho \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))$)
は次の諸性質を満たすことがわかる。

- (i) $F \equiv 1 \pmod{uvw}$
- (ii) $F\bar{F} = 1$, $\bar{F} = F((1+u)^{-1}, (1+v)^{-1})$.
- (iii) $F(u, v, w)$ は u, v, w について対称 ($\mathcal{S}_3$ -symmetric)
- (iv) $F(u, v)F(u', v') \in \mathbb{Z}_\ell[[u, v, u', v']] / \{(1+u)(1+v)(1+u')(1+v')-1\}$
 は u, v, u', v' について対称 ($\mathcal{S}_4$ -symmetric)
- (v) $\prod_{\zeta \neq 1} F(\zeta(1+u)-1, \zeta(1+v)-1) = F((1+u)^{\ell-1}, (1+v)^{\ell-1})$

そこで,

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathbb{Z}_\ell[[u, v]]^\times \mid \text{上の (i) ~ (v) を満たす}\}$$

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{F} \in \mathbb{F}_\ell[[u, v]]^\times \mid \text{上の (i) ~ (iv) と同様の条件を満たす}\}$$

と定義する。(v) の条件は $\pmod{\ell}$ ($\pmod{\ell-1}$) で trivial となることに注意しておく。

定理1 次の3条件は同値である。

1. ℓ での Vandiver 予想が正しい。即ち $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{\ell})$ の類数が ℓ で割れない。

2. $\text{Im } F = \mathcal{F}$. ($\text{Im } F = \{F_\rho \mid \rho \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))\}$)

3. $\text{Im } F \pmod{\ell} = \widetilde{\mathcal{F}}$

注1) ℓ が正則素数 (ℓ が $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ の類数を割らない) なら

1. は成り立っている。従ってこのとき F の image が決

定される。又 $l < 125000$ なら Vandiver 予想は成り立つことが知られている。(Wagstaff [W])

注2) Iwasawa [Iw]において, exponent l の Jacobi 和が $\mathbb{Q}_l(\zeta_l)^\times$ の中で生成する部分群がある群と一致することと Vandiver 予想との同値性が与えられている。上の結果はある意味でこれの "universal version" と思えるが, explicit な関係はまだついていない。

次に Vandiver 予想を仮定せずに $\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F}$ ("Vandiver gap") の記述をする。

A_n ; $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ のイデアル類群の l -Sylow 部分群。

$A_\infty = \varinjlim_n A_n$, A_∞^+ ; その "plus part" とする。

作用等, 省略するが, $\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F}$, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(A_\infty^+, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ には自然に $\Lambda = \mathbb{Z}_l[[\mathbb{Z}_l]] \simeq \mathbb{Z}_l[[t]]$ -module の構造が入り, さらに, 共に Λ 上有限生成, torsion となっている。従っていわゆる characteristic power series が定まる。我々は作用をひねった $(\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F})(-1)$ (Tate twist) を考える。これも有限生成 torsion Λ -module である。

定理2. $(\mathcal{F}/\text{Im } \mathbf{F})(-1)$, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A_\infty^+, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ は
同じ characteristic power series を持つ.

"Gamma" series, Coleman の定理.

Jacobi 和が Gauss 和の積に分解し, Beta 関数が
Gamma 関数の積で書けるように $F_p(u, v)$ も次のような分
解をもつ. ([IKY])

$$F_p(u, v) = \hat{G}_p(u) \hat{G}_p(v) \hat{G}_p(w) \quad (\rho \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})))$$

$$((1+u)(1+v)(1+w)=1.)$$

$$\hat{G}_p(u) \in \hat{\mathbb{Z}}_\ell^{\text{ur}}[[u]], \quad \hat{\mathbb{Z}}_\ell^{\text{ur}} \text{ は } \mathbb{Q}_\ell \text{ の最大不分岐拡大の完備化の整数環}$$

$$\lambda \hat{G}_p \stackrel{\text{def}}{=} \log \hat{G}_p(u) - \frac{1}{\ell} \log \hat{G}_p^\varphi((1+u)^\ell - 1) \quad (\varphi: \text{Frobenius})$$

とすると $\lambda \hat{G}_p \in \mathbb{Z}_\ell[[u]]$ であってさらに

$$\mathcal{V}^- = \{g \in \mathbb{Z}_\ell[[u]] \mid \sum_{s \in \mathbb{F}_\ell} g(s(1+u)-1) = 0, g((1+u)^{-1}-1) = -g\}$$

に入る. ([C], [IKY]) 我々の定理1のもととなるのが

定理 (Coleman [C]). 次の2条件は同値

1. ℓ での Vandiver 予想が正しい.

$$2. \{ \lambda \hat{G}_p \mid p \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})) \} = V^-$$

この定理の "modulo ℓ version" を与えることができる.

まず, $V^- \bmod \ell$ は微分作用素 $D = (1+u) \frac{d}{du}$ を
つかって次のように記述される.

$$\text{命題} \quad V^- \bmod \ell = \{ g \in \mathbb{F}_\ell[[u]] \mid (D^{\ell-1}-1)g=0, g((1+u)^{-1}-1) = -g \}$$

定理3. 次の2条件は同値.

1. ℓ での Vandiver 予想が正しい.

$$2. \{ \lambda \hat{G}_p \bmod \ell \mid p \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})) \} \\ = \{ g \in \mathbb{F}_\ell[[u]] \mid (D^{\ell-1}-1)g=0, g((1+u)^{-1}-1) = -g \}$$

注) この定理は, $F_p(u, v)$ を v について展開しにときの v の
係数 $h_p(u)$ の reduction mod ℓ に対する命題として定式化
することもできる.

文献

[A] G. W. Anderson : The hyperadelic gamma function:
a précis, Adv. Studies in Pure Math. vol 12 (1987)
1-19.

- [C] R. Coleman : Anderson - Ihara theory ; Gauss sums and circular units, to appear in *Adv. Studies in Pure Math.*
- [IK] H. Ichimura and M. Kaneko ; On the universal power series for Jacobi sums and the Vandiver conjecture, to appear
- [ISI] H. Ichimura and K. Sakaguchi ; The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after Soulé'), and some related topics, *Adv. Studies in Pure Math.* vol 12 (1987) 53-64.
- [Ih] Y. Ihara ; Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. of Math.*, 123, (1986) 43-106
- [IKY] Y. Ihara, M. Kaneko and A. Yukinari ; On some properties of the universal power series for Jacobi sums, *Adv. Studies in Pure Math.*, vol. 12, (1987), 65-86
- [Iw] K. Iwasawa ; A note on Jacobi sums, *Symposia Math.*, 15 (1975), 447-459
- [W] S. Wagstaff ; The irregular primes to 125,000, *Math. Comp.*, 32 (1978) 583-591