

Foliated principal GL_r -bundles の特性類

北大 理学部 鈴木 治夫

1. M を paracompact Hausdorff 微分可能な n 次元多様体とし, $\mathcal{F}$ を M の上の微分可能な codimension q の foliation とする。 M に Lie 群が作用し, orbits の次元が同一 $(n-q)$ ならば, M の codimension q の foliation が定まる。 この意味で, foliation は変換群の理論と関連をもつ。 Foliation $\mathcal{F}$ をもつ多様体 M を $(M, \mathcal{F})$ と表わすことにする。 $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ は, 微分可能な principal GL_r -bundle $p: E \rightarrow M$ で, E は right GL_r -invariant な微分可能 foliation $\mathcal{F}_E$ をもち, その各 leaf は $\mathcal{F}$ の leaf の p に関する被覆となるものとする。 $\mathcal{F}_E \in \mathcal{F}$ の lifted foliation と言う。 本論の目的は, $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ の Bott 特性類の構成と, $E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつとき, その vanishing theorem を得ることである。 P. Molino [3] は foliation の normal bundle の frame bundle が transversal projectable connection をもつ場合を扱っ

ているが, M が codimensions q, r の foliations $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{F}$ も $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ の tangent bundle F が $\mathcal{F}'$ の tangent bundle F' の subbundle になっている場合には, $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ が構成され, これに Bott 特性類の vanishing の議論が適用される。

2. $(M, \mathcal{F})$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の接続は, $\mathcal{F}_E$ の leaf がその接続に関して horizontal であれば transversal といわれる. gl_r を GL_r の Lie algebra, $I(gl_r)$ を gl_r の invariant polynomials の algebra とする. また $\nabla^1 \in E(M, p, GL_r)$ の transversal connection とする. $E(M, p, GL_r)$ が transversal connection をもつことは, 容易にみられる。

補題 2. 1. R^1 を ∇^1 の M 上の曲率形式とし, $\varphi_i \in I(gl_r)$, $\deg \varphi_i = i$ とすると, $i > q$ に対して, $\varphi_i(R^1) = 0$ となる。

証明 $R^{1\alpha} = (R_{ij}^{1\alpha})$ を $E(M, p, GL_r)$ の座標近傍 U_α 上の R^1 の表示とする. R^1 は $\mathcal{F}$ の leaves に沿って 0 だから, $I_\alpha(F)$ を $F|_{U_\alpha}$ の定義イデアルとすると, $R_{ij}^{1\alpha} \in I_\alpha(F)$ となる. ゆえに $i > q$ に対して, $\varphi_i(R^{1\alpha}) \in I_\alpha(F)^{\mathcal{F}^1} = \{0\}$ となる. 証明終

$\mathcal{F}$ の leaf を L で表わす. R を実数直線とすると, $\mathcal{F} \times R = \{L \times R \mid L \in \mathcal{F}\}$ は $M \times R$ の上の codimension q の微分可能 foliation となる. 写像 $p \times \text{id} : E \times R \rightarrow M \times R$ は $(M \times R, \mathcal{F} \times R)$

の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M \times R, p_{\text{id}}, GL_r)$ を定める。

その lifted foliation は $(\mathcal{F} \times R)_E = \mathcal{F}_E \times R$ である。 $\nabla, \bar{\nabla}$ を

$E(M, p, GL_r)$ の接続 ω , $\theta, \bar{\theta}$ をその接続形式とする。

$E(M \times R, p_{\text{id}}, GL_r)$ の上の gl_r -valued 1-form $\tilde{\theta} \in$,

$$\tilde{\theta}(\partial/\partial t) = 0 \quad (t \text{ は } R \text{ の座標}),$$

$$\tilde{\theta}(X) = (1-t)\theta(X) + t\bar{\theta}(X) \quad X \in T_{(e,t)}(E \times \{t\}) = T_e(E) \times \{t\},$$

によって定める。 $\tilde{\theta}$ は $E(M \times R, p_{\text{id}}, GL_r)$ の上の horizontal

space field を定めるから、その上の接続 $\tilde{\nabla}$ を定める。これに

$$\tilde{\nabla} = (1-t)\nabla + t\bar{\nabla} \text{ とかく。}$$

一般に、微分可能な principal bundle の接続の曲率形式 ω は閉形式だから、任意の $\varphi_i \in I(gl_r)$ に対して $d(\varphi_i(\omega)) = 0$ となる。

$\bar{\nabla}$ の M 上の曲率形式 $\in \bar{\mathcal{K}}$ とかくとき、de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性によって、

$$[\varphi_i(\bar{\omega})] = [\varphi_i(\bar{\mathcal{K}})] \in H_{\text{DR}}^{2i}(M)$$

となる。 $[\varphi_i(\bar{\mathcal{K}})]$ は φ_i に対する Pontrjagin 特性類 と呼ばれるものである。

補題 2.1 から、次の Bott vanishing theorem の一般化が得られる。

系 2.2. (P. Molino [2]) $(M, \mathcal{F})$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の Pontrjagin 特性類は、 $2 \cdot \text{codim. } \mathcal{F}$ より大きい次元に対して 0 となる。

次に foliation の特性類を構成するための準備の補題を述べておく。

補題 2. 3. $\nabla^1, \bar{\nabla}^1$ を, $(M, \mathcal{F})$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の transversal connections とするとき, $\hat{\nabla}^1 = (1-t)\nabla^1 + t\bar{\nabla}^1$ は, $(M \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$ の上の $E(M \times \mathbb{R}, p \times id, GL_r)$ の transversal connection とある。

証明は, 接続 $\hat{\nabla}^1$ の定義から容易に得られる。

補題 2. 4. 実数上の $r \times r$ 行列 A に対して, invariant homogeneous polynomials $c_i \in$

$$\det(I + tA) = 1 + \sum_{i=1}^r t^i c_i(A)$$

によって定義すれば,

$$I(gl_r) = R[c_1, c_2, \dots, c_r]$$

となる。

証明は R. Bott [1, Appendix A] 参照。

$\nabla^0 \in$ principal bundle $E(M, p, GL_r)$ 上の リーマン接続とし, R^0 を ∇^0 の M 上の曲率形式とする。 $A_c^*(M) \in M$ 上の複素数係数の微分形式の algebra とし, 準同形 $\lambda(\nabla^0), \lambda(\nabla^0, \nabla^1) :$

$I(gl_r) \rightarrow A_c^*(M) \in$,

$$\lambda(\nabla^0)(\phi_i) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^i \phi_i(R^0) \quad i=0, 1,$$

$$\lambda(\nabla^0, \nabla^1)(\phi_i) = \hat{p}_*(\lambda(\nabla^0, \nabla^1)(\phi_i) | M \times I),$$

$\hat{p}_* : A_c^*(M \times I) \rightarrow A_c^*(M)$ は trivial bundle $\hat{p} :$

$M \times I \rightarrow M$ に関する integration along the fibre,

$$\nabla^{0,1} = (1-t)\nabla^0 + t\nabla^1 \quad (t \in \mathbb{R})$$

と定義する。 R. Bott [1] と同じ計算方法によつて,

$$\lambda(\nabla^0)(c_{2i-1}) = 0 \quad 1 \leq 2i-1 \leq r,$$

$$d\{\lambda(\nabla^0, \nabla^1)(c_{2i-1})\} = \lambda(\nabla^1)(c_{2i-1})$$

が得られる。 他方, 補題 2.1 によつて, $\lambda(\nabla^1)$:

$R[c_1, \dots, c_r] \rightarrow A_C^*(M)$ は, q より大きい次数の元 $\in 0$ に写すから, differential algebra $WO_{q,r} \in$,

$$R[c_1, \dots, c_s] / (\deg > q) \otimes \wedge(h_1, h_3, \dots, h_\ell)$$

$$s = \min(q, r), \quad \ell = \max\{2m+1 \leq r\},$$

$$d(c_i) = 0, \quad d(h_i) = c_i \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$d(h_i) = 0 \quad i > s$$

によつて定めると, R -algebra homomorphism λ_E :

$$WO_{q,r} \rightarrow A_C^*(M) \text{ が,}$$

$$\lambda_E(c_i) = \lambda(\nabla^1)(c_i) \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$\lambda_E(h_i) = \lambda(\nabla^0, \nabla^1)(c_i) \quad i = 1, 3, \dots, \ell$$

によつて定義される。 上に述べた $\lambda(\nabla^0, \nabla^1)$ の性質から, λ_E

は cochain map であり, R -algebra homomorphism λ_E^* :

$$H^*(WO_{q,r}) \rightarrow H_{DR}^*(M; \mathbb{C}) \in \mathbb{Z}1 \text{ をおこす。}$$

命題 2. 5. λ_E^* は, $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ によつて定まり, ∇^0, ∇^1 のとり方によらない。

証明 $\nabla^1, \bar{\nabla}^1$ を $(M, \mathcal{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ の transversal connections とすると $\tilde{\nabla}^1 = (1-t)\nabla^1 + t\bar{\nabla}^1$ ($t \in \mathbb{R}$) もまた $(M \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M \times \mathbb{R}, p_{\text{id}}, GL_r)$ の transversal connection となる。他方 ∇^1 のリーマン接続は、リーマン接続を通して微分可能ホモトピーとなる。ゆえに、de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性により結論が得られる。証明終

$Im(\lambda_E^*)$ の元を、 $(M, \mathcal{F})$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の Bott の特性類 と呼ぶことにする。

3. $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ の transversal connection は、局所的に $\mathcal{F}$ に transversal な M の submanifold 上の、 $E(M, p, GL_r)$ の restriction の接続の、 $\mathcal{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projection に関する逆像となるとき、projectable と呼ばれる。 ∇^w を $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ の transversal projectable connection (C.T.P.) とする。前節の Bott の特性類の構成において、 ∇^1 として ∇^w を用いるとき、 ∇^w は局所的に q 次元多様体上の接続から引き起こされた接続であるから、 $\lambda(\nabla^w) : R[c_1, \dots, c_r] \rightarrow A_c^*(M)$ は、次数が $[q/2]$ より大きい元をすべて 0 に写す。したがって、differential algebra $WO'_{\frac{q}{2}, r}$ を、

$$R[c_1, \dots, c_{s'}] / (\deg > \frac{q}{2}) \otimes \Lambda(h_1, h_3, \dots, h_\ell)$$

$$s' = \min([\frac{q}{2}], r), \quad \ell = \max\{2m+1 \leq r\}$$

$$d(c_i) = 0, \quad d(h_{i'}) = c_i \quad 1 \leq i' \leq s'$$

$$d(h_i) = 0 \quad i > s'$$

によって定めるとき, R -algebra homomorphism $\lambda_E :$

$$WO'_{\frac{q}{2}, r} \rightarrow A_C^*(M) \text{ が,}$$

$$\lambda'_E(c_i) = \lambda(\nabla^1)(c_i) \quad 1 \leq i \leq s'$$

$$\lambda'_E(h_i) = \lambda(\nabla^0, \nabla^1)(c_i) \quad i = 1, 3, \dots, \ell$$

によって定義され, R -algebra homomorphism $(\lambda'_E)^* :$

$$H^*(WO'_{\frac{q}{2}, r}) \rightarrow H_{DR}^*(M; \mathbb{C}) \text{ を引き起こす。}$$

$WO'_{\frac{q}{2}, r}$ の cocycles は,

$$c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes 1,$$

$$c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu} \quad 2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leq \beta \leq \mu\}) > \frac{q}{2},$$

の 1 次結合であることに注意しておく。

命題 3. 1. Cohomology class

$$(\lambda'_E)^*[c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}]$$

は, $2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leq \beta \leq \mu\}) \neq \frac{q}{2} + 1$ ならば, ∇^ω, ∇^0 のとり方によらない。とくに q が偶数ならば, $(\lambda'_E)^*$ は ∇^ω, ∇^0 のとり方によらない。

証明 $\nabla^\omega, \bar{\nabla}^\omega \in (M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ の transversal projectable connections ω , $\bar{\omega}$ に関する

transversal submanifolds $N, \bar{N}$ の上の, $E(M, p, GL_r)$ の restrictions の接続の, $\mathcal{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projections による逆像になっているとする。 $N, \bar{N}$ の間に, 明らかに, 自然な同所微分位相同形があり, $\nabla^w, \bar{\nabla}^w$ は $E(M, p, GL_r)$ の, $\mathcal{F}$ に関する同-transversal submanifold N の上における restriction の接続の, $\mathcal{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projection による逆像としてよい。 接続 $\tilde{\nabla}^w = (1-t)\nabla^w + t\bar{\nabla}^w$ ($t \in \mathbb{R}$) は, $(M \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M \times \mathbb{R}, p \times id, GL_r)$ の上の, transversal connection z' あり, また, $E(M \times \mathbb{R}, p \times id, GL_r)$ の, $M \times \mathbb{R}$ の codimension $q+1$ の foliation $\{\mathcal{F} \times \{t\}\}$ 上の foliated principal GL_r -bundle の構造に対して, $\tilde{\nabla}^w$ は transversal projectable connection となる。 したがって, $\tilde{\nabla}^w$ を用いて定められる cochain map $\chi'_E :$
 $WO'_{q,r} \rightarrow A^*(M)$ に対して, $2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_{\alpha} + \min\{j_{\beta} | 1 \leq \beta \leq \mu\}) > q+1$ ならば,

$$d(\chi'_E(c_{i_1} \cdots c_{i_{\lambda}} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_{\mu}})) = 0$$

となる。 他方二つのリーマン接続は, リーマン接続を通して互に微分可能ホモトピーとなる。 ゆえに de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性によって結論が得られる。 証明終

定理 3. 2. $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r -bundle

$E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connection ∇^w をもつとする。 $\tau : WO_{q,r} \rightarrow WO'_{\frac{q}{2},r}$ を natural projection による cochain map とし, その induced cohomology homomorphism を τ^* とかくとき,

$$\begin{array}{ccc} H^*(WO_{q,r}) & \xrightarrow{\lambda_E^*} & \\ \downarrow \tau^* & \searrow & \\ H^*(WO'_{\frac{q}{2},r}) & \xrightarrow{(\lambda_E')^*} & H_{DR}^*(M; \mathbb{C}) \end{array}$$

は可換となる。

証明 $z \in WO_{q,r}$ で $dz=0$ ならば, $d\tau z = \tau dz = 0$ 。

$\lambda_E^w : WO_{q,r} \rightarrow A_{\mathbb{C}}^*(M)$ を ∇^w , ∇^0 によって定められる cochain map とすると, $\lambda_E'(\tau z) = \lambda_E^w(z)$ となる。 他方, ∇^w は transversal connection だから, $[\lambda_E^w(z)] = \lambda_E^*[z]$ 。

証明終

$Im(\lambda_E')^*$ の元を $(M, \mathfrak{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ の, transversal projectable connection に関する Molino の特性類 と呼ぶことにする。

定理 3.2 によって, $(M, \mathfrak{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつとき, いくつかの Bott の特性類は 0 となる。

系 3.3. 定理 3.2 の条件の下で,

$$\gamma = c_1 \cdots c_{i-1} \otimes h_{i,1} \cdots h_{i,\mu}$$

$$1 \leq i_1, \dots, i_s \leq \min(q, r) = s$$

$$1 \leq j_1, \dots, j_\mu \leq r$$

$$\sum_{\alpha=1}^s i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leq \beta \leq \mu\} > q$$

とすると*, $2(\sum_{\alpha=1}^s i_\alpha) > q$ ならば, $\lambda_E^*[\gamma] = 0$.

M を paracompact Hausdorff 微分可能多様体とし, $\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}'$ を codimensions がそれぞれ q, r の, M の上の微分可能 foliations とする. $F, F' \in \mathcal{F}, \mathcal{F}'$ の tangent bundles で, F が F' の subbundle であるとする. $Q = T(M)/F'$ の frame bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ は $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle とあることがわかっている. これに系 3.3 を適用して, 次のような結論を得る.

系 3.4. $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ の Bott の特性類の準同形を λ_E^* :

$H^*(WO_{q,r}) \rightarrow H_{DR}^*(M; \mathbb{C})$ とする. $(M, \mathcal{F})$ の上の $E_T(M, p_T, GL_r)$ が transversal projectable connection を持つならば, 特性類

$$\lambda_E^*[c_{i_1} \cdots c_{i_s} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}]$$

$$1 \leq i_1, \dots, i_s \leq \min(q, r) = s$$

$$1 \leq j_1, \dots, j_\mu \leq r$$

$$\sum_{\alpha=1}^s i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leq \beta \leq \mu\} > q$$

は, $2(\sum_{\alpha=1}^s i_\alpha) > q$ ならば, 0 となる.

注意, 系 3.4 にあいて, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ として取れば, M の

foliation $\mathcal{F}$ が transversal projectable connection Σ を許容する (すなわち, $(M, \mathcal{F})$ の Σ の foliated principal GL_r -bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ が transversal projectable connection Σ を持つ) ならば, $\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey class $\lambda_{\Sigma}^*(c_1^{\frac{r}{2}} \otimes h_1)$ は 0 となることが示されている。

文 献

- [1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, 1-76.
- [2] P. Molino, Classes caractéristiques et obstruction d'Atiyah pour les fibrés principaux feuilletés, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272 (1971), A1376-A1378.
- [3] ———, Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projectable, Topology 12 (1973), 371-325.