

Convexity の一般化

Kuiper

京大 数研 成木 勇夫 記

ここの目的は、tight imbedding の概念を convexity の一般化として捉えることにある。また、この概念と total absolute curvature の最小性との関係についても若干述べる。先づ D を E^N の compact subset とする。そのとき、

N 次元 euclid 空間

(*) $D: \text{convex} \iff E^N$ のすべての閉半空間 H に対して $H \cap D$ は empty か contractible である。

が成立つ。この事実を少し違った角度から眺め、convexity を拡張して見よう。 M を compact 空間とし、 $f: M \hookrightarrow (\text{又は } \twoheadrightarrow) E^N$ を imbedding (又は immersion) とする。与えられた E^N 上の linear form z と real number c に対して

$$(z \circ f)_c = \left\{ x \in M \ ; \ z \circ f(x) \leq c \right\}$$

f が imbedding のとき、

とおく。そうすると、(1) は $\text{Imp } f: \text{convex} \iff \forall z \forall c$ に対して $(z \circ f)_c$ は empty 又は contractible であることと他ならない。

($\Leftarrow$ $\Rightarrow$ Imp f : convex ならば、 M の位相は最も簡単なものであることに注意しておく。) $\Leftarrow$ $\Rightarrow$ M が contractible なるようなときの convexity の拡張として、次の定義を導入する。

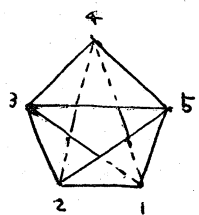
def.
 f : tight $\iff \forall z \in V_c$ に対して、 $(zf)_c$ は (M の位相から考えて) 必要以上に複雑でない。

むしろ「必要以上に複雑でない」ということを厳密にしなければならぬが、その前に二、三の例について説明して見よう。

例 1. $M = 2$ 次元の帯 。これは homotopy circle であることを考えて、上の「必要以上に複雑でない」ということを ① empty, 或は ② contractible, 或は ③ homotopy circle であるとする。このとき E^2 への tight imbedding は convex set からその内部の convex set を抜いたようなものしかない。
 E^3 への tight imbedding の例として cylinder の表面  がある。これをふくらませた  はもう tight ではない。

例 2. $M = \text{Möbius の帯}$ 。これは homotopy circle ではないから tight の定義は上と同様とする。 $f: M \hookrightarrow E^4$ の例として次のようなものがある。 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ を E^4

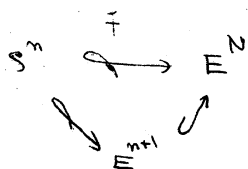
内 α 或る 4 次元単体の頂点とし、3 角形 $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 5, 1)$, $(5, 1, 2)$ を順につなぐは、これは Möbius band の triangulation であり、容易に分るように、これは M の E^4 への tight imbedding を与える。



(E^3 へ適当に project したもの)。

逆に E^4 への tight imbedding τ , τ の α 個の 3 次元 subspace にも含まれるようなものは、上の α 個のものしかないので判る。

例 3. $\Rightarrow M = S^n$. この例では「必要以上に複雑な」ということは ① empty ② contractible ③ homotopy n -sphere のどれかであるという意味にしておかねばならない。このことは次の定理から得られる。「 f を S^n の E^N への tight immersion とすると、 E^N の $(n+1)$ 次元 subspace (E^{n+1} とかく) があつて、



となり、 $\partial(S^n)$ は E^{n+1} 内の convex body の境界となっている。

この定理は、微分幾何の二、三の定理の一般化となっている。

「 $n=1$ のときは Fenchel の定理「 E^2 内の C^2 級閉曲線 C に

対して $\int_C |p| ds \geq 2\pi$ (p : 曲率, ds : 弧長微分) となり、等

号が成立するのは C が convex body の境界であるとき、又、その

ときに限る。」の拡張であり、 $n=2$ のときは Chern-Lashof

の定理「 E^3 の、 S^2 に C^2 -diffeomorphic な C^2 -級閉曲面 S に対して

$\int_S |K| d\sigma \geq 4\pi$ (K : Gauss 曲率, $d\sigma$: 面積要素) となり、等号が

成立するのは S が convex body の境界であるとき、又、そのとき

に限る。」の拡張となっている。等号が成立するのは C または S

の natural imbeddings が tight であるときに限るからである。

このことは次の等式から考えれば明らかである: S を E^{n+1} 内の

C^2 級閉曲面とし、 K : Gauss 曲率、 $d\sigma$: 面積要素、 $\varphi: S \hookrightarrow E^{n+1}$ を

natural imbedding とすれば

$$(2) \quad \int_S |K| d\sigma = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \# cr.(z \cdot f) d\sigma_z.$$

(unit vector)

但し、 z は内積によって E^{n+1} 上の linear form と考え、

$\# cr.(z \cdot f)$ は $z \cdot f$ の critical points の数とし、又 $d\sigma_z$ は

単位球 $|z|=1$ 上の面積要素とする。($|z|=1$ 上の measure 0 の

集合を除いて $z \cdot f$ は Morse function であることに注意する。)

※

さて上の公式(2)を念頭におくと、tight の定義において $\forall z \in V_c$ に対して $(zf)_c$ が必要以上に複雑でない」ということは 3 と

(*) 3 とする z の E^N の unit vector z に対して zf の critical points の数が最小値をとる。

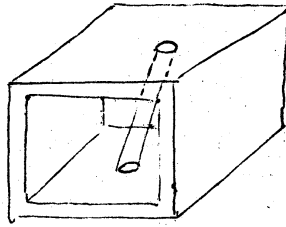
とするのが、一番まっとうらしい。以後 tightness をこのように定義する。

再び公式(2)をもとって次のような問題を考えよう。

S を 2 次元 closed manifold とするとき、 $f: S \rightarrow E^3$ によって z, K を S 上に定義すれば (2) によって

$$\frac{1}{2\pi} \int_S |K dz| \geq 4 - \chi \quad \chi: S \text{ の Euler characteristic}$$

この式で等号をとれるか、どうか、は一般に open problem である。 $S = S^1 \times S^1$ のとき肯定的、 $RP(2)$ については否定的。
2. non-orientable z について、次のようなものに対しては ~~否定的~~
 $\Rightarrow$ 肯定的:



例 4. $\mathbb{RP}(2) \subset E^5$ を tight に imbed しよう. 写像 $h: S^2 \rightarrow (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2) \in E^6$ を考えよう. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $h(x) = h(-x)$ であるから, h は 2 次の多項式に分解される:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\quad} & E^6 \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathbb{RP}(2) & \xrightarrow{\quad f \quad} & E^5 \end{array}$$

この f が代数幾何における Veronese map である. f は確かに h と E^3 上の非退化二次形式 (non-degenerate quadratic form) によって tight である.

S^2 上 6 個の critical points (符号を除く 2 3 個) をとると判る. また, tight であることはこのように判る. 一般に M を n 次元 closed manifold, $f: M \hookrightarrow E^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ (smooth) が tight であるとき, $M = \mathbb{RP}(n)$ f は Veronese である (W. Pohl) が知られている.

与えられた closed manifold の tight imbedding を許すかどうか、については、次の定理が得られている。

定理. M が $(p-1)$ -connected, closed $2p$ -manifold であるとする。又 M が E^N への tight imbedding を許すとする。このとき次のどちらかが成立する。

① $N - 2p = 1$ or 2 (このとき M : parallelizable)。

② M の self-intersection-number 1 の S^p がある (この場合 $2p = 4, 8, 16$)

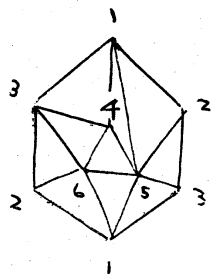
この定理を「かえは」、tight imbedding を許さな manifolds の例を大量につくることもできる。例えば S^9 上の S^9 (又は S^9 exotic) bundle はそのような例である。

最後に、例 4 に ~~関係~~ 関連して、次の予想を述べよう。

予想. $f: \mathbb{R}P(2) \hookrightarrow E^5$ を topological tight imbedding とすると、 f は Veronese であるか。次のようは piecewise-

8

linear π imbedding $2''$ to $3 \cup$:



(1, 2, 3, 4, 5, 6 is 5次元単体の
頂点) .