

講座

地盤材料の構成モデル最前線

3. 弾粘塑性モデル—時間依存性挙動の表現—

三 村 衛 (みむら まもる)

京都大学防災研究所 准教授

3.1 はじめに

時間依存性挙動は、土質材料に限らず、金属、プラスチック、木材といった身近な材料においても見ることができ一般的な挙動特性である。同じ固体をこぶしで殴りつける場合とゆっくりとこぶしを押しつけて変形させる状況を考えてみよう。両者で同量変形させた場合、前者では必要となる反力が大きく後者では小さい。こぶしに感じる痛みが異なるのはそのためである。同じ物質を同じ接地面積で同じ量を変形させる場合、変形速度が変われば反力が変わるという身近な一例である。クリープや応力緩和という現象も時間依存性挙動として取り扱うことができる。

一方、土質材料と他の固體材料との大きな違いとして、土には土粒子実質部分と呼ばれる土の粒子とともに、変形に寄与するレベルの間隙が存在し、その中に水と空気を取り込むことができる多層混合体であることがあげられる。この間隙の存在が間隙水圧や空気圧を生じさせ、有効応力という土質材料独特の概念を考えないと正しい解を導けないことの大きな要因となっている。つまり、土質材料における時間依存性挙動は土粒子実質部分と間隙の時間依存性挙動の総体として現れるため、金属やプラスチックの場合に比べて複雑にならざるを得ない。

本章では、あらゆる物質に共有される時間依存性挙動を、土質材料に対して巨視的な物理モデルを用いてどのように表現するかについて、粘性土に対する粘塑性モデルを中心に解説する。なお、本稿では、誌面の制約もあり、一般応力条件下で塑性論に基づいて定式化されたもののみを構成式として取り扱い、一次元応力、ひずみの仮定の下で定式化されている概念については触れないことをあらかじめお断りしておく。また、なるべく平易に述べることを心がけるが、内容の性質上、基本的な説明に数式を用いて説明することが多くなることについてもご了解いただきたい。

3.2 粘塑性構成モデル

3.2.1 超過応力型粘塑性モデル

Perzyna (ペジナ)^{1)~3)}は、材料が降伏した後に粘塑性効果が発揮されると考え、全ひずみ速度を粘塑性効果から独立した弾性成分とその効果を発揮する粘塑性成分の和として次式のように仮定した。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (3.1)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ はひずみ速度テンソルの (i, j) 成分で、上添え字の e, vp はそれぞれ弾性 (elastic), 粘塑性 (viscoplastic) 成分を表している。既に述べたように、粘塑性挙動は右辺第二項にのみ現れることになる。まず、弾性ひずみ速度は次式に示すように Hooke (フック) の法則に従う。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (3.2)$$

ここで、 C_{ijkl} は弾性剛性テンソル、 $\dot{\sigma}_{kl}$ は有効応力速度である。次に、応力空間に静的降伏曲面と動的負荷曲面の存在を仮定することによってひずみ硬化特性を有するひずみ速度依存性構成関係を規定した。まず、静的降伏関数 F を次式のように仮定した。

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^{vp}) = \frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^{vp})}{k_s} - 1 \quad (3.3)$$

ここに、 f は動的負荷関数、 k_s は $k_s = \{\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{vp}\}$ で表されるひずみ硬化パラメータで粘塑性仕事によって規定されることがわかる。

粘塑性ひずみ速度については、次式で示す粘塑性流動則のように仮定される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.4)$$

ここで、 γ は流動パラメータと呼ばれる定数、 Φ は超過応力関数 F を引数とする粘塑性流動関数で、

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F), & \text{for } F > 0 \\ 0, & \text{for } F \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

と仮定される。つまり、静的降伏曲面 ($F=0$; $f=k_s$) の外側における負荷 ($F>0$; $f>k_s$) に対して、動的負荷曲面; $f=k$ との間に応力差 (超過応力) が生じる。Perzyna 型の構成モデルを超過応力型と称するのはこのためである。

誌面の都合上、モデルの理論構造の詳細は省略するが、超過応力型粘塑性モデルに分類されるものとして、足立・岡モデル⁴⁾、Katona (カトナ) による粘塑性 Cap モデル⁵⁾、Baladi and Rohani (バラディとロハニ) による粘塑性 Cap モデル⁶⁾、Zienkiewicz et al. (ジエンキエビッツら) による非関連流動則に基づく粘塑性モデル⁷⁾などがあげられる。Katona モデルでは、引張り領域、破壊線領域、Cap 曲面領域に対する降伏曲面が連続したものとして仮定される。Katona は赤井ら⁸⁾による軟岩の排水クリープ試験結果をシミュレートした結果を実測値と比較して示すとともに、超過応力型粘塑性モデルが加速クリープを表現できない要因を構造に起因する問題

であることを指摘している。この詳細については後段で議論する。

3.2.2 非定常流動曲面型粘塑性モデル

Olszak (オルスザック) and Perzyna⁹⁾

は流動曲面の概念を導入することによって弾粘塑性体理論を提案している。ここでは、弾塑性理論に粘性、時間依存性を規定する内部変数を導入して、時間の経過に伴って変化する負荷曲面が仮定される。この曲面を流動曲面 (flow surface) と呼び、超過応力型とは理論構造の異なる弾粘塑性構成モデルが提案された。彼らによる流動曲面は次式のように表される。

$$F = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{vp}, \beta) = 0 \quad (3.6)$$

ここで β は時間依存性挙動を包含するスカラー量で、元々は金属材料に対して時間の関数としての中性子線の影響を表現するために導入されたものである。式(3.6)を粘塑性ポテンシャルとして粘塑性流動則は次式のように表される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = A \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.7)$$

ここで A は非負の比例定数である。粘塑性流動は常に $F=0$ を満足しながら進み、 $F<0$ の場合には弾性的に挙動する。したがって粘塑性変形の継続条件は以下のように表される。

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{mn}^{vp}} \dot{\varepsilon}_{mn}^{vp} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \dot{\beta} = 0 \quad (3.8)$$

式(3.7)と式(3.8)より、(3.7)における比例定数 A は、

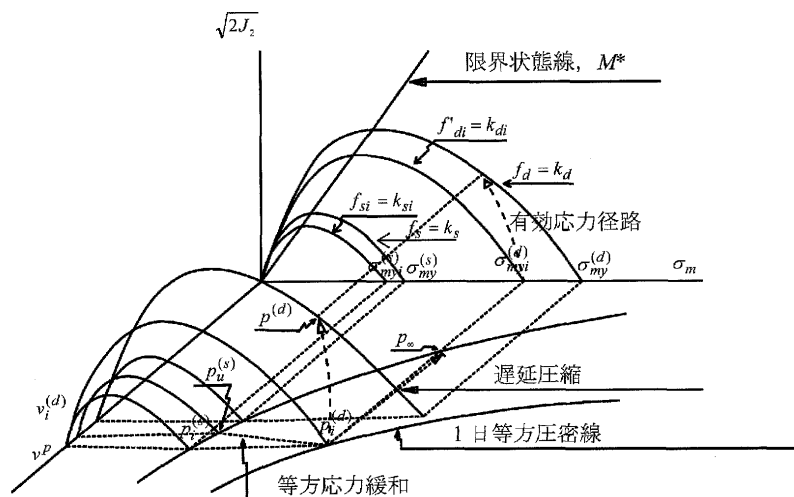
$$A = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \dot{\beta}}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{mn}^{vp}} \dot{\varepsilon}_{mn}^{vp}} \quad (3.9)$$

ここで、このタイプのモデルの特徴として、応力～ひずみ関係を規定する粘塑性流動則に、応力速度項が含まれることがわかる。この項は超過応力型モデルには含まれず、両者の理論構造の最大の相違点として認識しておく必要がある。この理論構造の違いが応力～ひずみ関係にどのように寄与するのかについては、後段で具体的に説明することとする。非定常流動曲面を有する同種のモデルとしては、関口モデル¹⁰⁾、Dragon and Mroz (ドラゴンとムロツ) による岩石系材料に対するモデル¹¹⁾、正規圧密粘土に対する Nova (ノヴァ) によるモデル¹²⁾、松井・阿部によるモデル¹³⁾などがあげられる。

3.3 正規圧密粘土の弾粘塑性構成モデル

3.3.1 足立・岡モデル

足立・岡野¹⁴⁾は静的降伏関数としてカムクレイモデルの降伏関数を規定し、Perzynaの弾粘塑性連続体理論を適用することによって、正規圧密粘土の時間依存性挙動を表現しうるモデルを提案した。足立・岡⁴⁾は、岡¹⁵⁾による一次圧密終了時点であっても正規圧密粘土は静的平衡状態には至らないという仮定を適用し、足立・岡野のモデルをひずみ速度依存性やクリープ、応力緩和だけ



図—3.1 足立・岡モデルの静的降伏曲面と動的負荷曲面⁴⁾

でなく、二次圧密挙動をも表現しうる、より一般化された弾粘塑性構成モデル⁴⁾を提案した。粘塑性流動則など粘塑性成分に関する理論構造については、1.2.1の Perzyna の構成モデルに従う。足立・岡モデルの静的降伏曲面と動的負荷曲面の概要を図—3.1に示す。上添え字 (s), (d) はそれぞれ静的平衡状態および動的状態におけるものであることを示す。図—3.2は一次圧密終了時の平均有効応力 σ_{me} から異なるひずみ速度でせん断を受けた場合の有効応力経路を模式的に示したものであるが、本構成モデルでは、 A_1 と A_2 における粘塑性ひずみが等しくなると仮定されており (同じ平均有効応力 σ_{m0} を有しているため)、ひずみ硬化特性が非弾性 (粘塑性) ひずみによって規定される。

足立・岡モデルの応力～ひずみ関係は次式のように与えられる。

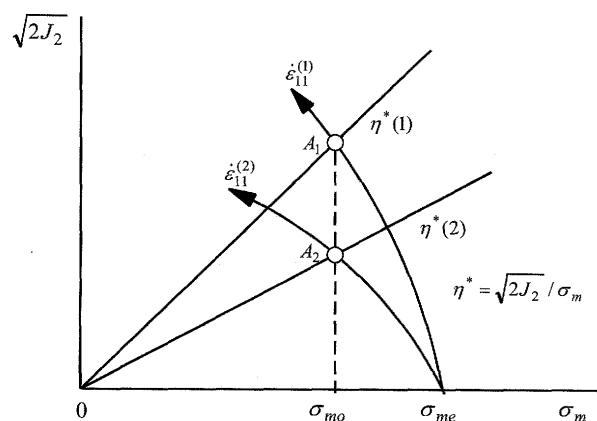
$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = & \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{\kappa}{3(1+e)} \frac{\dot{\sigma}_m}{\sigma_m} \delta_{ij} \\ & + \frac{1}{M^* \sigma_m} \Phi(F) \frac{S_{ij}}{\sqrt{2J_2}} + \frac{1}{3M^* \sigma_m} \Phi(F) \\ & \times \left[M^* - \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m} \right] \delta_{ij} \quad (3.10) \end{aligned}$$

ここで、 M^* は限界状態における応力比 $\sqrt{2J_2}/\sigma_m$ 、 G はせん断弾性定数、 σ_m は平均有効応力 (軸対称応力条件下では p と等価)、 $J_2 = 1/2 S_{ij} S_{ij}$ は偏差応力 $S_{ij} (= \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij})$ の第二不変量で、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。軸対称応力条件下では $\sqrt{2J_2} = \sqrt{2/3} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{2/3} q$ となり、軸差応力に相当する。

式(3.10)中の粘塑性流動関数 $\Phi(F)$ は次式で与えられる。

$$\Phi(F) = c_0 \exp \left[m' \left\{ \frac{\sqrt{2J_2}}{M^* \sigma_m} + \ln \sigma_m - \frac{\sqrt{2J_2}^{(s)}}{M^* \sigma_m^{(s)}} - \ln \sigma_m^{(s)} \right\} \right] \quad (3.11)$$

ここで c_0 , m' は粘塑性パラメータで実験によって決められる。同じ圧密圧力下で圧密された正規圧密粘土を異なるひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{11}^{(1)}$, $\dot{\varepsilon}_{11}^{(2)}$ で非排水せん断した時、ひずみ速度依存性によって図—3.2に示すように挙動する。この時、同じ平均有効応力における偏差応力の差異に着



図—3.2 足立・岡モデルにおけるひずみ速度依存性とひずみ硬化の仮定⁴⁾

目する。それぞれのひずみ速度に対する偏差応力を $\sqrt{2J_2}^{(1)}$, $\sqrt{2J_2}^{(2)}$ とすると、次式が成立する。

$$\ln [\dot{\epsilon}_{11}^{(1)} / \dot{\epsilon}_{11}^{(2)}] = \frac{m'}{M^*} \left[\frac{\sqrt{2J_2}^{(1)}}{\sigma_m} - \frac{\sqrt{2J_2}^{(2)}}{\sigma_m} \right] \quad \dots\dots (3.12)$$

この関係において、 m' 以外は実験による既知の値として得られるので、 m' について解けば粘土固有の値として決定することができる。一方、新たに粘塑性パラメータ C が、 m' と c_0 の関数として以下のように規定されている。

$$C = \frac{c_0}{M^* \sigma_m} \exp \left[-m' \ln \frac{\sigma_{myi}^{(s)}}{\sigma_{me}} \right] \quad \dots\dots (3.13)$$

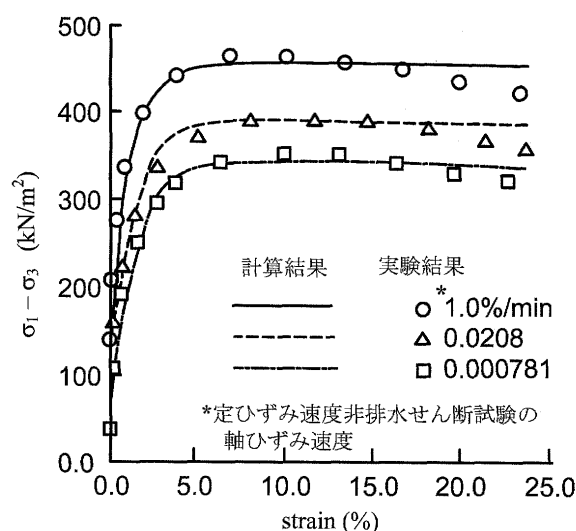
ここで、 $\sigma_{myi}^{(s)}$ は図—3.1 に示すように、静的降伏曲面の初期平均応力で f_{si} の σ_m 軸の切片にあたる。式(3.13)を規定することにより、実験などから直接求めることができないパラメータ、 c_0 と $\sigma_{myi}^{(s)}$ は粘塑性パラメータ C で置き換えられる。

構成モデルの妥当性は、まず要素レベルの室内試験によって行われる。以下に、定ひずみ速度圧密非排水三軸圧縮試験の実験結果を構成モデルによる計算結果と比較した結果を示す。式(3.10)より、軸対称応力条件下における足立・岡モデルの粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ は以下のように表すことができる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \sqrt{2/3} \cdot C \exp \left[m' \left\{ \frac{q}{Mp} + \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) - \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} v^p \right\} \right] \quad \dots\dots (3.14)$$

ここで、 $q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p = 2(\sigma_1 + \sigma_3)/3$, p_0 はせん断直前の平均有効応力 p , e_0 はせん断直前の平均応力 p_0 に対応する間隙比、 λ , κ はそれぞれ圧縮、膨潤指数、 M は破壊時の応力比 q/p を表す。足立・岡モデルによる乱さない大阪湾沖積粘土に対する等方圧密定ひずみ速度非排水せん断試験結果のシミュレーション結果を実験結果と比較して図—3.3 に示す。いずれのケースも計算結果は実験結果を精度よく表現し得ていることがわかる。

ここで、足立・岡モデルが有する特長の一つである、三軸圧縮応力下における非排水せん断強さの解析解による表現について説明する。弾性の応力～ひずみ関係については、個々のモデルによらず、 $\dot{q} = 3G \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^e$ が成り立つ。この関係と式(3.1), (3.14) より次式が満足される。



図—3.3 足立・岡モデルによる定ひずみ速度非排水三軸圧縮試験のシミュレーション¹⁹⁾

$$\dot{q} = 3G \left[\dot{\epsilon}_{11} - \sqrt{2/3} \cdot C \exp m' \left\{ \frac{q}{Mp} + \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) - \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} v^p \right\} \right] \quad \dots\dots (3.15)$$

さらに非排水条件より、

$$v^p = -v^e = -\frac{\kappa}{1+e_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad \dots\dots (3.16)$$

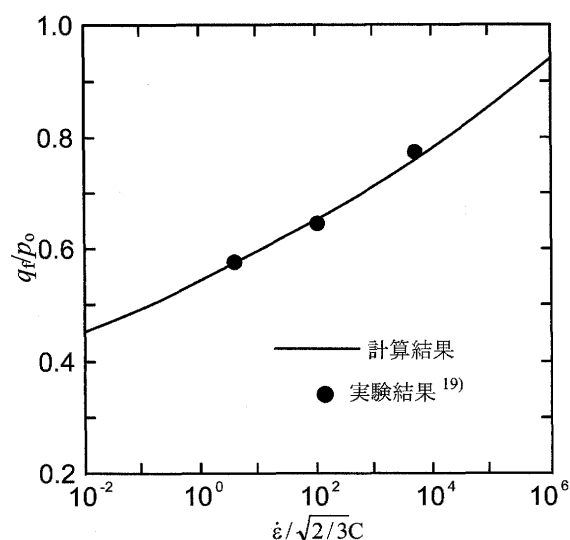
粘土が破壊するときの条件として、 $\dot{q} = 0$, $q = q_f = Mp$ が満足されるので、式(3.15)は次式のように変形できる。

$$\dot{\epsilon}_{11} = \sqrt{2/3} \cdot C \exp \left[m' \left\{ 1 + \ln \frac{q_f}{M \cdot p_0} \left(1 + \frac{\kappa}{\lambda-\kappa} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots (3.17)$$

式(3.17)を q_f について整理することにより、破壊時のせん断応力 q_f は次式のようになる^{16),17)}。

$$q_f = Mp_0 \cdot \left[\exp \{ -(1-\kappa/\lambda) \} \right] \cdot \left[\frac{\dot{\epsilon}_{11}}{\sqrt{2/3}C} \right]^{\frac{\lambda-\kappa}{m'}} \quad \dots (3.18)$$

ここで、式(3.18)右辺における $Mp_0 [\exp \{ -(1-\kappa/\lambda) \}]$ はカムクレイモデルが与える三軸圧縮条件下における非排水せん断強さ¹⁸⁾である。したがって、足立・岡モデルが与える三軸圧縮条件下における非排水せん断強さは、これにひずみ速度効果に乗じた形に帰着することがわかる。また、粘塑性パラメータ m' はべき乗の形で、 C はひずみ速度を打ち消す形で寄与していることがわかる。すなわち、同モデルにおいては、非排水せん断強さ q_f に対して、 C の増減はひずみ速度の減増と等価の効果を与えることになる。また m' も同様であるが、式(3.13)からも明らかのように、 m' と C とは一次独立ではないので、式(3.13)の制約の下で決定しなければならない。一般に微分方程式で記述される構成モデルで、解析解が得られるケースはきわめてまれであり、増分計算によって数値誤差を含んだ近似解が求められるのが通常であるが、足立・岡モデルでは、このように三軸圧縮応力下での非排水せん断強さ q_f が解析解として得られるという大きな特長を有している。大阪湾沖積粘土を用いた実験¹⁹⁾ から得られたパラメータを適用して式(3.18)



図—3.4 足立・岡モデルによる三軸圧縮応力下における非排水せん断強さの解析解と実験値の比較^{16),19)}

によって計算した三軸圧縮応力下における非排水せん断強度比 $q_t/p_0 \sim \log(\dot{\epsilon}/\sqrt{2/3}C)$ 関係を、3種類の異なるひずみ速度で行った実験結果と比較して図—3.4に示す。モデルによって得られる非排水せん断強さは実測値と一致している。足立・岡モデルによる三軸圧縮応力下における非排水せん断強さは、式(3.16)からも明かなように、ひずみ速度の対数に対して下に凸の強い非線形性を有する単調増加傾向を示し、ひずみ速度が大きくなるに従ってせん断強さも増大するという現象を表現している。

3.3.2 関口モデル

非定常流動曲面型モデルの代表的なものとして、本稿では関口による弾粘塑性モデル¹⁰⁾を紹介する。なお、異方性を評価するための応力パラメータ η^* を導入した関口・太田モデル²⁰⁾については、時間依存性の表現に関しては同一の構造を有しているので、モデル自体の説明は文献²⁰⁾に譲る。

非定常流動曲面は粘塑性ポテンシャルとしても機能し、次式のように仮定される。

$$F = \alpha \cdot \ln \left[1 + \frac{\dot{v}_0 \cdot t}{\alpha} \exp \left(\frac{f}{\alpha} \right) \right] = v^p \quad (3.19)$$

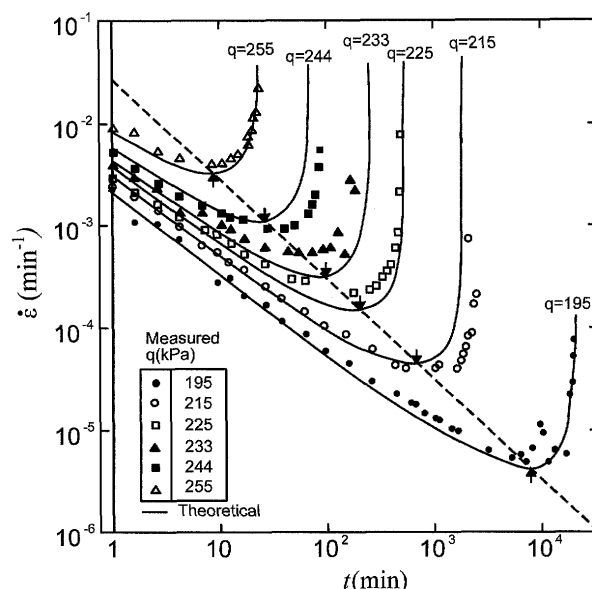
ここで、 α は二次圧縮指数、 t は経過時間、 $\dot{v}_0$ は基準体積ひずみ速度、 f は応力関数、 v^p は塑性体積ひずみであり、硬化パラメータとして機能する。応力関数 f は次式のように定義される。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \ln \frac{\sigma_m}{(\sigma_m)_0} + D \left\{ \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m} - \frac{(\sqrt{2J_2})_0}{(\sigma_m)_0} \right\} \quad (3.20)$$

ここで、 D はダイレイタンシー係数²¹⁾で、限界状態における応力比 M と次式のような関係を有している。

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot M \quad (3.21)$$

また、 $(\sqrt{2J_2})_0$ 、 $(\sigma_m)_0$ はそれぞれの初期値を表す。誘導過程の詳細については文献¹⁰⁾、²²⁾を参照されたい。若干の演算の後、応力～ひずみ関係は次式のように求められる。



図—3.5 関口モデルによる非排水クリープとクリープ破壊の表現と実測値との比較²²⁾ (実験結果は村山ほか²³⁾による)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\partial f / \partial \sigma_{ij}}{\partial f / \partial \sigma_{kk}} \left[\{1 - \exp(-v^p / \alpha)\} \dot{f} + v_0 \exp \left(\frac{f - v^p}{\alpha} \right) \right] \quad (3.22)$$

ここで $\dot{f} = \partial f / \partial \sigma_{kl} \dot{\sigma}_{kl}$ である。式(3.4)、(3.22)より、 $(f - v^p)$ の項は超過応力関数と本質的に同等の機能を果たす。一方、非定常流動曲面型モデルである関口モデルには、超過応力型モデルでは存在しない応力速度項 $\dot{f}$ が含まれ、破壊条件は $\partial f / \partial \sigma_{kk} = 0$ となる²²⁾。三軸圧縮条件下における非排水条件は次式のように表される。

$$v^p = \frac{-\kappa}{1 + e_0} \ln(p/p_0) \quad (3.23)$$

式(3.23)と式(3.19)の後半の等号部分より、関口モデルにおける非排水クリープ破壊時間 t_t が解析解として以下のように得られることがわかっている²²⁾。

$$t_t = \frac{\alpha}{\dot{v}_0} \left[1 - \left(\frac{q}{Mp_0} \right)^{\kappa / (\alpha(1+e_0))} \right] \times \exp \left[- \frac{\lambda \cdot \ln \left(\frac{q}{Mp_0} \right) + \frac{\lambda - \kappa}{M} (M - q_0/p_0)}{\alpha \cdot (1 + e_0)} \right] \quad (3.24)$$

つまり、対象とする粘土のパラメータと初期応力、および載荷せん断応力 q が与えられれば、非排水クリープ破壊に要する時間が誤差なく計算できる。関口モデルによる非排水クリープひずみ～経過時間関係の計算結果を実測値と比較して図—3.5に示す。同図より、関口モデルは粘土の非排水クリープにおける変形・破壊過程を精度よく表現できることがわかる。

3.4 超過応力型モデルと非定常流動曲面型モデルの構造の違いと比較

前章で説明したように、超過応力型モデルと非定常流動曲面型モデルは、基本的な仮定や構造が異なり、いわば別個に構築されたものである。本章では、両者の理論

講 座

表—3.1 超過応力型、非定常流動曲面型弾粘塑性構成モデルの構造比較¹⁷⁾

	$\frac{\dot{p}}{p} X_1 + \frac{\dot{q}}{p} X_2 - X_3 = 0$	$\frac{\dot{p}}{p} X_4 + \frac{\dot{q}}{p} X_5 - X_6 = 0$
	(非排水条件)	(定ひずみ速度条件)
足立・岡モデル (超過応力型)	$X_1 = \frac{\kappa}{1+e_0}$ $X_2 = 0$ $X_3 = -C(M-q/p) \exp\left[-\frac{f-v^p}{*a}\right]$	$X_4 = \frac{\kappa}{1+e_0}$ $X_5 = \frac{M-q/p}{3G/p}$ $X_6 = \dot{\epsilon}_{11}(M-q/p)$
関口モデル (非定常 流動曲面型)	$X_1 = \frac{\kappa}{1+e_0} + **A \cdot D(M-q/p)$ $X_2 = **A \cdot D$	$X_3 = \dot{v}_0 \exp\left[-\frac{f-v^p}{*a}\right]$ $X_4 = -\frac{\kappa}{1+e_0}$ $X_5 = \frac{M-q/p}{3G/p}$
	$X_6 = \dot{\epsilon}_{11}(M-q/p)$	

* $\alpha = (\lambda - \kappa) / m'(1 + e_0)$, ** $A = 1 - \exp(-v^p/\alpha)$

構造を室内三軸圧縮試験のフィールドで比較することを試みる。

まず、実験室でよく行われる圧密定ひずみ速度非排水せん断試験を念頭に置いて両モデルを比べてみよう。表—3.1に連立方程式の形に表記した足立・岡モデルと関口モデルの構造比較¹⁷⁾を示す。同表において、係数 $X_1 \sim X_6$ はそれぞれのモデルから導出される方程式である。定ひずみ速度条件を与える第二式の係数 X_4, X_5, X_6 は両モデルで全く同形となる。また、非排水条件を与える第一式においては、 X_1, X_2 において関口モデルが同一項である $A = 1 - \exp(-v^p/\alpha)$ を付加し、 X_3 においては同一項に足立・岡モデルは $-C(M-q/p)$ を、関口モデルは基準体積ひずみ速度 $\dot{v}_0$ を乗じた形となっている。 X_1, X_2 に関して $A = 1 - \exp(-v^p/\alpha)$ はいわゆる応力速度項から得られるものであり、三村・関口^{24), 25)} は、非定常流動曲面型モデルにおいて応力速度項を無視すれば、超過応力型モデルと同じ構造に帰着することを報告している。一方、 X_3 に関しては、関口モデルの基準体積ひずみ速度が一定値を与えるパラメータであるのに対し、足立・岡モデルの方は一定値を与える粘塑性パラメータ C にせん断過程で刻々変化する $(M-q/p)$ が乗じられた形となっており、全体としてせん断過程で単調に減少することがわかる。

以上のように、超過応力型である足立・岡モデルと非定常流動曲面型である関口モデルを、定ひずみ速度非排水せん断試験をフィールドとして比較すると、両者はかなり類似の構造を有しており、構造の違いは応力速度項の有無と、 X_3 がせん断過程で一定値をとるか、変化するかという点に帰着することがわかる。

次に、非排水クリープ破壊の評価について議論する。非排水クリープは一定の載荷応力の下で過剰間隙水圧が時間とともに蓄積し、破壊に至る現象である。前章で述べたように、非定常流動曲面型である関口モデルでは、クリープ破壊時間 t_f を解析解の形で導出でき、 $q/p = M$ となって粘土がクリープ破壊する時間を数値誤差なく計算できること²²⁾を示した。一方、従来、超過応力型モ

デルでは非排水クリープ破壊を表現できないと指摘されてきた。これについて、構成式に基づく検討を加える。足立・岡モデルのひずみ速度は式(3.17)で表される。クリープ破壊は、遷移クリープから定常クリープの過程でひずみ速度が単調減少し、最小ひずみ速度を経て加速クリープに至り破壊するというプロセスをとる。したがって、式(3.17)で表されるひずみ速度が極値をとることが加速クリープの発現条件となる。式(3.17)を時間微分し、若干の整理を行うと次式を得る¹⁷⁾。

$$\dot{\epsilon}_{11}^{vp} = -(M-q/p) \cdot \{\dot{\epsilon}_{11}^{vp}\}^2 \frac{m'(1+e_0)}{(\lambda-\kappa)} \dots\dots\dots (3.25)$$

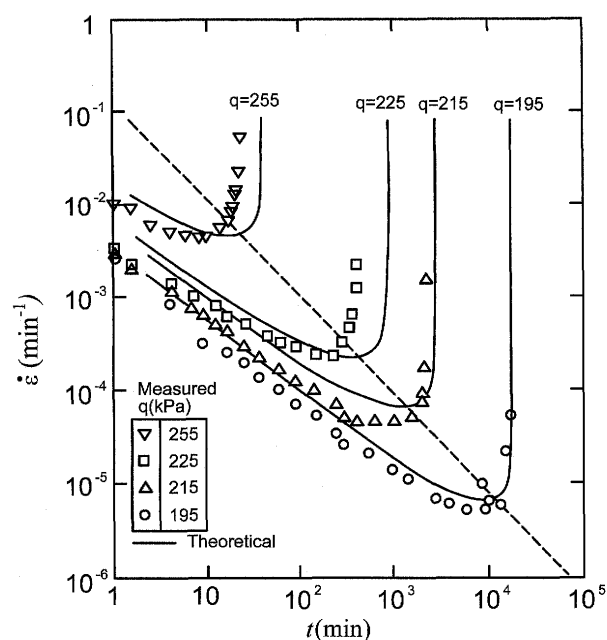
ここで、ひずみ速度の2乗の項、および $m'(1+e_0)/(\lambda-\kappa)$ は正なので、同式の符号は $-(M-q/p)$ のみに依存することになる。この項は非排水クリープ中、負値で単調に増加し、 $q/p = M$ の時にゼロとなる。つまり、非排水クリープ中ひずみ速度は減少し続け、破壊が生じる瞬間に最小値に収束してしまうことになる。つまり $q/p = M$ の時点で $\dot{\epsilon}_{11}^{vp} = \dot{\epsilon}_{11}^{vp}{}_{\min}$ となる。このため、破壊時にひずみ速度が無限大に発散せず、結果として非排水クリープが起こらないことになる。このように、超過応力型モデルでは、モデルの有する構造的な原因によって非排水クリープ破壊が表現できないことがわかっている^{17), 26)}。

超過応力型モデルを非排水クリープ破壊の表現が可能となるように拡張する試みが足立ら^{17), 27)}によって行われている。非排水クリープ中の粘塑性パラメータの C の値と $(M-q/p)$ の値の変化との関係を実験結果に基づいて回帰し、 C の応力比依存性特性を直接モデル化する方法¹⁷⁾と、汎用性を持たせるために、第二材料関数 $\Phi_2(\xi) = 1 + \xi$ を導入し、 ξ の発展則を仮定することによって加速クリープを表現できるようにする拡張方法²⁷⁾が提案された。両者は形こそ異なるが、式(3.23)で示された問題を克服するための拡張という点では共通している。一例として、図—3.6に三軸圧縮応力条件下における粘土の非排水クリープ試験結果と拡張モデルによるシミュレーションを比較して示す。同図より、超過応力型モデルでも非排水クリープにおける加速クリープとそれに続く破壊現象を表現できることがわかる。

3.5 過圧密粘土への展開と発展

3.4までの各節において、弾粘塑性構成モデルの黎明期から関連な提案期における業績と、構造的な特徴と分類、長所と問題点について概観した。元々、時間依存性挙動が明確に現れるのは正規圧密状態にある粘土であり、モデル化もこうした材料を中心として進められてきた。一方、先行応力による履歴を受けた過圧密粘土については、カムクレイモデルに代表される枠組みには収まらないため、別の概念を導入しなければ表現することが難しい。

岡²⁸⁾は過圧密境界面の概念を導入し、過圧密粘土に対する弾粘塑性構成モデルを提案した。過圧密境界面 f_b は次式のように仮定される。



図一3.6 拡張足立・岡モデルによる非排水クリープとクリープ破壊の表現実測値との比較²⁶⁾ (実験結果は村山ほか²³⁾による)

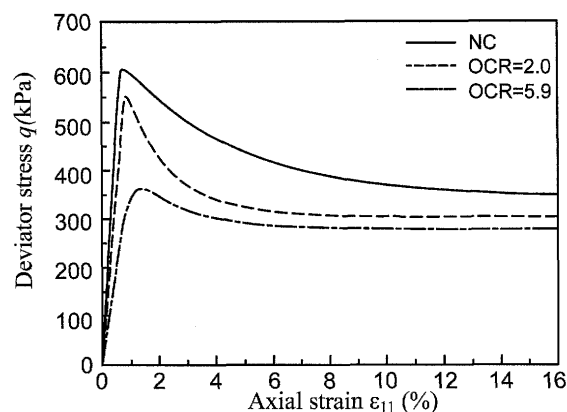
$$f_b = \bar{\eta}_{(0)}^* + M_m^* \ln [\sigma_m / \sigma_{mb}] = 0 \quad (3.26)$$

ここで、 $\bar{\eta}_{(0)}^*$ は $\bar{\eta}_{(0)}^* = \{(\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*)(\eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^*)\}^{1/2}$ で定義される。下付き添え字 (0) は変形直前の初期状態であることを表し、 η_{ij}^* は応力比 (s_{ij} / σ_m) である。また M^* は変形が圧縮から膨張に転じる時の応力比 η_{ij}^* 、 σ_{mb} は過圧密境界面の大きさを規定する硬化パラメータである。岡ら²⁹⁾ は過圧密泉北粘土を用いた非排水三軸圧縮試験結果をこのモデルによってシミュレートし、提案モデルが過圧密粘土の時間依存性挙動を表現できることを報告している。

土質材料の変形特性において、ひずみの局所化、せん断帯の発生という問題の重要性が広く認識され、こうした現象を表現するために、弾粘塑性構成モデルを拡張した考え方が研究されてきた。岡ら³⁰⁾ はひずみ勾配依存性を構成モデルに導入し、ひずみの局所化とせん断帯の発生を評価できるモデルを提案した。また木元・岡³¹⁾ は高位の構造を有するとされる更新統粘土などの材料に対し、構造の効果を表現する粘塑性ひずみの関数としての応力 σ_{ma} 、とその劣化速度を規定するパラメータ β を導入することにより、粘土の構造効果を応力～ひずみ関係に反映させられことを報告している (図一3.7参照)。

3.6 境界値問題への適用事例

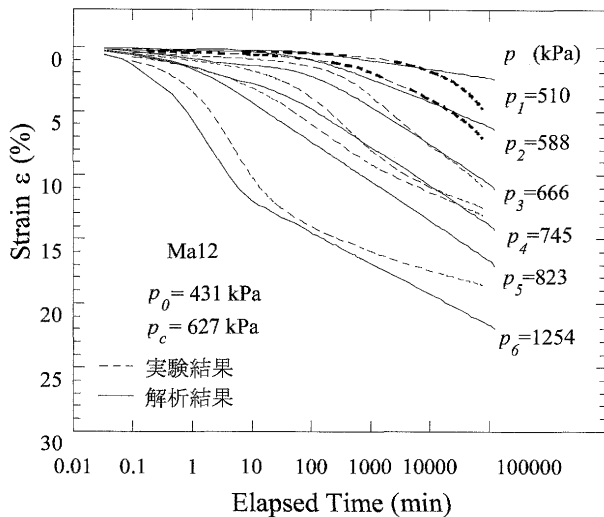
弾粘塑性構成式を有限要素プログラムに組み込み、初期値・境界値問題を解くということが、工学としての貢献となる。したがって、要素レベルの構成モデルそのものの研究とともに、様々な条件の下で実施される実問題を解くための数値解析に関する研究も精力的に進められてきた。現在、最も整備されたプログラムとして、飯塚・太田による DACSAR³²⁾ があげられる。このプログラムは、関口・太田モデルを有限要素コードに組み込み、



図一3.7 鶴見粘土に対する非排水三軸圧縮試験の数値解析結果³¹⁾

パラメータの設定についても系統的に行えるようにマニュアル整備されたもので、我が国においては幅広く使用されているといえよう。実際の境界値問題を取り扱った事例を以下に紹介しておく。まず、長崎自動車道・武雄北方インターチェンジの過圧密有明粘土地盤上に、橋梁基礎設置のためのプレロードを実施した場合の変形解析^{33),34)}において、著者らの提案している手法が有効に機能し、粘土層の過剰間隙水圧、沈下、側方変位についても現場実測値を精度良く予測していることを報告している。平田ら³⁵⁾ は舞鶴若狭自動車道の福井県若狭町において超軟弱腐食土・粘土層上に実施した試験盛土の水土連成解析を実施し、施工速度と圧密促進用のドレーン打設範囲が変状抑制に機能することを明らかにし、現場にフィードバックさせた事例を報告している。また、山本ら³⁶⁾ は神戸空港建設に伴う海底地盤の変形解析を実施し、解析結果はおおむね実測値を予測でき、空港島の長期的な管理にも適用できることを示した。

これとは別のアプローチとして、関口モデルを組み込んだ弾粘塑性有限要素法によって、主として沿岸から沖合域における軟弱粘土地盤の変形解析を行っている事例を以下に紹介する。関口ら^{37),38)} は関西国際空港連絡橋取付部基礎地盤の空港島建設による変形解析を行った。一連の解析は空港島建設前に示されたもので、いわゆる事前予測にあたる。この中で関口らは洪積粘土層においても5mを超える沈下が生じることを指摘している点が興味深い。三村ら³⁹⁾ は阪神高速道路甲子園埋立地の建設に伴う海底地盤の変形解析を実施し、解析値と実測値の整合性を示すとともに、モデルのパラメータ設定手法を確立した。三村ら⁴⁰⁾ は大阪港埋立地における長期沈下測定結果を整理することによって、大阪湾洪積粘土の擬似過圧密性と埋立荷重がみかけの p_c に達しないケースであっても時間遅れ沈下が生じていることを示した。こうした実測結果に基づき、擬似過圧密領域における粘塑性変形を仮定した圧縮モデルを提案し⁴¹⁾、この圧縮モデルを組み込んだ弾粘塑性有限要素法によって大阪湾更新統粘土の長期圧密試験を解析し、実験結果と比較した一例を図一3.8に示す。同図において、載荷応力 $p_1 \sim p_3$ は載荷後も擬似過圧密領域に留まっているケース、



図—3.8 大阪湾擬似過圧密更新統粘土の圧密挙動に関する数値解析結果と実測値の比較⁴¹⁾

$p_4 \sim p_6$ は完全に圧密降伏し、正規圧密領域に達しているケースである。解析結果は $p_4 \sim p_6$ に対しては通常の正規圧密粘土で見られる逆S字曲線を、 $p_1 \sim p_3$ に対しては時間の経過とともに徐々に変形するという挙動を適切に表現していることがわかる。また、この圧縮モデルにより、大阪港の咲洲、舞洲、夢洲に対して水土連成解析を実施し、20年以上にわたって継続する長期沈下を応力状態によらず説明できることが報告されている⁴²⁾。三村・張⁴³⁾は、透水層としての砂礫層の性能が不十分であることが、関西国際空港基礎地盤において過剰間隙水圧が停留する原因であること、一方で構造骨格の発達した粘土の高圧縮性を正しく考慮することによって、過剰間隙水圧の消散が十分でなくても大きな沈下が生じる現象を数値解析によって評価できることを示した。関西国際空港については、隣接した二期空港島が建設されたことによって一期空港島直下に過剰間隙水圧が還流し、両空港島の今後の沈下挙動にどのような影響が現れるのかということが目下の難題である。

3.7 おわりに

土の時間依存性挙動を表現するための枠組みとしての弾粘塑性構成モデルについて、歴史的経緯からモデルの構造による分類、類似点と相違点、それらがパフォーマンスに及ぼす影響などについて概説した。また、境界値問題を解くという視点から、近年の大規模埋立工事に関する事例を紹介した。誌面の都合上、最も時間依存性挙動の特徴が顕著に現れる材料としての正規圧密粘土を中心とした内容になった。当然書き落としたことが多くなってしまったが、できる限り参考文献をあげることによって便宜を図ったつもりである。残された未解決の課題が多く、さらに研究を進める必要があることもおわかりいただけたと思う。柔軟な頭脳によるブレイクスルーを期待したい。

参考文献

- 1) Perzyna, P.: The Constitutive Equations for Rate Sensitive Plastic Materials, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 20, No.4, pp. 321~332, 1963.
- 2) Perzyna, P.: The Constitutive Equations for Work-hardening and Rate Sensitive Plastic Materials, *Proc. Vibration Problems*, Vol. 3, pp. 243~377, Academic Press, 1963.
- 3) Perzyna, P.: Fundamental Problems in Viscoplasticity, *Advances in Applied mechanics*, Vol. 9, pp. 321~332, 1966.
- 4) Adachi, T. and Oka, F.: Constitutive Equations for Normally Consolidated Clays Based on Elasto-viscoplasticity, *Soils and Foundations*, Vol. 22, No. 4, pp. 57~70, 1982.
- 5) Katona, M. G.: Evaluation of Viscoplastic Cap Model, *Jour. Geotech. Eng., ASCE*, Vol. 110, No. 8, pp. 1106~1125, 1984.
- 6) Baladi, G. Y. and Rohani, B.: Development of an Elastic-viscoplastic Constitutive Relationship for Earth Materials, *Mechanics of Engineering Materials*, pp. 23~43, John Wiley & Wiley Ltd., 1984.
- 7) Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C. and Lewis, R. W.: Associated and Non-associated Viscoplasticity and Plasticity in Soil Mechanics, *Geotechnique*, Vol. 25, No. 4, pp. 671~689, 1975.
- 8) Akai, K., Adachi, T. and Nishi, K.: Mechanical Properties of Soft Rocks, *Proc. 9th ICSMFE*, Vol. 1, pp. 7~10, 1977.
- 9) Olszak, W. and Perzyna, P.: The Constitutive Equations of the Flow Theory for a Non-stationary Yield Condition, *Applied Mechanics, Proc. 11th Int. Congress of Applied Mechanics*, pp. 545~553, Springer-Verlag, 1966.
- 10) Sekiguchi, H.: Rheological Characteristics of Clays, *Proc. 9th ICSMFE*, Vol. 1, pp. 289~292, 1977.
- 11) Dragon, A. and Mroz, Z.: A Model for Plastic Creep of Rock-like Materials Accounting for the Kinematics of Fracture, *Int. Jour. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 16, pp. 253~259, 1979.
- 12) Nova, R.: A Viscoplastic Constitutive Model for Normally Consolidated Clay, *Proc. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, pp. 287~295, 1982.
- 13) Matsui, T. and Abe, N.: Elasto/viscoplastic Constitutive Equation of Normally Consolidated Clays Based on Flow Surface Theory, *Proc. 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics*, Vol. 1, pp. 407~413, 1985.
- 14) Adachi, T. and Okano, M.: A Constitutive Equation for Normally Consolidated Clay, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 4, pp. 55~73, 1974.
- 15) Oka, F.: Prediction of Time-dependent Behaviour of Clay, *Proc. 10th ICSMFE*, Vol. 1, pp. 215~218, 1981.
- 16) Sekiguchi, H.: Macrometric Approaches -Static- Intrinsically Time-dependent, *Constitutive Laws of Soils, Proc. Discussion Session 1A, 11th ICSMFE*, pp. 66~98, 1985.
- 17) Adachi, T., Oka, F. and Mimura, M.: Mathematical Structure of an Overstress Elasto-Viscoplastic Model for Clay, *Soils and Foundations*, Vol. 27, No. 4, pp. 31~42, 1987.
- 18) Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, 1968.
- 19) Adachi, T., Oka, F. and Mimura, M.: Descriptive Accuracy of Several Existing Constitutive Model Clays for Normally Consolidated Clays, *Proc. 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics*, Vol. 1, pp. 259~266, 1985.
- 20) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced Anisotropy and

- Time Dependency in Clays, *Proc. of Specialty Session 9, 9th ICSMFE*, pp. 229~238, 1977.
- 21) Shibata, T.: On the Volume Changes of Normally Consolidated Clays, *Annual, Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University*, No. 6, pp. 128~134, 1963 (in Japanese).
 - 22) Sekiguchi, H.: Theory of Undrained Creep Rupture of Normally Consolidated Clay Based on Elasto-viscoplasticity, *Soils and Foundations*, Vol. 24, No. 1, pp. 129~147, 1984.
 - 23) 村山朔郎・栗原則夫・関口秀雄：粘土のクリープ破壊について，京都大学防災研究所年報，第13号，pp. 525~541, 1970.
 - 24) 三村 衛・関口秀雄：粘土の弾・粘塑性構成式に関する検討～応力速度の影響について～，第20回土質工学研究発表会，第1巻，pp. 403~406, 1985.
 - 25) 三村 衛・関口秀雄：粘塑性理論によるクリープ破壊へのアプローチ，第40回土木学会年次学術講演会発表論文集Ⅲ，pp. 461~462, 1985.
 - 26) 岡二三生：地盤の弾粘塑性構成式，166p.，森北出版，2000.
 - 27) Adachi, T., Oka, F. and Mimura, M.: An Elasto-Viscoplastic Theory for Clay Failure, *Proc. 8th Asian Regional Conf., SMFE*, Vol. 1, pp.5~8, 1987.
 - 28) Oka, F.: Elasto-viscoplastic Constitutive Equation for Overconsolidated Clay, *Proc. 1st Int. Symp. Numerical Methods in Geomechanics*, pp. 147~156, 1982.
 - 29) Oka, F., Adachi, T. and Mimura, M.: Elasto-viscoplastic Constitutive Models for Clays, *Proc. Int. Conf. Rheology and Soil Mech.*, pp. 12~28, 1988.
 - 30) Oka, F., Yashima, A., Sawada, K. and Aifantis, E. C.: A Gradient Dependent Viscoplastic Model for Clay, Constitutive Laws for Engineering Materials, *Proc. 3rd Int. Conf. Constitutive Laws for Engineering Materials—Theory and Application—*, pp. 313~316, 1991.
 - 31) Kimoto, S. and Oka, F.: An Elasto-viscoplastic Model for Clay Considering Destrcturalization and Consolidation Analysis of Unstable Behavior, *Soils and Foundations*, Vol. 45, No. 2, pp. 29~42, 2005.
 - 32) Iizuka, A. and Ohta, H.: A Determination Procedure of Input Parameters in Elasto-viscoplastic Finite Element Analysis, *Soils and Foundations*, Vol. 27, No. 3, pp. 71~87, 1987.
 - 33) Ohta, H., Takeyama, T., Mizuta, T., Nabetani, M. and Nishida, Y.: Deformation of Embankments on Soft Ground—Better Computer Simulation Resulted Form Input Data Closer to the Reality—, *Proc. 16th ICSMGE*, pp. 1099~1102, 2005.
 - 34) Takeyama, T., Pipatpongsa, T., Iizuka, A., Mizuta, T., Ohno, S. and Ohta, H.: Soil/water Coupled FE Simulation of Field Performance of 5 Embankments Placed on Homogeneous Clay, *Proc. Sri Lankan Geotech. Society's 1st Int. Conf. Soil & Rock Eng.*, CD-R, 2007.
 - 35) 平田昌史・木藤政則・山田耕一・飯塚 敦・荒井克彦：超軟弱地盤における道路盛土の変形挙動要因とその抑制対策，土木学会論文集 C, Vol. 66, No. 2, pp. 356~369, 2010.
 - 36) 山本卓生・坂上敏彦・高橋嘉樹・柳浦良行・南部光広・飯塚 敦：神戸空港における地盤変形解析手法の構築，土木学会論文集 C, Vol. 66, No. 3, pp. 457~471, 2010.
 - 37) 関口秀雄・柴田 徹・三村 衛・角倉克治：大水深護岸の変形解析，京都大学防災研究所年報，第31号 B-2, pp. 123~145, 1988.
 - 38) Sekiguchi, H., Shibata, T. and Mimura, M.: Long-term Deformation of Pleistocene Clays, *Proc 10th European Conf. on SMFE*, Florence, Vol. 1, pp. 261~264, 1991.
 - 39) Mimura, M., Shibata, T., Nozu, M. and Kitazawa, M.: Deformation Analysis of a Reclaimed Marine Foundation Subjected to Land Construction, *Soils and Foundations*, Vol. 30, No. 4, pp. 119~133, 1990.
 - 40) Mimura, M., Takeda, K., Yamamoto, K. and Fujiwara, T. and Jang, W. Y.: Long-term Settlement of the Reclaimed Quasi-overconsolidated Pleistocene Clay Deposits in Osaka Bay, *Soils and Foundations*, Vol. 43, No. 6, pp. 141~153, 2003.
 - 41) Mimura, M. and Jang, W. Y.: Description of Time-dependent Behavior of Quasi-overconsolidated Osaka Pleistocene Clays Using Elasto-viscoplastic Finite Element Analyses, *Soil and Foundations*, Vol. 44, No. 4, pp. 41~52, 2004.
 - 42) Mimura, M. and Jang, W. Y.: Verification of the Elasto-viscoplastic Approach Assessing the Long-term Deformation of the Quasi-overconsolidated Pleistocene Clay Deposits, *Soils and Foundations*, Vol. 45, No. 1, pp. 37~49, 2005.
 - 43) Mimura, M. and Jang, W. Y.: Long-term Settlement of the Pleistocene Deposits Due to Construction of KIA, *Proc. Symp. Geotechnical Aspects of Kansai International Airport*, pp. 77~85, 2005.