

Einstein 計量と Seiberg-Witten monopole 方程式に 付随する幾つかのゲージ理論的不変量の消滅定 理について

(Einstein metrics and vanishing theorems for gauge
theoretic invariants arising from Seiberg-Witten
monopole equations –LeBrun conjecture and related topics–)

石田 政司 * (上智大学・理工学部)
Masashi Ishida (Sophia University)

1 本稿の目的と構成

本稿の目的は、反自己双対 Einstein 4 次元多様体の Seiberg-Witten 不変量 (以下、SW 不変量) の消滅性に関する Claude LeBrun 氏の予想 [13] (以下、LeBrun 予想) に関する筆者の結果について本研究会の際にお話させて頂いた内容とそれに関連した事柄を非専門家でもある程度まで読み進められるようにできる限り平易に解説すること、である。そのため結果の証明の詳細よりも結果にいたる動機などをなるべく述べることにした。しかし、結果自身を正確に述べるために記述が複雑になってしまった個所もあることをあらかじめお断りしておく。主定理は以下の第 4 章で述べる定理 A である。

本稿の構成を述べておく。第 2 章では、本稿の核をなす LeBrun 予想を、(私見を交えて) 予想する根拠も含めて述べる。第 3 章では、SW monopole 方程式から構成される 4 次元多様体に対する 4 つの微分同相不変量について簡単に紹介する。第 4 章では、第 2 章、第 3 章の内容を踏まえて、主定理である定理 A の主張とそれに至る動機を述べる。特に、位相に関するある条件の下では LeBrun 予想が正しい場合がある事を述べる。第 5 章では、主定理の証明の概略を述べるための準備として、SW monopole 方程式から自然に現れる積分不等式の族について述べる。第 6 章では、第 5 章の内容を踏まえて主定理

*Supported in part by the Grant-in-Aid for Young Scientists (B), Japan Society for the Promotion of Science, No.15740046

の証明の概略を述べる。証明には、単純なのだが細かい計算が必要であり、その部分は述べてもあまり興味がないと判断して省略した。ここまでの内容は、本研究会の際に非常に大雑把ではあるが、述べさせて頂いた。第7章以降で、お話しなかったが、密接に関連する内容を紹介する。第7章では、退化した symplectic 構造を一般の4次元多様体が持つという視点から、4次元多様体の「リーマン的擬正則幾何 (Riemannian pseudo-holomorphic geometry)」を展開しようとする Taubes の理論からの LeBrun 予想への筆者のアプローチについて紹介したい。まだ完全な理解には程遠いといわざる終えないが、予想解決への有効なアプローチの一つに成り得るのではないかと期待している。特に Taubes 定数というものを導入する。最後の第8章では、Taubes 定数、複素曲面上の定スカラー曲率 Kähler 計量の存在に関する予想、そして LeBrun 予想の間の興味深い関係を述べることにする。

謝辞：今回お話をさせて頂いた話題について1年近くほったらかしにしていたのですが、講演とこの原稿を書くという作業を通して、もう一度最初から考え直す機会を持つことができ大変に有意義でした。講演の機会を与えて下さった本研究集会の代表者であり元同僚でもある、田丸博士さんに感謝致します。さらに、研究の初期段階での筆者の勘違いをはじめとした重要な点を指摘下さり、またこの研究自身に興味を持ち励まして下さった Claude LeBrun 氏に感謝致します。さらに、今回に限らず講演の後など折りにふれ、筆者など考えもつかない深い洞察に基づく鋭いコメントや示唆を下さる小林亮一先生にこの場を借りて感謝の意を表したいと思います。

2 LeBrun 予想の根拠

以下、向き付けられた閉4次元多様体 X に対して、 $b^+(X)$ を X の交叉形式の正の固有値の数とする。 $b^+(X)$ は、 X に任意にリーマン計量 g を与えたとき、その g に関して自己双対な調和2形式全体の成す空間 $\mathcal{H}_g^+$ の次元に等しい事を注意しておく。また特に断らない限り、以下考える4次元多様体 X は $b^+(X) > 1$ を満たすと仮定する。

さて、本稿の主題である LeBrun 予想とは、LeBrun 氏の論文 [13] で述べられている以下の3つの予想の事を指す：

予想 1 4次元実双曲多様体 $\mathcal{H}^4/\Gamma$ の SW 不変量は消滅する。

予想 2 複素 (2次元) 双曲多様体の複素構造からくる向きを逆にした4次元多様体 $\overline{\mathbb{C}\mathcal{H}^2}/\Gamma$ の SW 不変量は消滅する。

ここで一つ注意しておく、上記予想において実双曲多様体を複素双曲多様体にすると予想は成立しない。それは複素 (2次元) 双曲多様体の SW 不

変量は消滅しないことが知られているからである。またここでは、 SW 不変量は雑に言うと、 SW monopole 方程式の解をある適当な意味で数えた個数の事を指すとだけ書いておく。より正確には第3章を参照せよ。もう一つの予想は次のように述べられる。

予想 3 負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 4次元多様体の SW 不変量は消滅する。

4次元多様体上のリーマン計量は、その計量のワイル曲率の自己双対成分が消滅してしまうとき、反自己双対と呼ばれる。Einstein 計量がさらに反自己双対であるとき、反自己双対 Einstein と呼ばれる。負スカラー曲率反自己双対 Einstein 計量を許容する4次元多様体はどのようなものがあるのだろうか？1990年初頭まで盛んだった反自己双対計量の研究の (Taubes [19] による) 一つの大きな帰結は「4次元多様体上の反自己双対計量の存在には障害がない」ということであつた¹。もう少し正確に言うと、任意に与えられた4次元多様体に $\mathbb{C}P^2$ (複素射影平面の複素構造からくる向きを逆にしたもの) を十分多く連結和することによって反自己双対多様体にできるということがわかっている。この結果と SW 不変量における幾つかの結果を組み合わせると「 SW 不変量が消滅しない負スカラー曲率反自己双対4次元多様体は無限に存在する」という事がわかってしまう。この事実より、Einstein という条件は上記予想からは一般には落とせない事がわかる²。一方、負スカラー曲率反自己双対がさらに Einstein でもある場合は、その存在、非存在については有効な事は殆ど何もわかっていないと言える。即ち、そのような多様体の例としては、予想に出てくる $\mathcal{H}^4/\Gamma$ か $\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma$ のみしか知られていない。Folklore であるが、負スカラー曲率反自己双対 Einstein 4次元多様体にはこれら2つの系列しかない、と信じられているようである。このように予想1と予想2は予想3の特殊なケースに他ならない。では何故予想を3つに分けているのか？これは本人に聞いた事がないので想像の域を出ないのだが、おそらく、予想3をいきなり解くのは非常に困難なので、まずは予想1と予想2を解き、それを足がかりにして一般の場合を解きたいという願望があるのではないかと想像する。しかしそのためには、 $\mathcal{H}^4/\Gamma$ や $\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma$ といった商多様体の特殊な幾何構造をできるだけ用いないでそれぞれの予想を解くのが望ましいと言える³。

¹少し脱線するが、この結果は微分幾何的に興味深い意味を持つだけでなく、複素幾何的にも興味深い意味を持つ。物理学者ペンローズの創始による所謂、ツイスター空間 (ある性質を持つ3次元複素多様体) が (反) 自己双対計量には付随する。よって上記の (反) 自己双対計量の豊富性はそのままツイスター空間の豊富性を誘導する。しかしながら、(反) 自己双対計量に限ったこの対応は現在完全に古典的と見なされているようである。ここ最近数年の物理における (Witten による) ツイスター弦理論 (twistor string theory) の発展に伴って、数学的にも上記の対応は、もっと一般的な微分幾何と複素幾何の対応 (a new kind of twistor correspondence) に進化し、深化もしている。

²しかし、スカラー曲率の L^2 -ノルムに関するある条件の下では、落とせる場合がある。

³勿論、商多様体の特殊な幾何構造を用いて解ければ、それはそれで重要な結果である。また、負スカラー曲率反自己双対 Einstein 4次元多様体が上記の2つの系列しかないことを証

次に上記予想をそのように予想する根拠を述べる。そのために論文 [13] で導入された、4次元多様体上の自己双対調和2形式の長さ (length) の定数性を測る2つの不変量の定義を述べる：

定義 4 X を4次元多様体とし、 g をそのリーマン計量とする。また $b^+(X) \geq 1$ と仮定する。このとき、2つの不変量 $\theta(X, g)$ 、 $\nu(X, g)$ を次で定義する：

$$\theta(X, g) = \min_{\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}} \cos^{-1} \left(\frac{\int_X |\omega| d\mu_g}{\text{vol}_g^{1/2} (\int_X |\omega|^2 d\mu_g)^{1/2}} \right)$$

$$\nu(X, g) = \min_{\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}} \frac{\int_X |d\sqrt{|\omega|}|^2 d\mu_g}{\int_X |\omega| d\mu_g}$$

ここで $\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}$ は非自明な自己双対調和2形式であり、また $\text{vol}_g = \int_X 1 d\mu_g$ は (X, g) の total volume を表す。

もし、リーマン計量 g に関して自己双対な調和2形式 ω でその長さが定数のものが存在すれば、即ち、 $|\omega| = \text{定数}$ であるものがあれば、定義から直ぐわかるように、 $\theta(X, g) = 0$ 、 $\nu(X, g) = 0$ が従う。また逆に $\theta(X, g) = 0$ 、もしくは $\nu(X, g) = 0$ であれば、長さが定数の自己双対調和2形式が存在することもわかる。この意味で、これら2つの不変量は、長さが定数である自己双対調和2形式が存在するための障害を与える。しかし、残念な事にこれらの不変量の値を具体的に計算する方法は知られていない。定義4の下、LeBrun氏は次の結果が成立することを指摘した：

定理 5 ([13]) (X, g) を $b^+(X) > 1$ を満たし、スカラー曲率 $s_g = -12$ の反自己双対 Einstein 4次元多様体とする。このとき次が成立する：

$$0 < \mu(X, g) \leq 2 \quad (1)$$

一方、次の評価が成立すると仮定する：

$$\mu(X, g) \geq 2 - \sqrt{3} = 0.268... \quad (2)$$

このとき、 $SW_X \equiv 0$ である。

この定理の主張は次のように言い換えた方が理解しやすい：もし $s_g = -12$ の反自己双対 Einstein 4次元多様体 (X, g) の SW 不変量が消滅しないならば

$$\mu(X, g) < 2 - \sqrt{3} = 0.268...$$

明して、逆に予想3を予想1と予想2に帰着させ、特殊な幾何構造を使って予想を解決する、という道も有り得る。

つまり、 (X, g) 上にはその長さが“ほとんど定数”である非自明な自己双対調和 2 形式が存在する。既に述べたように、長さが定数である非自明な自己双対調和 2 形式が存在すれば $\nu(X, g) = 0$ であることに注意せよ。ここで飛躍して、 SW 不変量が非自明ならば、 $\mu(X, g) = 0$ 、つまり (X, g) 上には、長さが定数である非自明な自己双対調和 2 形式が存在するとしてみる。一方、Armstrong [1] の結果から一般の負スカラー曲率反自己双対 Einstein 4 次元多様体上には定数長を持つ非自明な自己双対調和 2 形式は存在しないことが判明している。よって両者は矛盾する。これから、 $s_g = -12$ の反自己双対 Einstein 4 次元多様体 (X, g) の SW 不変量は消滅してしまうだろうと予想される。非常に弱い根拠なのだが、これが LeBrun 氏の予想の根拠である。よって $s_g = -12$ の場合、LeBrun 予想は「 $\mu(X, g) = 0$ が成立する」という主張であるとも言え換える事ができる。

さて、LeBrun 氏の論文には定理 5 に述べた $s_g = -12$ の場合のみが記されているが、実はこの条件は落とせる。しかし、一般の場合は評価 (2) ではなく、次の評価になることを証明することができる：

$$\mu(X, g) \geq \frac{|s_g|}{12}(2 - \sqrt{3}) \quad (3)$$

一方、評価 (1) は次のように変化する：

$$0 < \mu(X, g) \leq \frac{|s_g|}{6} \quad (4)$$

つまり、スカラー曲率の絶対値が大きくなればなるほど、上の不等式の右辺の値も大きくなっていく。言い換えると、一般の反自己双対 Einstein 4 次元多様体 X の SW 不変量が非自明だからといって、 X 上にその長さが“ほとんど定数”である非自明な自己双対調和 2 形式が存在する、とは言えなくなってしまうことに注意せよ。よって $s_g = -12$ の場合のように飛躍して、 SW 不変量が非自明ならば、 $\mu(X, g) = 0$ だろうとは到底予想できない。このことから推測するに、 $s_g = -12$ を仮定しない一般の場合の予想の根拠は、ただそのほうが主張として美しい、という以上の意味はないのではないのかと筆者には思える。この意味で、反例が存在しても全くおかしくない状況にある。一方、もう一つの難点は、すでに述べたように不変量 $\theta(X, g)$ 、 $\nu(X, g)$ を具体的に計算する方法が知られていない事にある。筆者は、 $\mu(X, g)$ とあるスペクトル不変量の類似性に着目して、 $\mu(X, g)$ に関する評価をラプラシアン固有値を使って評価する事が出来ないか考察したが、わからない量をよりわからない量で評価するといったことになり筋が悪いようである。以上の事情により、評価 (2) または評価 (3) を実際に満たす負スカラー曲率反自己双対 Einstein 4 次元多様体の例は全く知られていない。それ故、予想に対する実例などは全く知られていない。以上の事情により、現在までに予想に対して有効な結果は全く知られていないと言ってよいと思う。

3 SW monopole 方程式とゲージ理論的不変量

この章では、SW monopole 方程式のとそれに付随する微分同相不変量の定義を、非常に大雑把ではあるが、ふり返ることにする。以下、 X を $b^+(X) > 1$ を満たす 4 次元閉有向多様体とする。ここで再び $b^+(X)$ は X の交叉形式の正の固有値の数である。またリーマン計量 g と spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を取っておく。このとき spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ に付随して、2 つの (rank 2 の) 複素ベクトル束 $S_{\mathfrak{s}}^{\pm}$ と 1 つの複素直線束 $\mathcal{L}_{\mathfrak{s}}$ が定まる。摂動 SW monopole 方程式とは、 $\mathcal{L}_{\mathfrak{s}}$ の接続 A と $S_{\mathfrak{s}}^+$ の滑らかな切断 ϕ の対 $(A, \phi) \in \mathcal{C}(X) := \mathcal{A}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{s}}} \times \Gamma(S_{\mathfrak{s}}^+)$ を変数とする次の非線形偏微分方程式系のことを言う：

$$D_A \phi = 0, \quad -iF_A^+ = q(\phi) - t\omega$$

ここで ω は非自明な自己双対 2 形式、 t は定数とする。また $D_A : \Gamma(S_{\mathfrak{s}}^+) \rightarrow \Gamma(S_{\mathfrak{s}}^-)$ はリーマン計量 g の Levi-Civita 接続と接続 A から決まる Dirac 作用素、 F_A^+ は接続 A の曲率の自己双対成分 (g に関する Hodge $*$ -作用素に関し、 $\wedge^2 T^*X$ を ± 1 固有空間 $\wedge_{\pm}^2$ に直和分解したときの $\wedge_+^2$ 成分) である。そして $q(\phi)$ は ϕ についての 2 次の項である⁴。さて、この摂動 SW monopole 方程式を使用して 4 次元多様体 X の微分同相不変量を構成することができる。摂動 SW monopole 方程式の解空間 $\mathcal{S}$ には自然に $C^\infty(X, S^1)$ が作用し、その作用による商空間を

$$\mathcal{M}_X(\mathfrak{s}, g, \omega) (\subset \mathcal{B}(X) := \mathcal{C}(X)/C^\infty(X, S^1))$$

と書き SW monopole moduli 空間と呼ぶことにする。よく知られているように SW monopole moduli 空間は向き付け可能、コンパクト、有限次元多様体になり、特にその次元 $d_{\mathfrak{s}}$ は次で与えられる：

$$d_{\mathfrak{s}} = \frac{1}{4}(c_1(L_{\mathfrak{s}})^2 - 2\chi(X) - 3\tau(X))$$

ここで、 $\chi(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X)$ はオイラー数、 $\tau(X) := b^+(X) - b^-(X)$ は符号数 ($b^-(X)$ は X の交叉形式の負の固有値の数) である。標準的な方法で SW monopole moduli 空間に向きを指定することができ、指定した向きを 0 と書くことにする。このとき、 spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ に対する SW 不変量 SW_X の値 $SW_X(\mathfrak{s})$ を moduli 空間 $\mathcal{M}_X(\mathfrak{s}, g, \omega)$ が定める基本類 $[\mathcal{M}_X(\mathfrak{s}, g, \omega)]^0$ として定義 ($\mathcal{B}(X)$ の次数 $d_{\mathfrak{s}}$ のホモロジー類を定めると解釈) する。即ち、次の写像を誘導する：

$$SW_X : \text{Spin}^c(X) \longrightarrow H_*(\mathcal{B}(X), \mathbb{Z})$$

⁴この 2 次の項は重要な役割をする。その正確な定義は [14] を参照せよ。

ここで $Spin^c(X)$ は X の $spin^c$ 構造 (の同型類) 全体の集合である. 本稿では SW 不変量と言え、この意味での不変量を意味するものとする⁵.

上で導入した不変量は SW monopole moduli 空間の向き付け可能性に着目して導入した不変量であった. 位相幾何学的に (おそらく) 次に問題になるのは、いつ moduli 空間がスピノ構造を持ち得るのか? ということであろう. いつスピノ構造を持つかがわかれば、例えばそのスピノ同境界類を取ることにより不変量が定義できるであろう. この推測は実際に実行可能であることが笹平裕史氏 [18] により示されている. 本稿ではこの不変量を SW スピノ同境界不変量と呼ぶことにする. 以下簡単のために $b_1(X) = 0$ と仮定する. 次の定義を導入する:

定義 6 X を 4 次元多様体とし、 $\mathfrak{s}$ を任意の $spin^c$ 構造とする. $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ が *sc-admissible* と呼ばれるのは次を満たすときである:

$$d_{\mathfrak{s}} + b^+(X) \equiv 3 \pmod{4}$$

ただしここで $d_{\mathfrak{s}}$ は $\mathfrak{s}$ に付随する SW monopole moduli 空間の次元とする.

この定義の下、笹平氏による一つの重要な結果は以下のように述べられる:

定理 7 ([18]) $\mathfrak{s}$ を X 上の *sc-admissible* $spin^c$ 構造とする. このとき $\mathfrak{s}$ に付随する SW monopole moduli 空間 $\mathcal{M}_X(\mathfrak{s}, g, \omega)$ はスピノ構造を許容する.

任意の *sc-admissible* $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ に対する SW monopole moduli 空間は上の定理よりスピノ構造を持つので、そのスピノ同境界類 $[\mathcal{M}_X(\mathfrak{s}, g, \omega)]^{spin}$ を取ることにより不変量を定義することができる:

$$SW_X^{sc} : Spin_{sc}^c(X) \longrightarrow \Omega_*^{spin}$$

ここで、 X 上の *sc-admissible* $spin^c$ 構造 (の同型類) 全体の集合を $Spin_{sc}^c(X)$ と書いた. スピノ同境界類そのものの構造を記述するのは一般に困難なので、 SW スピノ同境界不変量の計算をすることは非常に困難であると考えられる. 一方、与えられたスピノ多様体のスピノ同境界類の情報は、Stiefel-Whitney 類と KO 特性数で完全に記述できることが知られている. そこで、 SW スピノ同境界不変量が与えられた 4 次元多様体に対して掴んでいる情報よりは落ちるのだが、次のよく知られている homomorphism

$$\hat{A}_n : \Omega_n^{spin} \longrightarrow KO^{-n}(pt)$$

⁵ この定義は Witten が最初に導入したものとは (微妙に) 異なる. Witten による定義の場合は SW monopole moduli 空間上の “微分形式” を moduli 空間上で積分することにより定義する. この場合、不変量は整数にその値をとる. さらにこの定義の場合、moduli 空間の次元が奇数である場合、不変量の値はゼロと定義する. ここで導入した定義の場合、次元が奇数の場合でも不変量の値がゼロであるとは限らない点に注意せよ.

に着目して、この homomorphism と SW スピン同境不変量を“合成”した不変量を考えるのはごく自然である：

$$SW_X^{KO} : Spin_{sc}^c(X) \longrightarrow KO^{-*}(pt)$$

本稿ではこれを SW - KO 不変量と呼ぶことにする。

以上の不変量の構成はいずれの場合も SW monopole moduli 空間を経由して定義されるものであった。これに対して moduli 空間を経由せずに不変量を構成する方法が知られている。その構成法は本質的に全く新しい考えによるのもで、Stefan Bauer と古田幹雄氏 ([3], [4]) によるものである。与えられた $spin^c$ 構造 s に対する Bauer-古田による不変量の値は簡潔に表現すると、 SW monopole 方程式から自然に誘導されるヒルベルト空間の間の S^1 -同変写像 (monopole 写像と呼ばれる) の S^1 -同変安定コホモトピー群

$$\pi_{S^1}^{b^+(X)}(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\})$$

の元を (正確には $b_1(X) = 0$ の仮定の下で) 定めると言える。本稿ではその定義にまで遡った詳しい議論を必要としないので、この不変量は上の3つの不変量と同様に次の写像を誘導するとだけ書いておく：

$$SW_X^{sch} : Spin^c(X) \longrightarrow \pi_{S^1}^{b^+(X)}(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\})$$

以上の定義の下、次を導入することにする：

定義 8 与えられた $spin^c$ 構造 s に対して、 $SW_X(s) \neq 0$ が成立するとき、 s に付随する複素直線束 $\mathcal{L}_s$ の第1チャーン類 $c_1(\mathcal{L}_s) \in H^2(X, \mathbb{R})$ を X の SW 基本類と呼ぶ。同様に SW^{sc} 基本類、 SW^{KO} 基本類、 SW^{sch} 基本類を定義する。

以下、本稿において基本類と書いたら上記の4つの基本類の何れかを指すものとする。4つの不変量について知られている事実の一部を定理の形で述べておく：

定理 9 X を $b_1(X) = 0$, $b^+(X) \equiv 3 \pmod{4}$ を満たす任意の symplectic 4次元多様体とする。このとき次が成立する：

- (1) $c_1(K_X)$ は X の SW 基本類である。ここで K_X は X の標準束。しかし、連結和 $X \# X$ は SW 基本類を持たない。
- (2) 連結和 $X \# X \# X$ は SW 基本類を持たないが、 SW^{sc} 基本類、 SW^{KO} 基本類を持つ。しかし、連結和 $X \# X \# X \# X$ は SW 基本類、 SW^{sc} 基本類、 SW^{KO} 基本類の全てを持たない。
- (3) 連結和 $X \# X \# X \# X$ は SW^{sch} 基本類を持つ。
- (4) $b^+(X) > 1$ を満たす任意の4次元多様体 X が SW 基本類、 SW^{sc} 基本類、 SW^{KO} 基本類、 SW^{sch} 基本類の少なくとも一つを持つとする。このとき、リーマン計量、摂動項の取り方によらずに X 上の摂動 SW monopole 方程式に解が存在する。

この事実より、特に、 SW 基本類は持たないが、 SW^{sc} 基本類、 SW^{KO} 基本類、 SW^{sch} 基本類のいずれも持つ 4 次元多様体が無限に存在することを証明することができることに注意しておく。

4 主定理と LeBrun 予想の拡張

さて、第 2 章で述べたように、LeBrun 予想に対する実例は全く知られていない状況にある。また、予想する根拠の弱さから反例が存在しても全く不思議ではないと述べた。一方、第 3 章で述べたように、 SW monopole 方程式に付随する有効なゲージ理論的不変量は現在までに少なくとも 4 つ構成することができる。特に重要な点は、 SW 不変量は消滅してしまうが、他の 3 つの不変量は消滅しない 4 次元多様体が無限に存在するということであつた。そこで本稿では次の（非常に困難ではあるが、興味深いと思われる）問いを考えてみる：

問題 10 SW monopole 方程式に付随する 4 つのゲージ理論的不変量に対して LeBrun 予想は成立するのだろうか？ また一方、各不変量に対して予想に対する実例、反例が存在するだろうか？

現時点ではこの問いに対して少なくとも次のように答える事ができる。次が本稿の主定理である：

定理 A 4 つの不変量それぞれについてある位相に関する条件の下、LeBrun 予想が成立する場合がある。特に、 SW スピン同境不変量 SW_X^{sc} 、 SW - KO 不変量 SW_X^{KO} が消滅する、4 次元実双曲多様体 $\mathcal{H}^4/\Gamma$ と複素双曲多様体の複素構造からくる向きを逆にした 4 次元多様体 $\overline{\mathbb{C}\mathcal{H}^2}/\Gamma$ が存在する。

主定理の主張の「ある位相に関する条件」は少々複雑なので、第 6 章で改めて具体的に述べることにする。正確には 5 つの定理に分けて正確な主張を述べる。またこの結果は、LeBrun 予想が少なくとも 4 つの不変量に対して成立すべき事を強く示唆する。即ち、LeBrun 予想の拡張として次の予想を掲げることが自然であるだろう：

予想 11 負スカラー曲率反自己双対 Einstein 4 次元多様体に対して SW monopole 方程式に付随する 4 つのゲージ理論的不変量は全て消滅する。

言い換えると、主定理はこの予想に対して一つの証左を与える。もしこの拡張された予想が正しければ、オリジナルの LeBrun 予想の解決だけからは導出することが出来ない帰結 — 反自己双対 Einstein 4 次元多様体の連結和分解に関する新しい帰結 — があることを注意しておく。また予想 11 は、不変量の消滅という形ではなくさらに一般に、 SW monopole 方程式の解の非存在という形にまで定式化可能であると思われるが、おそらくそのような形の問題

は問題としての筋が悪く、上の形の定式化が最も自然で適切であると筆者は考える。

5 LeBrun 型 monopole 不等式

この章では、第4章で述べた定理 A の証明の際に鍵となる、SW monopole 方程式から導出されるある積分不等式について述べることにする。これは本質的には LeBrun 氏の一連の論文 ([12], [13]) で取り扱われた内容であるが、各論文で扱われている積分不等式に対して統一的な視点が欠けているように見受けられる。ここでは LeBrun 氏が証明した不等式達を総括する一つの不等式（本稿では、LeBrun 型 monopole 不等式と呼ぶ）が存在することを強調し、その系として定理 A の証明に使われる不等式を導出する事にする。

唐突だが、次の結果を証明することができる：

定理 12 X を 4 次元多様体、 g を任意のリーマン計量とし、 $b^+(X) > 1$ と仮定する。さらに SW monopole 方程式に付随するゲージ理論的不変量のいずれかが消滅しないと仮定し、 $c_1(\mathcal{L}_s)$ をその基本類とする。また $\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}$ を任意の非自明な g -自己双対調和 2 形式とし、それが定める *de Rham* 類を $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ と書くことにする。このとき、 $\delta \in [0, \frac{1}{3}]$ を満たす任意の実数 δ と計量 g に対して、次が成立する：

$$4 \int_X |d\sqrt{|\omega|}| d\mu_g \leq 4\pi\sqrt{2}c_1(\mathcal{L}_s) \cdot [\omega] + \int_X L(\delta, s_g, W_g^+) |\omega| d\mu_g \quad (5)$$

ただしここで、次のように定義する：

$$L(\delta, s_g, W_g^+) := (1 - \delta)|s_g| - \delta\sqrt{24}|W_g^+|$$

本稿では、不等式 (5) を LeBrun 型 monopole 不等式⁶と呼ぶことにする。証明は少々複雑なのでここでは述べない。この不等式は本質的に LeBrun 氏の

⁶定理の仮定は、SW monopole 方程式に付随するゲージ理論的不変量のいずれかが消滅しない事であるが、この仮定は摂動方程式の解の存在に関するさらに弱い仮定にできる。一方、LeBrun 予想との関連で、私見であるが、その見かけに反して不等式の特に重要な意味を持つ項は、左辺に現れる自己双対調和 2 形式 ω の積分に関する項にある、と思われる。ここでは証明を述べないので詳細は省かざるおえないが、この積分項が存在し得る理由の一つに ω が消える点の集合 (nodal set) の測度が 0 であること、より正確にはハウスドルフ次元が 2 以下であることが効いている。つまり積分を取る前にはこの nodal set Z の情報はぬぐえないが、積分を取るという操作を通じて Z の情報が消去されている。 Z が空集合であれば、 ω は X 上の symplectic 構造を定める。一方、空集合でなければ、 ω は補集合 $X - Z$ 上の symplectic 構造を定める。 $b^+(X) \geq 1$ を満たす任意の 4 次元多様体 X はこの状況にあることに注意せよ。このある種退化した symplectic 構造からの寄与を不等式に反映させるべきであり、この意味でこの不等式は発展の途上にある。おそらく LeBrun 予想の全面的な解決にはこの視点の深い理解が必要であると筆者は考える。これについては第 7 章で、もう少し考えることにする。なおこの視点は Taubes [22], [23], Auroux-Donaldson-Katzarkov [2] の研究にも密接に関係する。

論文に書かれているとってよいのだが、定理の主張自身はどの論文にも述べられていない（特殊な場合が述べられている）ことを注意しておく。証明方法は2通りある。その2つの方法のいずれの場合も、摂動 SW monopole 方程式を使用する：

$$\mathcal{D}_A \psi = 0, -iF_A^+ = q(\psi) - t\omega$$

ここで再び、 ω は非自明な自己双対調和 2 形式、 t は定数とする。証明の際の一つの鍵は SW monopole 方程式に付随するゲージ理論的不変量のいずれかが消滅しないならば、この摂動 SW monopole 方程式に解 (A, ψ) が存在する事である。定理の主張に ω が出てくるのは、摂動方程式の摂動項 ω があるからに他ならない。一方、この不等式が LeBrun 氏の一連の論文で証明された不等式を全て含むことは、各不等式が実際に不等式 (5) から導かれることを直接確かめることで証明する。例えば、応用上重要な LeBrun 氏の次の結果を導いてみる：

系 13 定理 12 と同様の仮定の下で、次の不等式が成立する：

$$\int_X \left((1 - \delta)s_g - \delta\sqrt{24}|W_g^+| \right)^2 d\mu_g \geq 32\pi^2 (c_1^+)^2$$

ただしここで c_1^+ は第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{L}_s) = c_1^+ + c_1^- \in H^2(X, \mathbb{R}) = \mathcal{H}_g^+ \oplus \mathcal{H}_g^-$ の自己双対成分とする。

ここで一つ注意しておくが、定理 12 の主張とは異なり、系 13 の主張には自己双対調和 2 形式 ω に関する情報が現れていない。ある適切な ω を取ることによって LeBrun 型 monopole 不等式 (5) から上記の不等式を以下のようにして証明することができる：

証明. 系の仮定及び、定理 12 の主張より、まず、LeBrun 型 monopole 不等式 (5) が成立する。特に不等式の左辺に現れる積分項は正であるので、特殊な場合として次の不等式を得る：

$$0 \leq 4\pi\sqrt{2}c_1(\mathcal{L}_s) \cdot [\omega] + \int_X L(\delta, s_g, W_g^+) |\omega| d\mu_g$$

ここで、 ω は非自明な任意の自己双対調和 2 形式である。一番右の項に対してシュワルツ不等式を適用して、さらに次の不等式を得る：

$$0 \leq 4\pi\sqrt{2}c_1(\mathcal{L}_s) \cdot [\omega] + \left(\int_X (L(\delta, s_g, W_g^+))^2 d\mu_g \right)^{1/2} \left(\int_X |\omega|^2 d\mu_g \right)^{1/2}$$

さてそこで、基本類 $c_1(\mathcal{L}_g) = c_1^+ + c_1^-$ の自己双対成分 c_1^+ に対して、 $-c_1^+$ を実現する自己双対調和 2 形式 ω 、即ち、 $-c_1^+ = [\omega]$ を満たすものを取る。上の不等式にこれを代入することにより次の不等式を得る：

$$0 \leq -4\pi\sqrt{2}(c_1^+)^2 + \left(\int_X (L(\delta, s_g, W_g^+))^2 d\mu_g \right)^{1/2} \sqrt{(c_1^+)^2}$$

$(c_1^+)^2 = \left(\sqrt{(c_1^+)^2} \right)^2$ であるから、この不等式は次を誘導する：

$$4\pi\sqrt{2}\sqrt{(c_1^+)^2} \leq \left(\int_X (L(\delta, s_g, W_g^+))^2 d\mu_g \right)^{1/2}$$

両辺 2 乗して、直ちに証明すべき不等式を得る、ただしここで

$$L(\delta, s_g, W_g^+) := (1 - \delta)|s_g| - \delta\sqrt{24}|W_g^+|$$

であった事に注意せよ。 ■

一方、証明は少し複雑だが、やはり適切な ω を取ることによって LeBrun 型 monopole 不等式から、次の不等式をも導出することが出来る：

命題 14 定理 12 と同様の仮定の下で、基本類 $c_1(\mathcal{L}_g) = c_1^+ + c_1^-$ の自己双対成分 c_1^+ に対して、 $-c_1^+$ を実現する自己双対調和 2 形式 ω 、即ち、 $-c_1^+ = [\omega]$ を取る。このとき次の不等式が成立する：

$$\kappa_\delta \sqrt{(c_1^+)^2} \geq \frac{1}{c_\delta} \left(\frac{2}{\pi} \int_X |d\sqrt{|\omega|}|^2 d\mu_g + 2\sqrt{2} (c_1^+)^2 \right) \quad (6)$$

ただしここで、次のように定義する：

$$\kappa_\delta = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \int_X (18\delta^2 |W_g^+|^2 + \frac{s_g^2}{24}) d\mu_g}, \quad c_\delta = \sqrt{24(1 - \delta)^2 + \frac{4}{3}}$$

(X, g) がさらに反自己双対 *Einstein* 計量を許容すると仮定するならば、不等式 (6) は特に次の評価を誘導する：

$$(c_1^+)^2 < \frac{4}{3}(2\chi(X) + 3\tau(X))$$

6 定理 A の正確な主張とその証明の概略

本稿の主定理である定理 A の正確な主張を 5 つの定理に分けて述べる. 各定理の証明のアイデア自体は単純であり、この方向で唯一知られた結果である LeBrun 氏による定理 5 の証明のアイデアをある意味で精密化したものであると言ってよい. しかし、少し複雑で泥臭い計算がかなり必要になる. 主定理の証明についてはあくまで概略を述べるに留めるが、特に特殊な場合で実際に計算してみることで感じをつかむことにする. 特に SW スピン同境不変量 SW_X^{sc} の場合を少しだけ詳しく述べることにしたい.

次の命題は単純なのだが、主定理の証明には一つの鍵になる命題である. 証明には定義 6、定理 7 そして SW monopole moduli 空間の性質を使う:

命題 15 X を 4 次元多様体とし、 $b^+(X) > 1$ を満たすと仮定する. また任意の $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ に対して、 $d_{\mathfrak{s}}$ を次で定義する:

$$d_{\mathfrak{s}} := \frac{1}{4}(c_1(\mathcal{L}_{\mathfrak{s}})^2 - 2\chi(X) - 3\tau(X))$$

さて、 $c_1(\mathcal{L}_{\mathfrak{s}})$ を SW^{sc} 基本類とする. このとき、ある整数 ℓ が存在し、 $d_{\mathfrak{s}} = 4\ell + 3 + b_1(X) - b^+(X)$ が成立する. 特に $d_{\mathfrak{s}}$ の非負性によりその整数 ℓ は次の不等式を満たさなければならない:

$$\ell \geq \frac{1}{4}(b^+(X) - b_1(X) - 3)$$

さらにその SW^{sc} 基本類 $c_1(\mathcal{L}_{\mathfrak{s}})$ の自己双対成分 c_1^+ は以下の不等式を満たす:

$$\tau(X) + 16(\ell + 1) \leq (c_1^+)^2$$

一つ注意するが、この命題の証明には反自己双対 Einstein 計量などといった計量に関する条件は何も使われていない. 命題 14 とこの命題をあわせて以下を得ることができる:

定理 16 (X, g) を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体とする. さらに、 $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ に対して SW スピン同境不変量が非自明であると仮定する. 即ち、 $c_1(\mathcal{L}_{\mathfrak{s}})$ を SW^{sc} 基本類とする. このときある整数 ℓ が存在し、 SW^{sc} 基本類 $c_1(\mathcal{L}_{\mathfrak{s}})$ の自己双対成分 c_1^+ は以下の不等式を満たす:

$$\tau(X) + 16(\ell + 1) \leq (c_1^+)^2 < \frac{4}{3}(2\chi(X) + 3\tau(X)) \quad (7)$$

ただしここで ℓ は次の不等式を満たす整数:

$$\ell \geq \frac{1}{4}(b^+(X) - b_1(X) - 3) \quad (8)$$

ここで次の点に注意する. 不等式 (8) は整数 ℓ の下からの評価を与えるが, 不等式 (7) は整数 ℓ の上からの評価を与える. この事実に着目して計算をすると次が成立することがわかる:

命題 17 (X, g) を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 多様体とする. さらに, $spin^c$ 構造 s に対して SW スピン同境不変量が非自明であると仮定する. このとき次を満たす整数 ℓ が存在する:

$$\frac{1}{4}(b^+(X) - b_1(X) - 3) \leq \ell < \frac{\tau(X)}{48} + \frac{1}{3}(b^+(X) - b_1(X) - 2) \quad (9)$$

SW スピン同境不変量に対する定理 A の主張を証明するための鍵の一つは, この命題 17 であると言ってよい. 例えば次のことが直ぐにわかる. 以下, 4 次元多様体 X に対して, 次の記号を導入する:

$$c(X) := \frac{\chi(X) + \tau(X)}{2} \in \mathbb{Z}$$

ここで再び, $\chi(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X)$ はオイラー数, $\tau(X) := b^+(X) - b^-(X)$ は符号数 ($b^-(X)$ は X の交叉形式の負の固有値の数) である.

系 18 $c(X) = 5$, $b^+(X) > 1$ を満たす任意の負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 多様体 X に対して SW スピン同境不変量は消滅する.

証明. 最初に, $c(X) = 5$ という条件は $b^+(X) - b_1(X) = 4$ に同値であることに注意する. もしこの状況で SW スピン同境不変量の値が非自明な $spin^c$ 構造が存在したとすると命題 17 より次を満たす整数 ℓ が存在しなければならない:

$$\frac{1}{4} \leq \ell < \frac{\tau(X)}{48} + \frac{2}{3} \quad (10)$$

一方, 任意の負スカラー曲率反自己双対 (*Einstein*) 多様体 X は $\tau(X) \leq 0$ を満たす. 実際, Hirzebruch signature theorem から次を得る:

$$\tau(X) = \frac{1}{12\pi^2} \int_X (|W_g^+|^2 - |W_g^-|^2) d\mu_g = -\frac{1}{12\pi^2} \int_X |W_g^-|^2 d\mu_g \leq 0$$

ここで勿論, 反自己双対性 $W_g^+ = 0$ を使った. $\tau(X) \leq 0$ という事実より, 不等式 (10) を満たす整数は存在し得ないことは明らかである. 即ち, $c(X) = 5$ という条件の下で X の SW スピン同境不変量は消滅しなければならない. ■

同様の議論により次も簡単に示すことができる:

系 19 $\tau(X) \leq -32$, $c(X) = 11$, $b^+(X) > 1$ を満たす任意の負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 多様体 X に対して SW スピン同境不変量は消滅する.

証明. SW スピン同境不変量の値が非自明な $spin^c$ 構造が存在したとする. $c(X) = 11$ という条件は $b^+(X) - b_1(X) = 10$ に等しいことに注意すると命題 17 より次を満たす整数 ℓ が存在することがわかる:

$$\frac{7}{4} \leq \ell < \frac{\tau(X)}{48} + \frac{8}{3}$$

一方、 $\tau(X) \leq -32$ という仮定より次が従う:

$$\frac{\tau(X)}{48} + \frac{8}{3} \leq 2$$

これらの考察より、 SW スピン同境不変量の値が非自明であれば、 $7/4$ 以上、 2 未満の整数が存在することになる. しかし、これは明らかに矛盾である. ■

類似の議論により、一般に次の消滅定理が成立することを証明できる:

定理 20 X を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 多様体とする. 正の整数 $k \geq 1$ に対して、 X が以下の 3 つの条件のいずれかを満たせば SW スピン同境不変量は消滅する:

1. $c(X) = 4k - 1$. $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 1)$ をさらに仮定する;
2. $c(X) = 4k - 2$. $k \geq 3$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 2)$ をさらに仮定する;
3. $c(X) = 4k - 3$. $k \geq 4$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 3)$ をさらに仮定する.

特にこれらの場合、 SW スピン同境不変量に対する *LeBrun* 予想は正しい.

さて例えば、[6] において Hirzebruch は複素双曲多様体 X の例として $\chi(X) = 15$, $\tau(X) = 5$ を満たすものを構成している. $\bar{X}$ を X の複素構造からくる向きを逆にした 4 次元多様体とする. このとき $\bar{X}$ は $\chi(\bar{X}) = 15$, $\tau(\bar{X}) = -5$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 多様体になる. $c(\bar{X}) = 1 - b_1(\bar{X}) + b^+(\bar{X}) = 5$ が成立するので $b^+(\bar{X}) = 4 + b_1(\bar{X}) > 1$ であることに注意する. すると定理 20 の case 3 において $k = 2$ とすることにより次を得る:

系 21 X を Hirzebruch が構成した $\chi(X) = 15$, $\tau(X) = 5$ の複素双曲多様体とし、 $\bar{X}$ を X の複素構造からくる向きを逆にした 4 次元多様体とする. このとき $\bar{X}$ の SW スピン同境不変量は消滅する. 特に SW スピン同境不変量が消滅する、複素双曲多様体の複素構造からくる向きを逆にした 4 次元多様体 $\overline{C\mathcal{H}^2/\Gamma}$ が存在する.

さて定理 20 の主張には $c(X) = 4k$ の場合が欠如している。残念な事に現時点ではこの場合は何も意味のあることが言えない。一方少なくとも $c(X) = 4k - 3$ の場合はさらに次のことまで証明することができる：

定理 22 X を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体とし、さらに $k \geq 4$ に対して $c(X) = 4k - 3$ 、 $\tau(X) > -16(k - 3)$ の条件を満たすと仮定する。この状況で特に $9 \geq k$ であれば SW スピン同境不変量は消滅する。さらに $n \geq 3$ に対して、 X が以下の 3 つの条件のいずれかを満たせば SW スピン同境不変量は消滅する：

- $\tau(X) \leq -48n + 128$, ここで $k = 3n + 1$
- $\tau(X) \leq -48n + 112$, ここで $k = 3n + 2$
- $\tau(X) \leq -48n + 96$, ここで $k = 3n + 3$.

特にこれらの場合、 SW スピン同境不変量に対する *LeBrun* 予想は正しい。

この定理の証明は少々複雑である上に細かな計算が必要になるのでここでは省略する。一つ注意しておく、定理 20 は本質的に命題 17 だけを使って証明できるのだが、定理 22 を証明するには命題 17 だけでは無理で、さらにスピン同境群の構造を巧くつかって証明する。もう少し正確に言うと定理 22 の仮定の下、命題 17 を使って整数 l の可能性を絞ることができ、それはそのまま SW monopole moduli 空間の次元に関する制限を誘導する。特にその次元が 3 次元かまたは 7 次元であることまで細かい計算の後に決定できる。一方、よく知られているように 3 次元のスピン同境群と 7 次元のスピン同境群は自明である。これらの事事と SW スピン同境不変量のまさにその定義により証明したい消滅定理を得ることができる。

定理 A の主張にある「 SW スピン同境不変量が消滅する 4 次元実双曲多様体 $\mathcal{H}^4/\Gamma$ が存在する」はこの定理 22 から従う。Davis は [5] において $\chi(X) = 26$ の 4 次元実双曲多様体 X を構成している。筆者はこの辺りに暗いのでよく知らないのだが、オイラー数が小さい 4 次元実双曲多様体を構成する事は極めて困難らしく、 $\chi(X) = 26$ の Davis による例が現在知られている中で最小のものであるようである。この 4 次元実双曲多様体は Davis 多様体と呼ばれている。 $\chi(X) = 26$ という事実と一般に 4 次元実双曲多様体の符号数 τ がゼロであるという事実より、Davis 多様体 X は $\tau(X) = 0$, $\chi(X) = 13$, $b^+(X) = 12 + b_1(X) > 1$ を満たす。一方、定理 22 の最初の方の主張「 $k \geq 4$ に対して $c(X) = 4k - 3$ 、 $\tau(X) > -16(k - 3)$ の条件を満たすと仮定する。この状況で特に $9 \geq k$ であれば SW スピン同境不変量は消滅する」より特に $k = 4$ として「負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体 X が $c(X) = 13$ 、 $\tau(X) > -16$ の条件を満たせば SW スピン同境不変量が消滅する」ことがわかる。従って次が従う：

系 23 *Davis* 多様体の *SW* スピン同境不変量は消滅する. 特に *SW* スピン同境不変量が消滅する 4 次元実双曲多様体 $\mathcal{H}^4/\Gamma$ が存在する.

一方、*SW-KO* 不変量の場合は定理 20 と類似の議論とボット周期性を使ってわずかに強い消滅定理を証明することができる：

定理 24 X を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 多様体とする. 正の整数 $k \geq 1$ に対して、 X が以下の 3 つの条件のいずれかを満たせば *SW-KO* 不変量は消滅する：

1. $c(X) = 4k - 1$. $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 1)$ をさらに仮定する；
2. $c(X) = 4k - 2$. $k \geq 3$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 2)$ をさらに仮定する；
3. $c(X) = 4k - 3$.

特にこれらの場合、*SW-KO* 不変量に対する *LeBrun* 予想は正しい.

この消滅定理より *SW* スピン同境不変量の場合と同様にして、*SW-KO* 不変量が消滅する、4 次元実双曲多様体 $\mathcal{H}^4/\Gamma$ と複素双曲多様体の複素構造からくる向きを逆にした 4 次元多様体 $\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma$ が存在することは直ぐにわかる.

次に、定理 20 と定理 22 の証明のアイデアを *SW* 不変量、*SW* 安定ホモトピー不変量の消滅定理の証明に使えないか考える. 定理 22 の方は 3 次元のスピン同境群と 7 次元のスピン同境群は自明性を使っているので、*SW monopole moduli* 空間のホモロジー類を使って定義される *SW* 不変量の消滅定理の証明には使えない. しかし定理 20 の証明のアイデアの方は使えることがわかる. それをもう少し正確に説明するために次の定義を導入することにする：

定義 25 X を 4 次元多様体とし $\mathfrak{s}$ を $spin^c$ 構造とする. $\mathfrak{s}$ に付随する *Dirac* 作用素の指数 $I_{\mathfrak{s}}$ と書くことにする. $\mathfrak{s}$ が偶 (*even*) であると言われるのは $I_{\mathfrak{s}} \equiv 0 \pmod{2}$ を満たすときである. 同様に、 $\mathfrak{s}$ が奇 (*odd*) であると言われるのは $I_{\mathfrak{s}} \equiv 1 \pmod{2}$ を満たすときである.

当然だが、任意の $spin^c$ 構造は上の定義の意味で、偶か奇である、特に次の事実が成立する：

補題 26 任意の *sc-admissible* $spin^c$ 構造は偶である.

ここで *sc-admissible* $spin^c$ 構造の定義については定義 6 を参照せよ. この補題により、実は定理 20 の主張は *sc-admissible* $spin^c$ 構造の言葉ではなく、偶な $spin^c$ 構造に対する主張として書き直すことができる. もう少し正確に言うと、 $c(X)$ と $\tau(X)$ に関して定理 20 と全く同じ仮定の下、*SW monopole moduli* 空間のホモロジー類を使って定義される *SW* 不変量が偶な $spin^c$ 構造に対して消滅することが証明できる. さらに奇な $spin^c$ 構造に対しても、 $c(X)$

と $\tau(X)$ に関して定理 20 と類似の仮定の下、やはり SW 不変量が消滅することが示せる。問題なのは考える $spin^c$ 構造の偶奇で $c(X)$ と $\tau(X)$ に関する条件が異なる点であるが、実は共通する部分がある。 $c(X)$ と $\tau(X)$ に関してその共通する条件の下では考える $spin^c$ 構造が偶であろうと奇であろうと SW 不変量は消滅する。これらのことにより次の消滅定理を得ることができる：

定理 27 X を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体とする。正の整数 $k \geq 1$ に対して、 X が以下の 2 つの条件のいずれかを満たせば SW monopole moduli 空間のホモロジー類を使って定義される SW 不変量は消滅する：

- $c(X) = 4k - 1$, $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 1)$ をさらに仮定する；
- $c(X) = 4k - 3$, $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16k + 24$ をさらに仮定する。

特にこれらの場合、(オリジナルの SW 不変量に対する) *LeBrun* 予想は正しい。一方、正の整数 $k \geq 1$ に対して、 X が以下の 2 つの条件のいずれかを満たせば X は SW 単純型を持つ：

- $c(X) = 4k$, $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16k + 24$ をさらに仮定する；
- $c(X) = 4k - 2$, $k \geq 3$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 2)$ をさらに仮定する。

ここで $b^+(X) > 1$ を満たす任意の 4 次元多様体 X が SW 単純型であるとは、非自明な SW 不変量をもつ任意の $spin^c$ 構造に対する SW monopole moduli 空間の次元が常にゼロであるときをいう。 $b^+(X) > 1$ を満たす任意の 4 次元多様体 X が SW 単純型であるという Witten による予想があることを注意しておく。例えば、symplectic の場合、この予想は正しいことが知られている。

既に述べたように定理 22 を使って、 SW スピン同境不変量が消滅する負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体の实例を見つけることができた。しかし、残念なことに定理 27 は主張自体がまだ弱く、この結果を使って SW 不変量が消滅する实例を見つけることは現在までにできていない。*Hirzebruch* の例から派生する負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体や *Davis* 多様体に対して SW 不変量が消滅するかどうかは原稿を書いている時点では不明であるが、定理 27 の証明のアイデアをさらに精密化することで、例えばこれらの 4 次元多様体について、少なくとも以下のことまでは証明できる：

命題 28 X を *Hirzebruch* が構成した $\chi(X) = 15$, $\tau(X) = 5$ の複素双曲多様体とし、 $\bar{X}$ を X の複素構造からくる向きを逆にした 4 次元多様体とする。もし、 $\bar{X}$ が $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ に対して非自明な SW 不変量を持つならば、 $\mathfrak{s}$ に対応する SW monopole moduli 空間の次元は 1 でなければならない。特に $\bar{X}$ が SW 単純型であれば SW 不変量は消滅する。同様に、もし *Davis* 多様体に対して非自明な SW 不変量を持つ $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ が存在するならば、 $\mathfrak{s}$ に対応する SW

monopole moduli 空間の次元は 1 または 3 でなければならない. 特に *Davis* 多様体が *SW* 単純型であれば *SW* 不変量は消滅する.

他の負スカラー曲率 Einstein 4 次元多様体についても同様の結果を証明することができる. また既に脚注 5 で述べたが、本稿で導入した *SW* 不変量は、Witten が最初に導入したものとは（微妙に）異なり、moduli 空間の次元が奇数である場合でも一般に不変量の値がゼロであるとは限らない事を強調しておく.

最後に *SW* 安定ホモトピー不変量の場合を述べておく. この不変量は moduli 空間というものを經由せずに定義された. しかし、実は *SW* 不変量の場合の消滅定理の証明の手法をほとんど改良せずに使うことで以下の結果を証明することができる:

定理 29 X を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 Einstein 多様体とする. 正の整数 $k \geq 1$ に対して、 X が以下の 2 つの条件のいずれかを満たせば *SW* 安定ホモトピー不変量は消滅する:

- $c(X) = 4k - 1$, $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16(k - 1)$ をさらに仮定する;
- $c(X) = 4k - 3$, $k \geq 2$ であれば $\tau(X) \leq -16k + 24$ をさらに仮定する.

特にこれらの場合、*SW* 安定ホモトピーに対する *LeBrun* 予想は正しい.

さて、細かい計算を全て省いたが、以上の消滅定理に関する 5 つの定理を証明するには少し複雑で泥臭い計算がかなり必要になる. この意味でその証明は全く美しくなく、物事の本質を捉えた証明とはとても言えない. 残念だがこれらの証明方法を精密化しても *LeBrun* 予想とその一般化の全面解決には到底及ばないだろうと思われる. アイデアの本質的な転換が求められているようではない. これについては次の章以降で非常に大雑把ではあるが議論することにしたい.

7 退化した symplectic 構造と LeBrun 型 monopole 不等式の精密化

前章で大まかに述べた主定理の証明から明らかなように、証明における key point の 1 つは *LeBrun* 型 monopole 不等式 (5) から導かれる不等式である. その不等式から得られる評価が強ければ強いほど、主定理の主張も強くなる. よって、我々のアイデアに沿った *LeBrun* 予想の解決のためには不等式 (5) そのものの評価をより精密化する必要がある. またこの評価の精密化の問題は、*LeBrun* 予想に限らず 4 次元多様体上の Einstein 計量の非存在問題にも深く関連しており、幾つかの予想を解くための重要な未解決問題として残されて

いる。種々の状況証拠から、LeBrun 型 monopole 不等式は最良評価ではないと考えられているのである。しかし、LeBrun 型 monopole 不等式の証明の詳細をつぶさに見ても、そのアイデアをさらに発展させることで不等式の評価をさらに上げることは、少なくとも筆者には不可能な事のように見える。そこで評価の精密化の問題にアタックするには、何かしら完全に別のアイデアが必要となるのだろう。さて、脚注6で述べたように、LeBrun 型 monopole 不等式

$$4 \int_X |d\sqrt{|\omega|}| d\mu_g \leq 4\pi\sqrt{2}c_1(\mathcal{L}_S) \cdot [\omega] + \int_X L(\delta, s_g, W_g^+) |\omega| d\mu_g$$

の見落としがちではあるが、重要な、しかし非常に不十分な側面の1つは、左辺の自己双対調和2形式 ω に関する積分項にある。この項が存在し得る理由の一つに、 ω のゼロ点集合 (nodal set) の測度が0であることがあり、積分をする操作により nodal set Z の情報が失われている。この nodal set Z は、4次元多様体 X の自己双対調和2形式 ω が symplectic 形式になろうとしてなれなかった歪みであり、幾何学的に何らかの深い情報を含んでいる可能性がある。特に、補集合 $X - Z$ 上で ω は symplectic 構造を定めている⁷。そこで nodal set Z 上で退化した X の symplectic 構造からの寄与を上不等式に込めることが出来ないかということが1つの興味深い問題として、問いの立て方が少し漠然とはしているが、あげられるだろう：

問題 30 (X, g) を $b^+(X) > 1$ の4次元多様体とし、 SW monopole 方程式に付随するゲージ理論的不変量のいずれかが消滅しないと仮定する。 $\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}$ を (X, g) 上の非自明な自己双対調和2形式とし、その nodal set を Z とする。このとき、リーマン計量 g の情報と Z 上で退化した X の symplectic 構造からの情報の双方を含む LeBrun 型 monopole 不等式型の幾何学的に有効な不等式が存在するだろうか？ またそのような不等式は LeBrun 型 monopole 不等式の精密化を誘導するだろうか？

この問題については、現在完全な解答というには全く程遠いと言わざるおえないのだが、少なくとも以下述べる定理32や定理33の形の解答までは可能である。そしてこれは本質的に Taubes の先駆的な仕事 ([22], [23]) によるところが大きい。正確にその主張を述べるために、次の定義を導入する：

定義 31 ([22], [23]) (X, g) を $b^+(X) > 1$ の4次元多様体、 $\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}$ を (X, g) 上の非自明な自己双対調和2形式、そして Z をその nodal set とす

⁷Symplectic 4次元多様体上の symplectic 構造の moduli 空間の幾何学的構造はあまり理解されていないと言ってよいと思うが、特に moduli 空間が連結でない例の存在が (SW 不変量を応用してやっど) 証明されている。一方、例えば、一般の4次元多様体上の自己双対調和2形式の nodal set 上で退化した symplectic 構造の moduli 空間の幾何は非常に興味深いと思われるが、筆者が知る限りまだ誰も研究していない。連結性、ハウスドルフ性そして moduli 空間上の計量構造など調べるべきことはいくらかでもあると思われるのだが...

る。補集合 $X - Z$ の部分集合 $C \subset X - Z$ が、有限エネルギー擬正則部分多様体 (*finite energy, pseudo-holomorphic subvariety*) と呼ばれるのは以下の条件を満たすときである：

1) 次を満たすコンパクトさらには連結とも限らない正則曲線 C_0 が存在する：固有な擬正則写像

$$\psi: C_0 \longrightarrow X - Z$$

で $\psi(C_0) = C$ を満たすものが存在する。

2) 集積点を持たない可算集合 $K_0 \subset C_0$ が存在し、補集合 $C_0 - K_0$ 上では ψ は埋め込みになっている。

3) 次の積分は有限：

$$\int_{C_0} \psi^* \omega < \infty$$

この定義の下、以下の主張を証明することができる：

定理 32 (X, g) を $b^+(X) \geq 1$ の 4 次元多様体、 $\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}$ をリーマン計量 g について自己双対な束 Λ_2^+ の切断と見なすとき、ゼロ切断と横断的であると仮定する。また、 Z を ω の *nodal set* とする。 s を固定された $spin^c$ 構造とし、 s とリーマン計量 g に対する次の摂動 *SW monopole* 方程式を考える：

$$\mathcal{D}_A \phi = 0, \quad -iF_A^+ = r \left(q(\phi) - \frac{\sqrt{-1}}{4} \omega \right)$$

ただし $r \geq 1$ 。ここで次の仮定をする：

「上限のない列 $\{r_n\} \subset [1, \infty)$ が存在し、各 n に対し、摂動方程式において $r = r_n$ とした方程式に対し、既約な解 (A_n, ψ_n) が存在する」

このとき、補集合 $X - Z$ において有限エネルギー擬正則部分多様体 C が存在して、次の不等式が成立する：

$$4 \int_X |d\sqrt{|\omega|}| d\mu_g + \int_C \omega \leq \xi_1 c_1(\mathcal{L}_s) \cdot [\omega] + \int_X L(\xi, s_g, W_g^+) |\omega| d\mu_g$$

ただしここで

$$L(\xi, s_g, W_g^+) := \xi_2 |s_g| + \xi_3 \sqrt{24} |W_g^+|$$

とし、 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は計量や $spin^c$ 構造のとり方によらない普遍的な定数である。

この定理の主張で注意してほしいのは、自己双対調和 2 形式に関する条件として「 Λ_2^+ の切断と見なすときゼロ切断と横断的である」という条件が入っている点である。Gromov による擬正則曲線に関するコンパクト性定理の非コ

ンパクト版とある条件を満たす計量の列を取るという操作を組み合わせることにより、摂動 SW monopole 方程式に付随するゲージ理論的不変量の何れかが消えないという仮定の下で、「ゼロ切断と横断的」という条件は落とせることがわかる：

定理 33 (X, g) を $b^+(X) > 1$ の 4 次元多様体とし、摂動 SW monopole 方程式に付随するゲージ理論的不変量の何れかが、 $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ に対して、消えないと仮定する。また、 $\omega \in \mathcal{H}_g^+ - \{0\}$ を非自明な自己双対調和 2 形式とし、 Z を ω の *nodal set* とする。このとき、補集合 $X - Z$ において有限エネルギー擬正則部分多様体 C が存在して、次の不等式が成立する：

$$4 \int_X |d\sqrt{|\omega|}| d\mu_g + \int_C \omega \leq \xi_1 c_1(\mathcal{L}_s) \cdot [\omega] + \int_X L(\xi, s_g, W_g^+) |\omega| d\mu_g \quad (11)$$

ただしここで

$$L(\xi, s_g, W_g^+) := \xi_2 |s_g| + \xi_3 \sqrt{24} |W_g^+|$$

とし、 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は計量や $spin^c$ 構造のとり方によらない普遍的な定数である。

さて特に、不等式 (11) において、次の積分項

$$4 \int_X |d\sqrt{|\omega|}| d\mu_g$$

がない不等式は、問題 30 とは全く別の観点から、既に Taubes の論文 [22] の中で証明されている ([22] の Theorem 2.2, Theorem 2.3)。それ故、不等式 (11) は問題 30 に 1 つの部分的解答を与えるということもあるが、その Taubes の不等式の 1 つの精密化になっているという点も興味深いと思われる。証明の詳細はここでは複雑すぎるので書かないが、容易に想像できるように LeBrun 型 monopole 不等式の証明のアイデアと Taubes の不等式の証明のアイデアを組み合わせることで証明される。一方、非常に不満な点は定数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 の正確な値が現時点では明らかでないことである。これは Taubes の不等式においても全く同様である。それ故、不等式 (11) が LeBrun 型 monopole 不等式の精密化を誘導するかどうかは全くわからない。応用上、定数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 の正確な値を求めることは非常に重要な問題となる。しかし定数 ξ_1, ξ_2 が正であることまではわかるので、次の定義を導入することにする：

定義 34 不等式 (11) における普遍的な正定数 ξ_1, ξ_2 に対して、次の比

$$\mathcal{T} := \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

を *Taubes* 定数と定義する。

Taubes 定数と LeBrun 予想との関連は次章で述べることにする. 定数 ξ_3 が正か負かは現時点では不明⁸である. LeBrun 予想との関連でいえば、自己双対 Einstein 計量を扱うのでワイル曲率の自己双対成分 W_g^+ は消滅する. 上の $L(\xi, s_g, W_g^+)$ の定義をみるとわかるが、 $|W_g^+|$ に ξ_3 が掛かっているの、この項は消滅し、 ξ_3 を求める必要がこの場合ないのである. またおそらく、定理 32 と定理 33 の主張は、有限エネルギー擬正則部分多様体の言葉ではなく、Taubes [23] で導入された *SW-admissible Hofer-Wysocki-Zehnder subvariety* の言葉で述べられるべきであると思うが、正確なことは原稿を書いている時点では全く不明なので今後の課題としておく.

8 Taubes 定数、定スカラー曲率 Kähler 計量及び、LeBrun 予想

定義 34 で導入した Taubes 定数は次の形で LeBrun 予想と関連する：

定理 35 (X, g) を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 4 次元多様体とし、 $c(X) := (\chi(X) + \tau(X))/2 \equiv 0 \pmod{2}$ と仮定する. $\mathcal{T}$ を定義 34 で導入した Taubes 定数とするととき以下が成立する：

1. もし $\mathcal{T} > 4\pi\sqrt{6}\cos\theta$ であれば、*SW monopole* 方程式に付随する 4 つのゲージ理論的不変量は全て消滅する. 特に LeBrun 予想は正しい.
2. もし $\mathcal{T} = 4\pi\sqrt{6}\cos\theta$ であれば、 X は *Seiberg-Witten* 単純型を持つ.
3. もし $\mathcal{T} < 4\pi\sqrt{6}\cos\theta$ であれば、*SW monopole moduli* 空間の次元が $d_s = 2\ell$ である任意の spin^c 構造 s に対して *SW monopole* 方程式に付随する 4 つのゲージ理論的不変量は全て消滅する. ただしここで ℓ は次の条件を満たす正定数である：

$$\ell > \left\{ \left(\frac{4\pi\sqrt{6}}{\mathcal{T}} \right)^2 - 1 \right\} \frac{2\chi(X) + 3\tau(X)}{8}$$

この場合、さらにもし X が次を満たせば

$$2\chi(X) + 3\tau(X) \leq \frac{8\mathcal{T}^2}{96\pi^2 - \mathcal{T}^2}$$

⁸ 正確には負にとれるかどうか不明である. LeBrun 型 *monopole* 不等式の場合は $|W_g^+|$ に掛かっている定数は負であった. ξ_3 は $|W_g^+|$ に掛かっているの、適当に $|W_g^+|$ を何倍かする事で ξ_3 は正に取れるが、それは不等式の最良評価を与えるかどうかを考える上では適当な操作ではない. 同様な事情は ξ_2 にもいえる. しかし、 ξ_1 の場合は同様のことは当てはまらない. ξ_1 は $c_1(\mathcal{L}_s) \cdot [\omega]$ に掛かっているがこの項は spin^c 構造や $[\omega]$ のとり方によって正にも負にも成り得るので、 ξ_1 がそのような物の取り方によらずに正であるという主張はずっとデリケートである.

X は *Seiberg-Witten* 単純型を持つ.

既に述べたが、4次元多様体 X が *Seiberg-Witten* 単純型と呼ばれるのは、次を満たすときである： $\mathfrak{s}$ を *SW monopole* 方程式に付随する4つのゲージ理論的不変量のいずれかの値が消滅しない $spin^c$ 構造とすると、次を満たす：

$$c_1(\mathcal{L}_{\mathfrak{s}})^2 = 2\chi(X) + 3\tau(X)$$

言い換えると、*SW monopole moduli* 空間の次元が必ず0となることを言う。

一方、同様に、 $c(X) \equiv 1 \pmod{2}$ のとき次が成立する：

定理 36 (X, g) を $b^+(X) > 1$ を満たす負スカラー曲率反自己双対 *Einstein* 4次元多様体とし、 $c(X) \equiv 1 \pmod{2}$ と仮定する。 $\mathcal{T}$ を定義 34 で導入した *Taubes* 定数とすると以下が成立する：

1. もし $\mathcal{T} \geq 4\pi\sqrt{6}\cos\theta$ であれば、*SW monopole* 方程式に付随する4つのゲージ理論的不変量は全て消滅する。特に *LeBrun* 予想は正しい。
2. もし $\mathcal{T} < 4\pi\sqrt{6}\cos\theta$ であれば、*SW monopole moduli* 空間の次元が $d_{\mathfrak{s}} = 2\ell + 1$ である任意の $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ に対して *SW monopole* 方程式に付随する4つのゲージ理論的不変量は全て消滅する。ただしここで ℓ は次の条件を満たす正定数である：

$$\ell > \left\{ \left(\frac{4\pi\sqrt{6}}{\mathcal{T}} \right)^2 - 1 \right\} \frac{2\chi(X) + 3\tau(X)}{8} - \frac{1}{2}$$

この場合、さらにもし X が次を満たせば

$$2\chi(X) + 3\tau(X) < \frac{4\mathcal{T}^2}{96\pi^2 - \mathcal{T}^2}$$

SW monopole 方程式に付随する4つのゲージ理論的不変量は全て消滅する。

任意の4次元多様体は $c(X) \equiv 0 \pmod{2}$ または $c(X) \equiv 1 \pmod{2}$ を満たすこと、及び $0 < \cos\theta \leq 1$ であることから、2つの定理は特に次を誘導する：

系 37 $\mathcal{T} > 4\pi\sqrt{6}$ であれば *LeBrun* 予想は正しい。

詳細は省くが、上の2つの定理の証明は、本質的にすでにその証明の概略を述べた定理 A のそれとほぼ同様である。定理 A の場合は *LeBrun* 型 *monopole* 不等式を使ったが、今の場合はリーマン的擬正則幾何を使った不等式 (11) を使う点異なる。

一方、Taubes 定数は定スカラー曲率 Kähler 計量に関する以下の予想にも関連する。これを説明したい。\$X\$ をその標準束が豊富なコンパクト Kähler 曲面とする。このとき所謂、カラビ予想の解決より \$X\$ は、その Kähler 類が \$[\omega] = -c_1(X) \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})\$ であるような唯一の Kähler-Einstein 計量を許容することが知られている。Kähler-Einstein 計量は特に定スカラー曲率を持つこと及び、種々の状況証拠から、次の予想が成立するだろうと考えられている：

予想 38 \$X\$ をその標準束が豊富なコンパクト Kähler 曲面とする。このとき任意の Kähler 類 \$[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})\$ は唯一の定スカラー曲率 Kähler 計量を含む。

Taubes 定数とこの予想は次の形で関係する：

定理 39 \$\mathcal{T} > 4\pi\sqrt{6}\$ であれば、予想 38 に対して反例がある。即ち、予想 38 は一般には成立しない。

当然だが、この定理の証明の方法はこの章で既に述べた 2 つの定理のそれとは根本的に異なる。定理の証明のためにはまず不等式 (11) が次の不等式を誘導する事を示す必要がある：

補題 40 \$(X, g)\$ を \$b^+(X) > 1\$ を満たす任意の 4 次元リーマン多様体とし、\$X\$ 上の任意の \$spin^c\$ 構造 \$s\$ に対して、SW monopole 方程式に付随する 4 つのゲージ理論的不変量のいずれかの値が消滅しないと仮定する。このとき、基本類 \$c_1(\mathcal{L}_{s_X})\$ の自己双対成分 \$c_1^+\$ は次を満たす：

$$\left(\int_X s_g^2 d\mu_g \right)^{1/2} + \left(\int_X |W_g^+|^2 d\mu_g \right)^{1/2} \geq \mathcal{T} \sqrt{(c_1^+)^2}$$

ここで \$\mathcal{T}\$ は Taubes 定数である。

この不等式と正の符号数を持つ一般型代数曲面の典型例である小平ファイバー曲面と呼ばれる特殊なケーラー曲面に関する幾何をフルに使った具体的計算の後に定理 39 を証明することができる。即ち、\$\mathcal{T} > 4\pi\sqrt{6}\$ であれば、系 37 と定理 39 により、LeBrun 予想を肯定的に解決できるだけでなく、小平ファイバー曲面を使って予想 38 に対する反例を構成することができるという事になる⁹。

さて本稿では、反自己双対 Einstein 4 次元多様体の SW 不変量に関する LeBrun 予想とその一般化に関する筆者の結果について、駆け足だったが、述べさせて頂いた。主定理の主張は一言で言えば、「オイラー数と符号数に関する

⁹ 実はごく最近、反例が Ross [17] により構成された！ 反例の構成は Thomas-Ross ([15], [16]) による定スカラー曲率 Kähler 計量の存在に対する障害-slope stability-によるものである。種数が 5 以上の代数曲線の直積を使って反例が構成されている。

る位相的な条件の下、LeBrun 予想が成立する場合がある」という事であった。さらに、 SW 不変量以外にも SW monopole 方程式に付随する微分同相不変量が存在することを念頭において、その場合の LeBrun 予想を考察し、特に実際に不変量が消滅する負スカラー反自己双対 Einstein 4 次元多様体が存在することを報告した。一方、残念ながら述べる事が出来なかったが、消滅定理自身は、異なる条件の下ではあるが、反自己双対とは限らない一般の Einstein 4 次元多様体の場合、または Einstein とは限らない一般の反自己双対多様体の場合にまで拡張可能であることがわかる。これらのより一般的な消滅定理は、それらの場合にまで LeBrun 予想の類似が成立する可能性を示唆しており、応用の観点から見ても非常に興味深いと思われる。

References

- [1] J. ARMSTRONG, *On four-dimensional almost Kähler manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 48 (1997), pp. 405–415.
- [2] D. AUROUX, S. K. DONALDSON AND L. KATZARKOV, *Singular Lefschetz pencils*, Geom. Topol. 9 (2005), pp. 1043–1114.
- [3] S. BAUER, M. FURUTA, *Stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I*, Invent. math 155 (2004), pp. 1–19.
- [4] S. BAUER, *Stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: II*, Invent. math 155 (2004), pp. 21–40.
- [5] W. DAVIS, *A hyperbolic 4-manifold*. Proc. Amer. Math. Soc. **93**, 325–328 (1985)
- [6] F. HIRZEBRUCH, *Arrangements of lines and algebraic surfaces*. Arithmetic and geometry, Vol. II, Progr. Math. **36**, Birkhäuser, Boston, Mass. 113–140 (1983)
- [7] M. ISHIDA, *Anti-self-dual metrics and Seiberg-Witten invariants*, Preprints in Mathematics, Sophia University, Sophia-Math 03-06 (2003). submitted
- [8] M. ISHIDA, *Anti-self-dual Einstein metrics, Seiberg-Witten invariants, and pseudo-holomorphic subvarieties for self-dual harmonic 2-forms*, Preprints in Mathematics, Sophia University, Sophia-Math 03-07 (2003). submitted

- [9] M. ISHIDA, *Anti-self-dual Einstein metrics and vanishing theorems for gauge theoretic invariants arising from Seiberg-Witten monopole equations*, preprint (2005). submitted
- [10] M. ISHIDA, *Monopoles, self-dual harmonic 2-forms and inequalities for finite energy pseudo-holomorphic subvarieties (expanded version of a manuscript written in 2004)*, in preparation.
- [11] M. ISHIDA, *Monopoles, Einstein metrics, and smooth connected sum decomposition*, in preparation.
- [12] C. LEBRUN, *Ricci curvature, minimal volumes, and Seiberg-Witten theory*, Invent. Math., 145 (2001), pp. 279–316.
- [13] C. LEBRUN, *Hyperbolic manifolds, harmonic forms, and Seiberg-Witten invariants*, Proceedings of the Euroconference on Partial Differential Equations and their applications to Geometry and Physics (Castelvecchio Pascoli, 2000) Geom. Dedicata., 91 (2002), pp. 137–154.
- [14] J. MORGAN, *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*, vol. 44 of Mathematical Notes, Princeton University Press, 1996
- [15] J. ROSS AND R.P. THOMAS, *An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics*, math.AG/0412518, to appear in J. Differential Geom.
- [16] J. ROSS AND R.P. THOMAS, *A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties*, math.AG/0412519
- [17] J. ROSS, *Unstable products of smooth curves*, math.AG/0506447
- [18] H. SASAHIRA, *Spin structures on Seiberg-Witten moduli spaces*, preprint, arXiv:math.DG/0404275.
- [19] C. H. TAUBES, *The existence of anti-self-dual conformal structures*, J. Differential Geom., 36 (1992), pp. 163–253.
- [20] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett., 1 (1994), pp. 809–822.
- [21] C. H. TAUBES, *$SW \implies Gr$: From the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves*, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), pp. 845–918.

- [22] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten invariants and pseudo-holomorphic subvarieties for self-dual, harmonic 2-forms*, Geom. Top., 3 (1999), pp. 167–210.
- [23] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten invariants, self-dual harmonic 2-forms and the Hofer-Wysocki-Zehnder formalism*, Surveys in differential geometry, pp. 625–672, Surv. Differ. Geom., VII, International Press, Somerville, MA, 2000.
- [24] E. WITTEN, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett., 1 (1994), pp. 809–822.

Masashi Ishida
Department of Mathematics, Sophia University,
7-1 Kioi-Cho, Chiyoda-Ku, Tokyo 102-8554, Japan
E-MAIL: ishida@mm.sophia.ac.jp