

Fusion Algebras and Mapping Class Groups

河野俊文 (九大理)

1. Introduction

Fusion algebra は 1980 年代後半, E. Verlinde によって 2次元共形場理論にあらわれる“場のオペレーター”の coupling を記述するために導入された ある種の可換な associative algebra で, Verlinde algebra ともよばれている. E. Verlinde は, この algebra が共形場理論の modular 変換 S を記述する行列によつて“対角化”されることを指摘し, 一連の character formula を提唱した. Fusion algebra の構造は代数的組み合わせ論の association scheme とよく似ており, 今後, 両方の分野の共同研究により発展することが期待される. 一方, fusion algebra は Riemann 面の mapping class group (Teichmüller modular group) の表現を与えていて, 3次元多様体の位相不変量にも応用されている. まず, Verlinde 以来, よく研究されている $SU(2)$ -WZW (Wess-Zumino-Witten) model から解説する.

2. $SU(2)$ - WZW model の fusion rule

物理的背景については、文献 [BPZ] などを参照していただくことにし、ここでは対象とする algebra のみを具体的に述べる。 K を positive integer として、固定する。この数は、しばしば level とよばれることもある。 R_K を、 $\{v_j\} \ 0 \leq j \leq \frac{K}{2} \quad (j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots)$ ただし $v_0=1$ を生成元とし、次のように構造定数 N_{ijk} で定義される可換な associative algebra とする。

$$v_i \cdot v_j = \sum_k N_{ijk} v_k$$

ここで

$$N_{ijk} = \begin{cases} 1 & (*) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(*) の条件は、

$$\begin{cases} |i-j| \leq k \leq i+j \\ i+j+k \in \mathbb{Z} \\ i+j+k \leq K \end{cases}$$

で、はじめの2つの条件が、いわゆる Clebsch-Gordan condition である。 R_K は、 $sl(2, \mathbb{C})$ の表現環のある種の truncation とみなすことができる。 ここで

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{K+2}$$

とおき、

$$w_i = S_{0i} \sum_m S_{im} v_m$$

と変換すると, $w_i \cdot w_j = \delta_{ij} w_j$ が成立する. これは代数的には, 等式

$$\frac{S_{ij} S_{ik}}{S_{0i}} = \sum_m S_{im} N_{mj k}$$

と同値で, この種の一連の等式を Verlinde formula とよぶこともある. 最近, T. Takata により, 量子群の 1 の中根における表現論と 3次元多様体の link の不変量についての [R-T] の手法を用いた, 見通しのよい証明が与えられた.

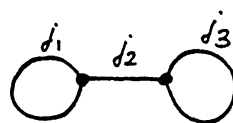
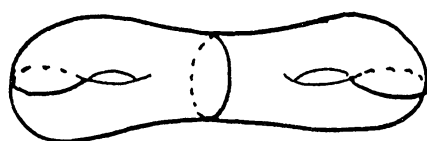
ここで注目すべき点は, 行列 S が Kac-Peterson [K-P] によって得られた $A_1^{(n)}$ -type の affine Lie 環の character の modular 変換 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ による変換規則と一致していることである. つまり $\{\chi_j\}$ $0 \leq j \leq \frac{K}{2}$ を level K integrable highest weight module の character とするとき,

$$\chi_j(-\frac{1}{\tau}) = \sum S_{ij} \chi_i(\tau)$$

$$\chi_j(\tau+1) = \exp 2\pi\sqrt{-1}(\Delta_j - \frac{c}{24}) \chi_j(\tau)$$

ここで $\Delta_j = \frac{j(j+1)}{K+2}$, $c = \frac{3K}{K+2}$ が成立している.

この行列 S と $T = \text{diag}(\exp 2\pi\sqrt{-1}(\Delta_j - \frac{c}{24}))$
 および fusion matrix $(F_{ij}[\begin{smallmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{smallmatrix}])$ (具体的には
 q -6j-symbol の $q = \exp \frac{\pi\sqrt{-1}}{k+2}$ における値で与えら
 れる) を用いて, Riemann 面の mapping class
 group の projectively linear representation を構成
 することができる ([M-S], [K] 参照). 具体的
 には, compact Riemann 面 Σ について下図のよ
 うに その trinion (3つ穴のあいた球面) への分割
 を考え, その dual graph をとる. (以降これを fix する)



dual graph の edge に half integer $0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{k}{2}$
 のいずれかのラベルをつけ 各 vertex では fusion alg.
 の定義に用いた (*) の条件をみたすとする. このような
 ラベル, つきのグラフ全体と 一対一に対応する basis
 をもつ vector space を $Z(\Sigma)$ とする. (*) 上の
 S, T, F を用いて mapping class group
 の $Z(\Sigma)$ への作用を構成できる. また
 グラフを別の選び方で決めたときの vector space
 との同一視が F によって与えられている.

$$\text{Diagram 1} = \sum_i F_{ij} \begin{bmatrix} d_2^i & d_3^i \\ d_1^i & d_4^i \end{bmatrix} \text{Diagram 2}$$

Moore-Seiberg は, initial data S, T, F などが mapping class group の表現を与えるための, 一連の条件を polynomial equation として書き下した. この中には pentagon, hexagon などの relation が含まれている. Tannaka-Krein duality の拡張として, これらの関係式を組織的に研究する. 試みか" なされている. また $[K]$ では, この表現を用いて, 3次元多様体の位相不変量が定義された.

$$(*) \quad \dim Z(\Sigma) = \sum_j (S_{0,j})^{2-2g} \quad \text{で与えられる.}$$

3. 有限アーベル群に付随したモデル

前節では edge に $sl(2, \mathbb{C})$ の表現をのせたモデルをみつかったが, fusion algebra が有限アーベル群の群環となるように構成することも可能である. 簡単のため $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (有限巡回群) とする algebra として $\mathbb{C}[G]$ つまり 生成元が $\{e_j\}$ $j=0, 1, \dots, k-1$ で structure constant N_{ij}^l は $l \equiv i+j \pmod{k}$ のとき 1 で他は 0 である.

この algebra について §2 と同様の構造が存在する.

$$\Delta_l = \frac{ml^2}{2k} \quad \left(\begin{array}{l} l=0, \dots, k-1 \\ (k,m)=1 \text{ であり } k \text{ が odd} \\ n \text{ ときは } m \text{ even とする.} \end{array} \right)$$

このとき

$$S_{\ell\ell'} = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp 2\pi\sqrt{-1} (\Delta_{\ell+\ell'} - \Delta_\ell - \Delta_{\ell'})$$

とおくとこれは $\mathbb{C}[G]$ を対角化しさらに T を $\text{diag}_\ell (\exp 2\pi\sqrt{-1} \Delta_\ell)$ とおくと S, T は modular group の relation を 1 の 8 乗根の不定性を除いて満足する. ここで ambiguity は Gauss sum

$$G(m, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=0}^{k-1} \exp \frac{\pi\sqrt{-1} m}{k} l^2$$

により計算される. この種の $SL(2, \mathbb{Z})$ の表現に関連した 3次元多様体の不変量をあげておく.

M は closed orientable 3-manifold, であり

M が framed link $L = L_1 \cup \dots \cup L_n \subset S^3$

の Dehn surgery により得られているとする.

$G = \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$, $k_i | k_{i+1}$ とし

$(k_i, m_i) = 1$, m_i even if k_i odd と

おとし $m_1, \dots, m_n$ を fix する. L の linking matrix の signature を σ とする.

このとき

$$I_G^m(M) = \frac{[G(m_1, k_1) \cdots G(m_n, k_n)]^{-\delta}}{|G|^{m/2}} \sum_{\lambda} e^{n\pi i \sum_j \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle} a_{ij}$$

は M の homotopy invariant である. ここで

(a_{ij}) は L の linking matrix. $\lambda : \{1, \dots, n\}$

$\rightarrow G$ として $\vec{l}_i = (l_{i1}, \dots, l_{in}) \in G$ へ

ついて $\langle \vec{l}_i, \vec{l}_j \rangle = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} l_{i\alpha} l_{j\alpha}}{k_{\alpha}}$ とする.

$G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ k : even のときは Gochi, Ohtsuki, Murakami - Okada により調べられている.

G を非可換とするとき $\text{Cent}([G])$ について同様の構成を試みるのは興味ある問題であろう. S' との直積を考え, 3次元的な計算で fusion algebra を構成した [D-W] の仕事がある.

References

- [BPZ] Belavin - Polyakov - Zamolodchikov,
Nucl. Phys. B 241, 33 - (1984)
- [D-W] Dijkgraaf - Witten
Comm. Math. Phys. 129, 393 - (1990)
- [K] Kohno, Topological invariants for 3-manifolds ---
to appear in Topology
- [M-S] Moore - Seiberg
Comm. Math. Phys. 123, 177 - (1989)
- [R-T] Reshetikhin - Turaev, Invariants of 3-manifolds ---
to appear in Invent. Math.
- [V] Verlinde, Nucl. Phys. B 300, 360 - (1988)
- [K-P] Kac - Peterson, Adv. Math. 53, 125 - (1984)