

単一斜面雨水流モデルにおけるショックフロントの 発生・追跡に関する基礎的解析

友杉 邦雄・石原 安雄

SHOCK FRONT IN KINEMATIC WAVE ROUTING OF ONE-DIMENSIONAL OVERLAND FLOW

By Kunio TOMOSUGI and Yasuo ISHIHARA

Synopsis

As a part of fundamental studies approaching to the effect estimation problems of nonuniformity of input and field in runoff analysis, properties of shock front in kinematic wave routing of one-dimensional overland flow, especially the locus in time-space plane, water depths in the front and the occurrence conditions are analytically investigated using the characteristic method and law of mass conservation after normalization of variables for the following three model cases; A. given stepwise downwards decreasing distribution of input (effective rainfall) on a physically uniform slope, B. given rainy area moving downwards in a constant speed on a physically uniform slope, and C. given exponent-type downwards decreasing distribution of input and/or flow-coefficient (α in $q=\alpha h^m$).

The general equations of locus and depth of front and the occurrence conditions are obtained for the case A and B, but only the sufficient conditions of non-occurrence of shock are obtained for the case C. Some these results could play the role of checking or improvement of some numerical methods for shock wave computation, too.

1. ま え が き

流出解析や流出計算における基本的問題の1つである場および入力の不均一性の効果の評価問題に関する基礎的研究の一環として、我々は単一斜面雨水流モデルに不均一分布として三角形分布を基本とするモデル降雨を与えた場合について特性曲線法に基づいて無次元化による解析的検討を行い、いくつかの興味ある示唆的結果を得、昨年度発表¹⁾した。本研究は、それらの結果のうち、「降雨の空間分布によって、破壊力の大きな段波状の出水波形が生じることがある」という結果を重視し、同様な斜面モデルで段波が発生する一般的な場合である kinematic shock に注目した補充的・派生的研究であって、shock が発生する場合の従来の数値計算法の妥当性の検証用となることも期しているため、厳密な解析解が得られる比較的簡単なケースを対象として、shock の発生限界やその front の追跡等について一般的・解析的に検討を試みたものである。

2. 解析対象ケース

通常の雨水流モデルでは、斜面の物理特性及び入力（有効降雨）の空間分布を一様とし、また初期・境界条件を共にゼロとするため、斜面流において特性曲線の交差すなわち kinematic shock（以下単に shock と称する）の発生の可能性はない。しかし実際の山腹斜面の物理特性、入力分布は決して一様ではなく、shock

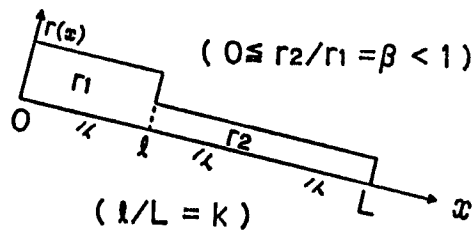


Fig. 1 Distribution model of input (Case A).

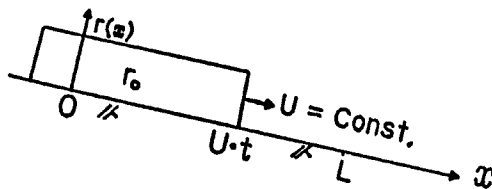


Fig. 2 Moving input model (Case B).

が発生する場合が考えられる。本研究では、このような場合として、簡単ではあるが程度一般性のある次のような3種のモデルケースを解析の対象として取り挙げた。ただし、解析の容易さのため、通常のように初期・境界条件は共にゼロとすることにした。

A. 有効降雨が斜面流下方向にステップ状減少関数分布をする場合

この場合は、斜面の物理特性は一樣であるが、Fig. 1に示すように、有効降雨強度 \$r(x)\$ が \$0 \le x \le l\$ で \$r_1 (= \text{const.})\$、\$l < x \le L\$ で \$r_2 (= \text{const.})\$ となる場合で、\$r_2 = 0\$ の場合も含める。ここに \$L\$ は斜面長で、\$l/L = k\$、\$r_2/r_1 = \beta\$ とおくと、\$0 < k < 1\$、\$0 \le \beta < 1\$ である。この場合をケースAと称することにする。

B. 雨域が斜面流下方向に等速移動する場合

この場合も、斜面の物理特性は一樣とするが、Fig. 2に示すように、有効降雨強度一定 (\$r_0\$) の雨域が一定の

速度 \$U\$ (\$x\$ 軸方向の速度成分) で移動する場合で、結果として、有効降雨の空間分布が不均一となる。この場合をケースBと称することにする。

C. 有効降雨及び (又は) 流れ係数が斜面流下方向に指数型単調減少関数分布をする場合

この場合は、斜面の物理特性の一つである流れ係数 (後掲の式 (2) の \$\alpha\$ のことをここではこういう。なお同式中の \$m\$ は流れ指数と呼ぶことにする) がかならずしも一樣でない場合である。指数型単調減少関数の具体的な形として、有効降雨強度 \$r(x)\$、流れ係数 \$\alpha(x)\$ に対してそれぞれ次のようなものを与えた。

$$r(x) = K_r \cdot (L_0 - x)^N, \quad \alpha(x) = K_\alpha \cdot (L_* - x)^M$$

ここに、\$K_r\$、\$K_\alpha\$ は指数 \$N\$、\$M\$ により単位の変る定数、\$L_0\$、\$L_*\$ は \$L\$ より小さくない仮定の距離で、そこで \$r\$、\$\alpha\$ がゼロとなる。なお、\$N\$、\$M\$ は非負の定数 (共にゼロとはしない) である。Fig. 3 に \$N=1\$、\$M=1\$ の場合を例示した。この場合をケースCと称することにする。

なお、容易に知れることではあるが、ケースAの逆、すなわち有効降雨のステップ状増加関数分布、ケースBの逆である雨域の上流方向への移動、あるいはケースCの逆である有効降雨及び流れ係数の単調増加関数分布の場合には shock 発生の可能性はなく、又、簡単な解析によって、流れ係数 \$\alpha (> 0)\$ のみがステップ状減少関数分布をする場合も shock は発生しないことがわかる。さらに、有効降雨の時間分布に関しては、その空間分布が一樣で、かつ斜面の物理特性も一樣である限り、shock の発生には関与しないことは周知のとおりである。

3. 解析の方法

3.1 基礎方程式

周知のように単一斜面雨水流モデル (ただし斜面幅一

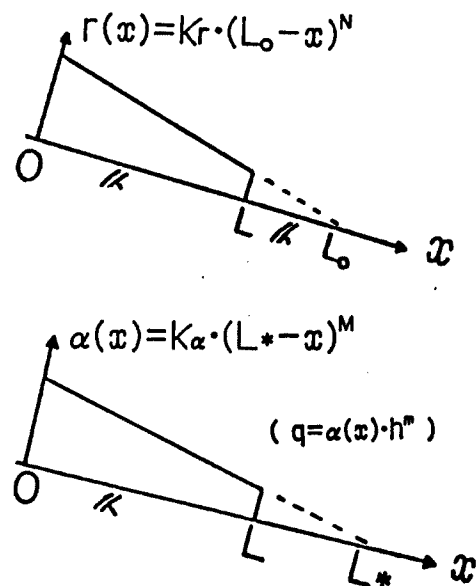


Fig. 3 Distribution model of input and flow-coefficient (Case C), shown as \$N=M=1\$.

定) の基礎方程式は式(1), (2)で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$q = \alpha \cdot h^m \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに, h : 水深 (斜面に垂直), t : 時間, q : 斜面単位幅当りの流量, x : 斜面流下方向距離 (上流端を原点), r : 有効降雨強度 (斜面に垂直), α : 流れ係数, m : 流れ指数 ($m \geq 1$) である。

ここで, ケースCの場合を想定して, 一般に $\alpha = \alpha(x)$ とし, $m = \text{const.}$ とすると, 式(1), (2) から次の3つの常微分方程式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = m \cdot \alpha \cdot h^{m-1} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{dh}{dt} = r - h^m \cdot \frac{d\alpha}{dx} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{r}{m \cdot \alpha} h^{1-m} - \frac{h}{m \cdot \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに, 式(3)が特性曲線の軌跡に関する微分方程式であり, 式(4)又は(5)から h を t, x の関数として解き (積分し), それを式(3)に代入して積分することにより特性曲線の式が得られる。ケースA, Bの場合は, $\alpha = \text{const.}$ であり, かつ r も部分的に一定であるので式(4), (5)の積分も式(3)の積分も極めて容易である。ケースCの場合は r 及び (又は) α が x の関数となり, やや煩雑となるが式(5)がベルヌイ型であるので m, M, N の値によっては初等積分が可能な場合がある。

一方, shock front の伝播方程式は, front の $t-x$ 平面上の位置を (t_s, x_s) とすると, 連続条件より次式のようになることが知られている²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt_s} &= \frac{q_{s1} - q_{s2}}{h_{s1} - h_{s2}} = \frac{\alpha \cdot (h_{s1}^m - h_{s2}^m)}{h_{s1} - h_{s2}} \quad \dots\dots\dots(6) \\ &= \alpha \cdot h_{s1}^{m-1} \cdot \left(\frac{1 - \gamma^m}{1 - \gamma} \right) \end{aligned}$$

ここに, 添字 $s1, s2$ はそれぞれ front の直上流及び直下流の値であることを示し, $\gamma = h_{s2}/h_{s1}$ ($0 \leq \gamma < 1$) である (Fig. 4)。しかし, この式を直接積分することは一般に困難であって, この式は後述の方法によって求めた front の軌跡の方程式の検証用とした。

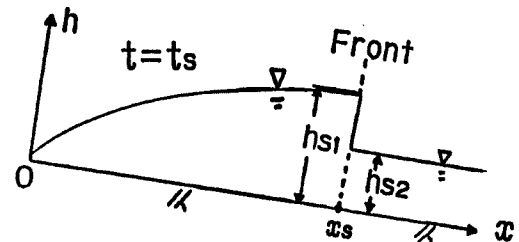


Fig. 4 Illustration of a shock front.

3.2 基礎式及び各変量の無次元化

本研究では有次元の変量を Table 1 に示すように無次元化して解析計算を行うことにした。このように無次元化すると前掲の式(3)~(6)はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{m\alpha'}{\omega} h'^{m-1} \quad \dots\dots\dots(3')$$

$$\frac{dh'}{dt'} = r' - \frac{1}{\omega} h'^m \cdot \frac{d\alpha'}{dx'} \quad \dots\dots\dots(4')$$

$$\frac{dh'}{dx'} = \frac{\omega r'}{m\alpha'} h'^{1-m} - \frac{h'}{m\alpha'} \cdot \frac{d\alpha'}{dx'} \quad \dots\dots\dots(5')$$

$$\frac{dx'_s}{dt'_s} = \frac{1}{\omega} \frac{q'_{s1} - q'_{s2}}{h'_{s1} - h'_{s2}} = \frac{\alpha'}{\omega} \cdot \frac{h'^m_{s1} - h'^m_{s2}}{h'_{s1} - h'_{s2}} \quad \dots\dots\dots(6')$$

Table 1 Main variables and their symbolization and normalization

variables & symbols	normalizers & symbols	normalized variables
time; t	rainfall duration; D	$t' = t/D$ (for all Cases)
water depth; h	spatially averaged effective rainfall amount; $\bar{R}$	$h' = h/\bar{R}$ ($\bar{R} = R$ in Case B)
effective rainfall intensity; r	average of r ; $\bar{R}/D$	$r' = rD/\bar{R}$
flow-coefficient; α	average of α ; $\bar{\alpha}$	$\alpha' = \alpha/\bar{\alpha}$ (for Case C)
flow rate per unit width of slope; q	$\bar{\alpha} \cdot \bar{R}^m$	$q' = q/(\bar{\alpha} \cdot \bar{R}^m)$
distance along slope; x	slope length; L or $\bar{\alpha} \bar{R}^{m-1} \cdot D$	$x' = x/L$ $x'' = x/(\bar{\alpha} \bar{R}^{m-1} \cdot D)$
x -directional speed of rainy area; U	$\alpha \cdot R^{m-1}$ or L/D	$u' = U/(\alpha \cdot R^{m-1})$ $v = L/(UD)$ (for Case B)

ここに、 $\omega = L/(\bar{\alpha} \cdot D \cdot \bar{R}^{m-1})$ なる総合的な無次元パラメータである。これを用いると、Table 1 に示した x' と x'' は $x'' = \omega x'$ の関係にある。すなわち斜面下流端 $x = L(x' = 1)$ で $x'' = \omega$ となることを意味し、ケース A, B では x' のかわりに x'' を用いる。また、 u' と v の関係は $u' = \omega/v$ となることも指摘しておく。

なお、ケース A, B では $\alpha = \bar{\alpha}$ であるから $\alpha' = 1$ であることはいうまでもないが、ケース C では

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx$$

であるので、2. で示した $\alpha(x)$ を用いて、 $\alpha'(x')$ は次のようになる。

$$\alpha'(x') = c \cdot (A_* - x')^M \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 $A_* = L_*/L (\geq 1)$, $c = \frac{M+1}{A_*^{M+1} - (A_* - 1)^{M+1}}$ である。

また、 r' については、2. で示したことから各ケースについて、それぞれ次のようになる。

[ケース A]

$$\left. \begin{aligned} r'_1 &= \frac{1}{\kappa + \beta(1-\kappa)} & (\text{for } 0 \leq x'' \leq \kappa\omega, 0 \leq t' \leq 1) \\ r'_2 &= \beta r'_1 & (\text{for } \kappa\omega < x'' \leq \omega, 0 \leq t' \leq 1) \\ r' &= 0 & (\text{otherwise}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

[ケース B]

$$\left. \begin{aligned} r' &= r_0/(R/D) = 1 & (\text{for } x''/u' \leq t' \leq x''/u' + 1, 0 \leq x'' \leq \omega) \\ r' &= 0 & (\text{otherwise}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

[ケース C]

$$\left. \begin{aligned} r'(x') &= c_0 \cdot (A_0 - x')^N & (\text{for } 0 \leq x' \leq 1, 0 \leq t' \leq 1) \\ \text{ただし, } A_0 &= L_0/L (\geq 1), c_0 = \frac{N+1}{N_0^{N+1} - (A_0 - 1)^{N+1}} & \\ r'(x') &= 0 & (\text{otherwise}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

3.3 shock front の軌跡の求め方

先にも述べたように shock front の伝播方程式 (6) 又は (6') は積分が困難であるため、ここでは次のような方法によって front の軌跡を求めた。それは一口にいえば質量保存則を適用するものである。すなわち、 $t' \sim x''$ 平面でいえば、front の座標を (t_s', x_s') とするとき、次式が成立することを利用する。

$$S'(t_s', x_s') = I'(t_s', x_s') - V'(t_s', x_s') \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $S'(t_s', x_s')$ は時刻 t_s' における $x'=0 \sim x_s'$ の斜面区間上の貯留量、 $I'(t_s', x_s')$ は $t'=0 \sim t_s'$ の間に $x'=0 \sim x_s'$ の斜面区間上に与えられた入力総量、 $V'(t_s', x_s')$ は $t'=0 \sim t_s'$ の間に x_s' 点を流下し去った総流出量であって (いずれも斜面単位幅当りの水量を $\bar{R} \cdot L$ で無次元化)、それぞれ次の式によって算定される。

$$S'(t_s', x_s') = \int_0^{x_s'} h'(t_s', x') dx' = \int_0^{h_s'} h' \cdot \left(\frac{dx'}{dh'} \right) \cdot dh' \dots\dots\dots (12)$$

$$I'(t_s', x_s') = \int_0^{t_s'} \int_0^{x_s'} r' dx' \cdot dt' \dots\dots\dots (13)$$

$$V'(t_s', x_s') = \omega \int_0^{t_s'} q'(t', x_s') dt' = \omega \int_0^{t_s'} \alpha'(x_s') \cdot h'^m(t', x_s') dt' \dots\dots\dots (14)$$

ここで、式(13)の積分は極めて簡単であるが、式(12)又は(14)の積分は、 h' の関数形が、特性曲線の出発点や有効降雨強度の不連続点などにより、様々に変化するためかなり煩雑となることがあり、またその関数形によっては式(12)に示すような変数変換をしなければ積分ができない場合もある。さらに、ケースCの場合はとくに式(14)が初等積分できない関数形となるため、front の軌跡を解析的に求めることはできないことがわかった。

次に、ケースA、Bについては以上に述べた方法により求めた front の軌跡やその発生条件等を示し (導出過程は省略)、ケースCについては shock の発生条件について検討した結果について示す。

4. 解析結果と考察

4.1 ケースA (入力の不連続分布)

このケースでは下流側の弱雨域に必ず shock が発生するが、まず特殊な場合である $\beta=0 (r_2'=0)$ の場合から示そう。

(1) $\beta=0$ の場合

この場合は式 (8) より $r'=1/\kappa$ であり、結局 shock front の軌跡の式は次に示す4種類となる。

$$F_0-1 : x_s' = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2-1}{\kappa m^2} \right)^{m-1} \cdot t_s'^m + \kappa\omega, \quad (0 \leq t_s' \leq t_{*1}') \dots\dots\dots (15)$$

$$F_0-2 : x_s' = \omega^{\frac{m-1}{m}} \cdot t_s' + \frac{\kappa\omega}{m+1}, \quad (t_{*1}' < t_s' \leq t_{*2}', \kappa\omega^{1/m} < 1) \dots\dots\dots (16)$$

$$F_0-2' : x_s' = \kappa^{1-m} \cdot \left(t_s' - \frac{m}{m+1} \right) + \omega, \quad (t_{*1}' < t_s' \leq t_{*2}', \kappa\omega^{1/m} > 1) \dots\dots\dots (17)$$

$$F_0-3 : \left. \begin{aligned} t_s' &= 1 + \frac{\omega}{(m-1)h_s'^m} - \frac{m\kappa}{m^2-1} h_s' \\ x_s' &= \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{h_s'} - \frac{\kappa}{m^2-1} h_s'^m \end{aligned} \right\}, \quad (t_s' > t_{*2}') \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $h_{s2}'=0$ であるので h_{s1}' を h_s' と記している。また、 t_{*1}', t_{*2}' は $\kappa\omega^{1/m}$ が1より小さいか大きいかによりそれぞれ次のようである。

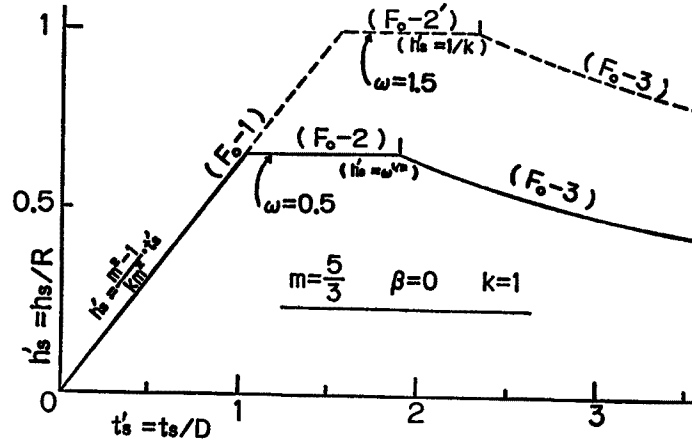


Fig. 7 Variation of the normalized water depth at the fronts shown in Fig. 5 and 6 with time.

$$\kappa\omega^{1/m} \leq 1 \text{ のとき; } t'_{*1} = \frac{m^2}{m^2-1} \kappa\omega^{1/m}, \quad t'_{*2} = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\kappa\omega^{1/m}}{m+1} \right)$$

$$\kappa\omega^{1/m} > 1 \text{ のとき; } t'_{*1} = \frac{(1-\kappa)\kappa^m}{m-1} \omega + \frac{m^2}{m^2-1}, \quad t'_{*2} = \frac{\kappa^{m-1}}{m-1} \omega + \frac{m^2-m-1}{m^2-1}$$

(上式より $\kappa\omega^{1/m}=1$ のときは $t'_{*1}=t'_{*2}$ となるので F_0-2 は存在しない)

なお, front の水深 h'_s は F_0-1 , F_0-2 , F_0-2' のとき, それぞれ次のようになるが, F_0-3 のときは式 (18) のように助変数となる。

$$F_0-1; h'_s = \frac{m^2-1}{\kappa m^2} \cdot t'_s, \quad F_0-2; h'_s = \omega^{1/m}, \quad F_0-2'; h'_s = \frac{1}{\kappa}$$

Fig. 5, Fig. 6 は $m=5/3$ として front の軌跡を上掲の式に基づいて求めた例であり, 前者は $\kappa=1$, $\omega=0.5$ ($\kappa\omega^{1/m}<1$) の場合, 後者は $\kappa=1$, $\omega=1.5$ ($\kappa\omega^{1/m}>1$) の場合で, $t' \sim x'$ 平面に描いている。ただし, これらは $\kappa=1$ としているので本来の斜面長 L を越えた斜面上のものであり, このようにもできる点が $\beta=0$ の場合の特殊性である。また, Fig. 7 はこれらの場合の $h'_s \sim t'_s$ 関係を図示したもので, front 水深は最初 (F_0-1) 時間と共に直線的に増加し, ついで (F_0-2 又は F_0-2') 一定となり, その後 (F_0-3) 徐々に減少していくことがわかる。

(2) $0 < \beta < 1$ の場合

この場合はさらに3つの場合に分けて示すが, front の軌跡の式の形としては計6種類となる。場合を記号で分けるため, その内容をまず説明しておく。

t'_0 ; これはたとえば Fig. 8 に示すように, 点 (0, 0) を出発した特性曲線が, r' の不連続点 $x'=\kappa\omega$ に到達する時刻で, 次式で与えられるものである。

$$t'_0 = \frac{(r'_1 \kappa \omega)^{1/m}}{r'_1}, \quad \left(r'_1 = \frac{1}{\kappa + \beta(1-\kappa)} \right)$$

t'_{*0} ; これは上記の特性曲線がさらに弱雨域を進み, 後掲の front ($F-1$) と交差する時刻で, 次式で与えられる。

$$t'_{*0} = \frac{\gamma(1-\beta)}{\beta(1-\gamma)} \cdot t'_0, \quad (\gamma = h'_{s2}/h'_{s1})$$

(a) $t'_{*0} < 1$ の場合

この場合, Fig. 8 に模式的に示すような front $F-1$, $F-2$ が生じ, それらの軌跡の式は次のようである。

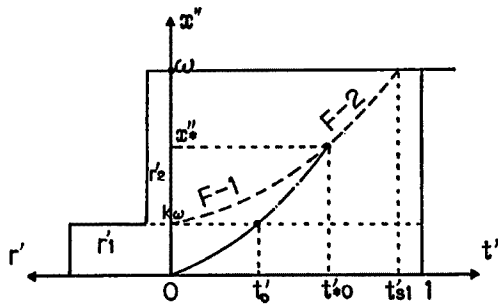


Fig. 8 Illustrative designation of shock front loci F-1 and 2.

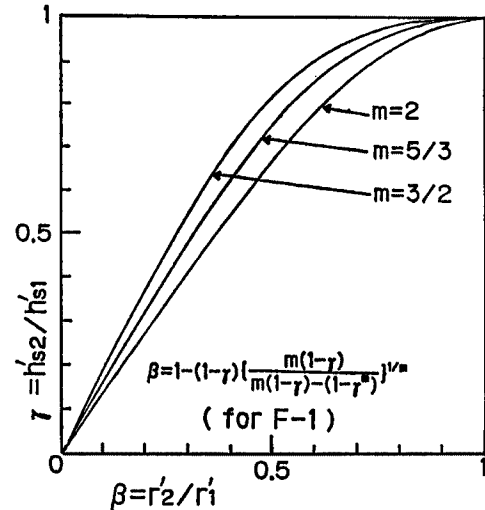


Fig. 9 Relation between input-ratio β and depth-ratio γ as m fixed (only for F-1).

$$F-1: x'_s = \left(\frac{\beta r'_1}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot \frac{(1-\gamma^m)}{m(1-\gamma)} \cdot t'_s{}^m + \kappa\omega \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、この場合の γ は β の関数（陰関数）であるが、 β を γ の陽関数として示すことができ、次のようになる。

$$\beta = 1 - (1-\gamma) \left\{ \frac{m(1-\gamma)}{m(1-\gamma) - \gamma(1-\gamma^m)} \right\}^{1/m}$$

この $\beta \sim \gamma$ 関係を $m=3/2, 5/3, 2$ として図示したものが **Fig. 9** であり、この図から与えられた β に対する γ を得ることができる。すなわち、この F-1 では front 水深比 γ は有効降雨強度比 β によって定まる一定値をとるわけである。なお、この F-1 は後述の他の場合にも必ず生じることを指摘しておく。

$$F-2: \left. \begin{aligned} t'_s &= \frac{\gamma}{\beta r'_1} \cdot h'_{s1} \\ x'_s &= \frac{1}{\beta r'_1} h'_{s1}{}^m - \frac{1-\beta}{\beta} \kappa\omega \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $h'_{s1}{}^{m+1} = \frac{m(1-\beta)(r'_1\kappa\omega)^{\frac{m+1}{m}}}{m(1-\gamma) - \gamma(1-\gamma^m)}$ であって、F-2 の軌跡は γ (又は h'_{s1}) を助変数として定まる。

(b) $t'_{*0} > 1$ の場合

この場合、**Fig. 10** に模式的に示すように、先の F-1 に加えて、F-2', F-3 が生じる。それらの式は次のようである。

$$F-2': \left. \begin{aligned} t'_s &= 1 + \frac{\gamma(1-\gamma^m) - m(1-\gamma) \left\{ 1 - \left(\frac{1-\gamma}{1-\beta} \right)^m \right\}}{(m+1)\gamma \cdot \{m(1-\gamma) - (1-\gamma^m)\}} \\ x'_s &= \left(\frac{\beta r'_1}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot \left[m(t'_s - 1) + \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{1-\gamma}{1-\beta} \right)^m \right\} \right] + \kappa\omega \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

すなわち、これは γ を助変数とするものである。

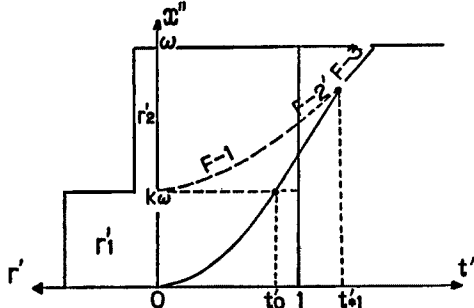


Fig. 10 Illustrative designation of shock front loci F-1, 2' and 3.

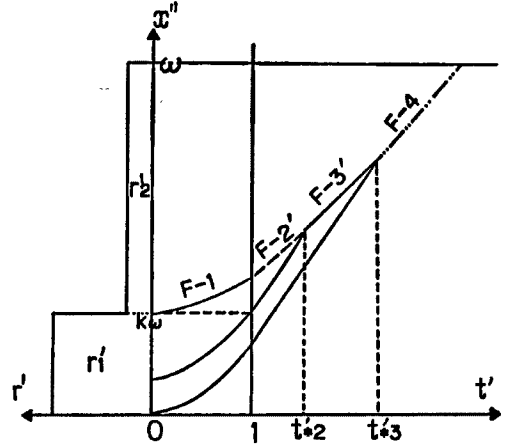


Fig. 11 Illustrative designation of shock front loci F-1, 2', 3' and 4.

$$\left. \begin{aligned} \text{F-3: } t'_s &= 1 + \frac{\gamma(1-\gamma^m) - m(1-\gamma) + m(1-\beta)\left(\frac{\gamma}{\beta}t'_0\right)^{m+1}}{(m+1)\gamma\{m(1-\gamma) - (1-\gamma^m)\}} \\ x'_s &= \left(\frac{\beta r'_1}{\gamma}\right)^{m-1} \left\{ m(t'_s - 1) + \frac{1}{\gamma} \right\} - \frac{1-\beta}{\beta} \kappa \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

なお、F-2' と F-3 の境界の時刻 t'_{*1} は上式の t'_s の式の γ に次の値を代入して得られる。

$$\gamma = \gamma_0 = 1 / \left(1 + \frac{1-\beta}{\beta} \cdot t'_0 \right)$$

(c) $t'_0 > 1$ の場合

この場合は、Fig. 11 に模式的に示すように、先の F-1, F-2' に加えて、F-3', F-4 が生じる。それらの式は次のようである。

$$\text{F-3': } x'_s = \left(\frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right) r_1^{m-1} \cdot \left(t'_s - \frac{m}{m+1} \right) + \kappa \omega \dots\dots\dots (23)$$

これは直線である。

$$\left. \begin{aligned} \text{F-4: } t'_s &= 1 + \frac{(1-\gamma^m) - (m+1)(1-\beta)\left\{ 1 - \left(\frac{\gamma}{\beta}t'_0\right)^m \right\}}{(m+1)\{m(1-\gamma) - (1-\gamma^m)\}} \\ x'_s &= m \left(\frac{\beta r'_1}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot (t'_s - 1) + \frac{1}{r'_1} \left(\frac{\beta r'_1}{\gamma} \right)^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

なお、F-2' と F-3' の境界時刻 t'_{*2} 、F-3' と F-4 のそれ t'_{*3} はそれぞれ次のようである。

$$t'_{*2} = \frac{m - \frac{m}{m+1} \left(\frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right)}{m - \left(\frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right)}, \quad t'_{*3} = \frac{t'_0^m - 1 + m - \frac{m}{m+1} \left(\frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right)}{m - \left(\frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right)}$$

この $\beta > 0$ の場合は $\beta = 0$ の場合のように軌跡の具体例の図示は省略するが、front 水深 h'_{s1} , h'_{s2} と t'_s の関係図の具体例として Fig. 12 を示す。これは $m=5/3$ とし、 $\beta=0.15$, $\kappa=0.15$, $\omega=2$ としたときのもので、F-1, F-2 が生じる場合である。F-1 では水深比 $\gamma=0.25$ (Fig. 9 参照) なる一定値をとり、 h'_{s1} , h'_{s2} 共に直線で増加し、F-2 では h'_{s1} の増加の割合が急減し、下流端 ($x'_s = \omega$) に達する時点では $\gamma=0.313$ となること等を示している。

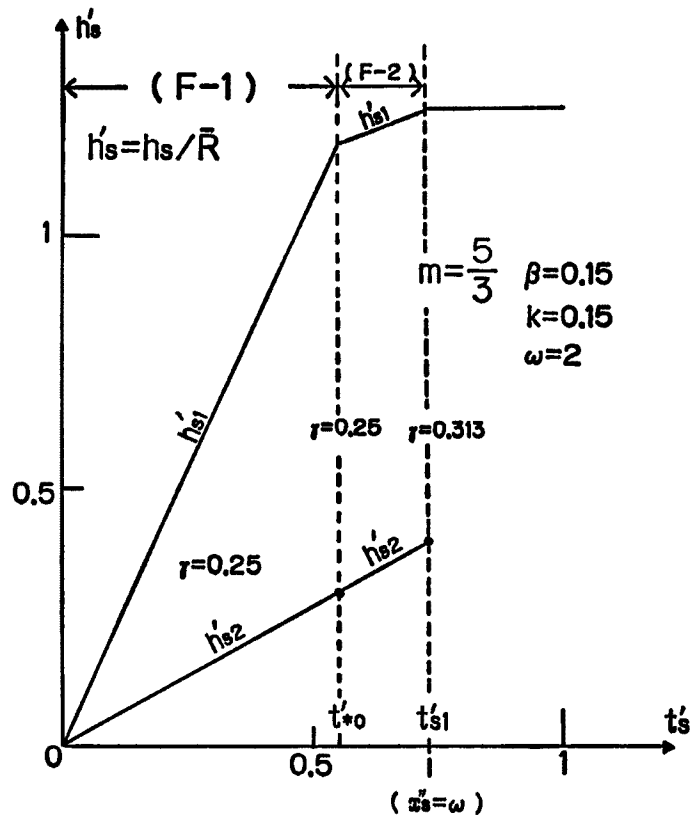


Fig. 12 Example of variation of the normalized frontal depths with time for F-1 and 2.

4.2 ケース B (雨域移動)

この場合は必ずしも shock が発生するとは限らないが、発生する場合の front の軌跡の式は、結局下記に示す 5 種類となる。

$$S-1: \left. \begin{aligned} t'_s &= \frac{x'_s}{u'} (1-\gamma^m) + \gamma h'_{s1} \\ x'_s &= h'^m_{s1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

$$h'_{s1} = \left[\frac{2u' \{m(1-\gamma) - \gamma(1-\gamma^m)\}}{(m+1)(1-\gamma^m)^2} \right]^{\frac{1}{m-1}}$$

$$S-2: \left. \begin{aligned} t'_s &= 1 + \frac{1}{u'(1-a)} \left\{ \frac{m}{m+1} (1-\gamma^{m+1}) h'^{m+1}_{s1} - \frac{u'}{2} (1-\gamma^2) h'^2_{s1} + \frac{u'}{2} (a^2-1) \right\} \\ x'_s &= (\gamma h'_{s1})^m - u' \gamma h'_{s1} + u' \cdot t'_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$h'^m_{s1} = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^m} u' \cdot h'_{s1} + \frac{u'}{1-\gamma^m} (1-a), \quad a = \frac{m-1}{m} \left(\frac{u'}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

$$S-3: x'_s = h'^{m-1}_{s*} (t'_s - \tau'_{s1}) + u' \cdot \tau'_{s1} \dots\dots\dots (27)$$

(直線)

$$h'_{s*} = u' (h'_{s*} + 1 - a)$$

$$\tau'_{s1} = 1 + \frac{m-1}{2(m+1)(1-a)} h'^2_{s*} + \frac{m}{m+1} h'_{s*} - \frac{1}{2} (1+a)$$

この場合、 $h'_{s2}=0$ で、 $h'_{s1}=h'_{s*}=\text{const.}$ となり、上記の 2 番目の m 次方程式より試算的に得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{S-2'}: t'_s &= \frac{2m-1}{2(m-1)u'} h'_s{}^m - \frac{m}{m^2-1} h'_s \\ x'_s &= \frac{m}{2(m-1)u'} h'_s{}^{2m-1} - \frac{1}{m^2-1} h'_s{}^m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

この場合も $h'_{i2}=0$ で, $h'_{i1}=h'_i$ が助変数となっている。

$$S-3': x'_s = h_{s*}^{m-1}(t'_s - t'_{s3}) + \frac{m}{2(m-1)u'} h_{s*}'^{2m-1} - \frac{1}{m^2-1} h_{s*}'^m \dots (29)$$

(直線)

$$\tau'_{s3} = \frac{2m+1}{2(m+1)} h'_{s*} + \frac{2m-1}{2(m-1)} (1-a)$$

この h'_{*} は S-3 の場合と同じ式より得られる一定値である。

以上の front の発生条件を式で示すと以下のようである。

S-1 :	$0 < u' < u_{*2}$	かつ	$\omega > \omega_c$
S-2 :	$u_{*1} < u' < u_{*2}$	かつ	$\omega > \omega_{s1}$
S-3 :	$\nearrow$	かつ	$\omega > \omega_{s2}$
S-2' :	$0 < u' < u_{*1}$	かつ	$\omega > \omega_{s1}$
S-3' :	$\nearrow$	かつ	$\omega > \omega_{s2}$

ここに、

$$u_{*1} = \left\{ \frac{m-1}{m+1} \left(\frac{2m}{m+1} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{m-1}{m} \left(\frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}^{1-m}, \quad u_{*2} = m \left(\frac{m}{m-1} \right)^{m-1}$$

$$\omega_c = \left(\frac{u'}{m} \right)^{\frac{m}{m-1}}, \quad \omega_{s2} = u' \cdot \tau_{s1} \text{ (前記)}, \quad \omega_{s1} = \left(\frac{2mu'}{m+1} \right)^{\frac{m}{m-1}},$$

$$\omega'_{s2} = \frac{m}{2(m-1)u'} h_{s*}^{2m-1} - \frac{1}{m^2-1} h_{s*}^m \text{ (} h_{s*} \text{ は前記)},$$

そして ω_{s1} は S-1 から S-2 への移行点の x' の値で、式(25)と(26)の x'_s が等しいとして得られるが陰形式となる。

上記の条件をもう少しわかり易くするため、**Fig. 13** を示す。これは m と u' の関係において、shock の発生しない領域及び shock が発生する領域をさらに、 $S-1, 2, 3$ の系列が発生する領域と $S-1, 2', 3'$ のところを明示したものである。この図で、 $m=5/3$ なら、例えば $u'=1$ なら $S-1, 2', 3'$ の系列、 $u'=2$ なら、 $S-1, 2, 3$ の系列が生じることがわかる（図中の丸印）。**Fig. 14, 15** はこれらの場合の front の軌跡を $\rho \sim x'$ 平面に図示したもので、いずれも $x' < \omega_c$ では shock は発生しない（点 $(0, 0)$ から出発する実線の曲線は特性曲線を示す）。

さて、**Fig. 16** は **Fig. 14** の場合のピーク水深及び front 水深と x'' の関係を例示したもので、前述のように S-3' では front 水深は一定となり、その大きさは約 2、すなわち実水深 h は総雨量の約 2 倍近くにもなることを示している（雨域の移動を考えない通常の場合は h の最大値は R を越えない）。そこで、この雨域の移動によって水深が最大どの程度になり得るかを検討してみると、最大となる条件が $u' = u_{*2}'$ すなわち、**Fig. 13** で shock が発生しない限界条件であることがわかり、そのときの $h' = h_{max}'$ は次式で与えられることがわかる。

$$h'_{max} = h_{max}/R = m^{\frac{m}{m-1}}/(m-1) \dots\dots\dots (30)$$

Fig. 17 はこの $h'_{max} \sim m$ 関係を図示したもので、 m が 1 に近いほど ($m=1$ のときは無限大) h'_{max} は大と

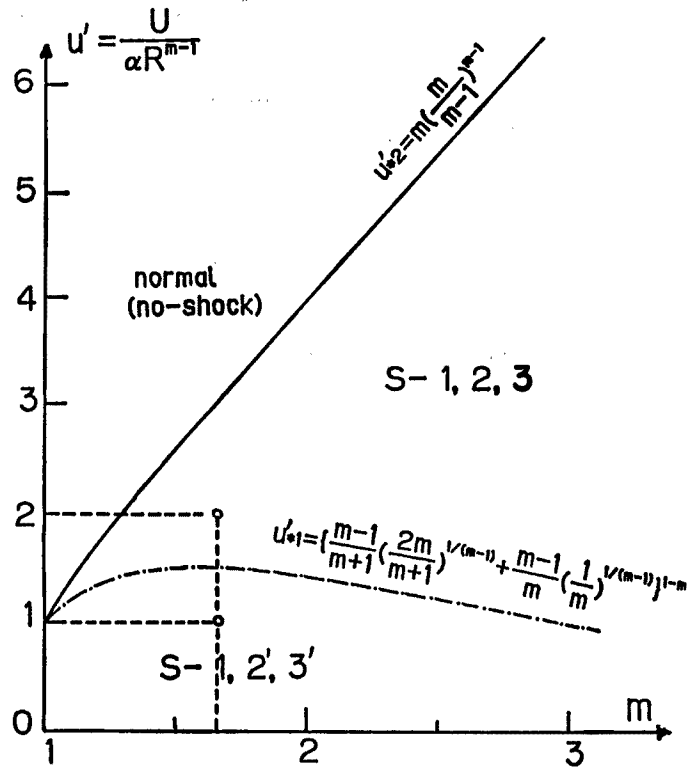


Fig. 13 Domains of no-shock and the shock series designated S-1, 2, 3 and S-1, 2', 3' in $m-u'$ plane.

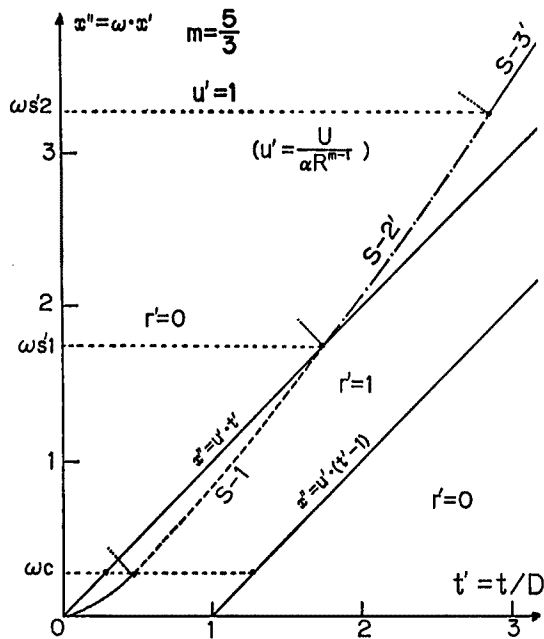


Fig. 14 Example of the shock front loci S-1, 2' and 3'.

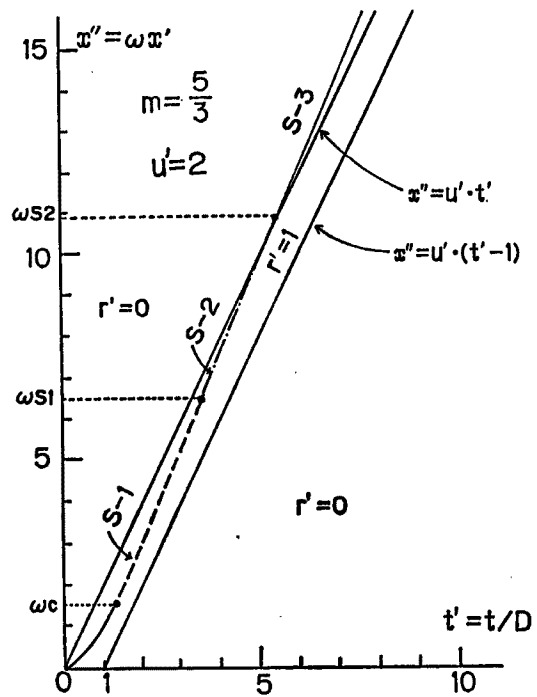


Fig. 15 Example of the shock front loci S-1, 2 and 3.

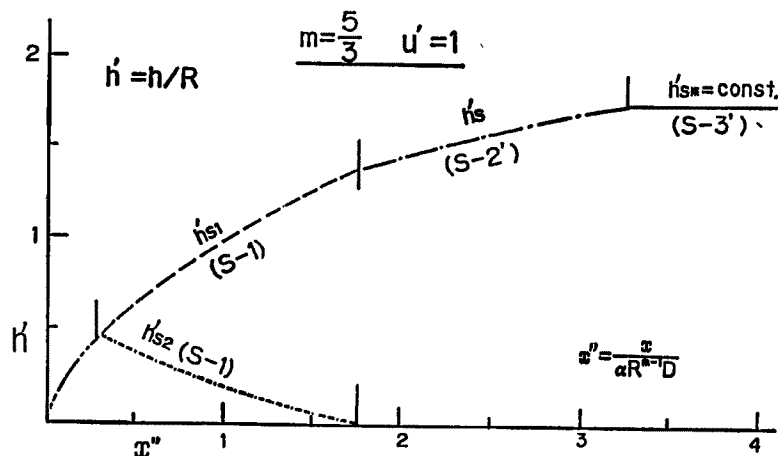


Fig. 16 Example of the normalized frontal depths at normalized distance on slope corresponding to Fig. 14.

なり，例えば $m=5/3$ のときは h'_{max} は約 5.4（ただし $u' = \omega/\nu = 3.07$ のとき）となること等がわかる。

なお，上記の 5 種類の shock の発生条件をより明確にするため， $u' = \omega/\nu$ なる関係を用いて ω, ν の両対数平面上に各 shock の発生領域を， $m=5/3$ (Manning 則) として図示したものが Fig. 18 である。この図で曲線の境界線はいずれも ω と ν の陰形式の関係である。また S-2 の領域と shock の非発生領域（図中の normal）の境界線及びその延長線（点線）は上記の h'_{max} が生じるところを示す。この図に基づいて，山腹斜面・降雨特性等の常識的な原変量の値を種々想定して ω, ν のとり得る値の範囲を検討してみたところ，shock の形態として S-1 と S-2' しか生じ得ないであろうことが判明し，原変量に戻した検討の必要性（逆にいえば無次元解析の危険性）が痛感された。

4.3 ケース C（入力及び場の特性の連続分布）

3.3 でも述べたように，この場合は上記のケース A, B のように front の軌跡の一般式を解析的に得ることが困難であることが判明したわけであるが，shock の発生条件について検討し，不十分ではあるが一般性のある結果を得たので，それについて示す。

まず，この場合の特性曲線の式は $0 \leq x' \leq 1, 0 \leq t' \leq 1$ において次式で表わされることがわかる。

$$B_0 \cdot (t' - \tau'_0) = (A - \xi'_0)^p \cdot g(z) \quad \dots \dots \dots (31)$$

ここに， τ'_0 は斜面上流端の出発時刻， ξ'_0 は $t'=0$ での斜面上の出発位置であり， $B_0, p, g(z)$ は次式で表わされるものである。

$$B_0 = m \left(\frac{c}{\omega} \right)^{1/m} \left(\frac{c_0}{N+1} \right)^{\frac{m-1}{m}}, \quad p = \frac{1-M-(m-1)N}{m}$$

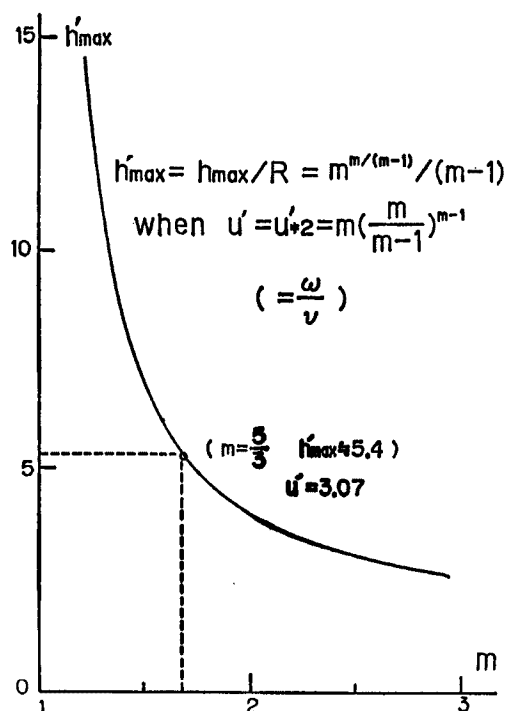


Fig. 17 Relation between m and h'_{max} .

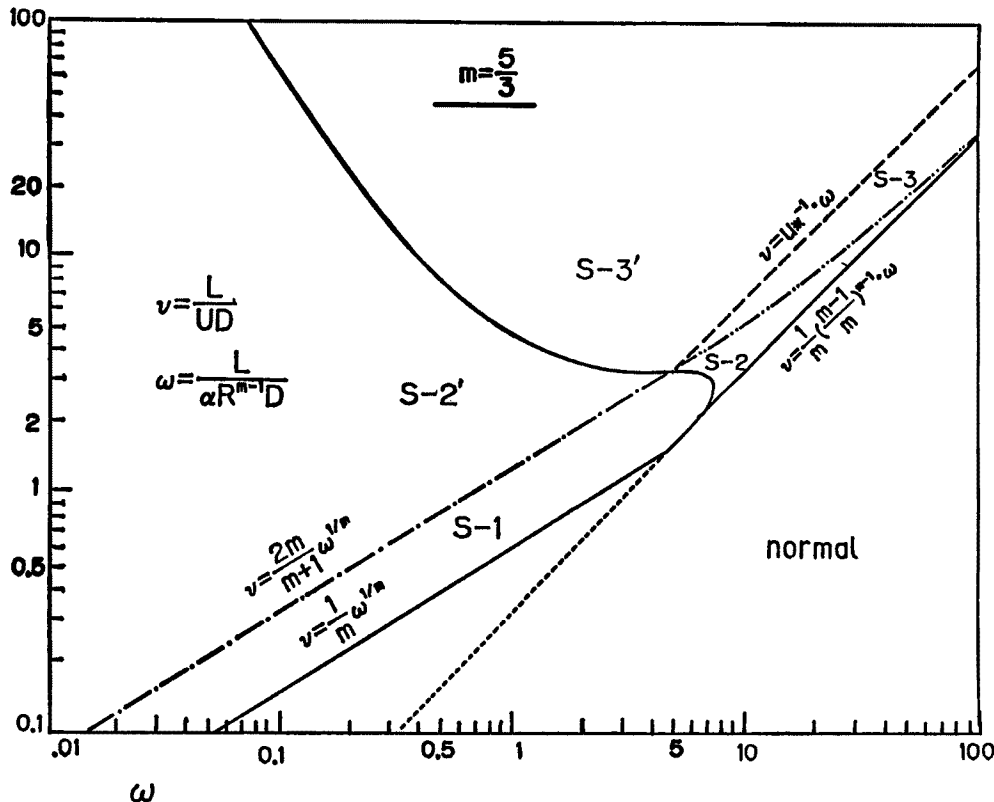


Fig. 18 Domains of no-shock(normal) and shocks S-1, 2, 2', 3 and 3' as $m=5/3$ (Manning's law) in $\log \omega$ - $\log \nu$ plane.

$$g(z) = \int_0^* \frac{1}{(1-y)^{M/m} \{z_0^{N+1} - (z_0 - y)^{N+1}\}^{\frac{m-1}{m}}} \cdot dy, \quad \left(z = \frac{x' - \xi'_0}{A - \xi'_0}, z_0 = \frac{A_0 - \xi'_0}{A - \xi'_0} \right)$$

そこで次に shock の発生しない必要十分条件を考えてみると、 $\tau'_0=0$, $\xi'_0 \geq 0$, $x'=\text{const.}$ のとき、 $dt'/d\xi'_0 < 0$ であればよいことがわかる (Fig. 19 参照)。この条件を式(31)に適用すると、次式が得られる。

$$p \cdot g(z) + (1-z) \cdot \frac{dg(z)}{dz} > 0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

ここで、 $g(z) > 0$, $1-z > 0$, $dg(z)/dz > 0$ であるので、 $p \geq 0$ であれば式(32)は常に成立する。すなわち、 $p \geq 0$ は shock が発生しない十分条件となる。これは p の定義式から次の関係を意味する。

$$N \leq \frac{1}{m-1} (1-M) \quad \dots\dots\dots(33)$$

この関係を $M \sim N$ 平面に m をパラメータとして示すと Fig. 20 のようになる。すなわち、両座標軸と、 m をパラメータとした斜線で囲まれた三角形の領域内 (境界を含む) に M, N があれば shock は決して発生しない。昨年度行った解析研究¹⁾で shock なしに段波状のハイドログラフが得られたのは、本解析の記号でいえば $M=0$, $A_0=1$ のもとで、 $m=2$ かつ $N=1$, 及び $m=3/2$ かつ $N=2$ の場合であり、又、その後の検討で $m=5/3$ かつ $N=1.5$ としても同様の結果が得られることを確認しており、ここでの結果と矛盾しない。なお、 $g(z)$ が解析関数として得られる場合が限られているので、このケースの shock 非発性の必要条件は一般的に得ることはできないが、 $g(z)$ が解析関数として得られる $N=0$, $M=2$, $m=2$ の場合は $A > 1.437$, 同じく $N=M=1$, $m=2$ で、 $A=A_0$ とした場合には $A > 1.66$ であれば、それぞれ式(33)の十

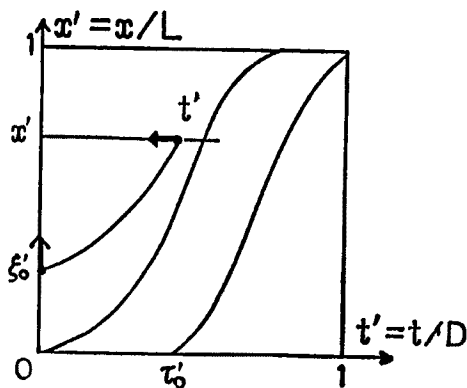


Fig. 19 Illustration of condition of no-shock, i. e. no-crossing of characteristics.

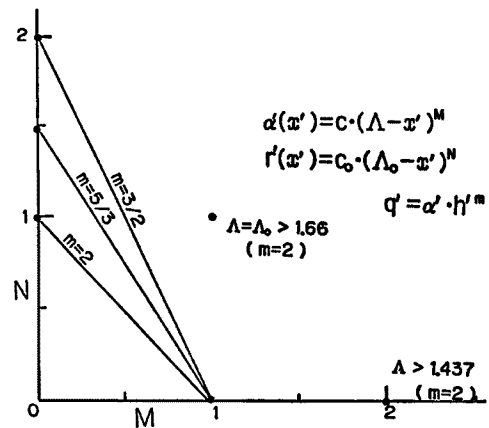


Fig. 20 Illustration of the sufficient condition of no-shock as m fixed (each rightangled triangle including three sides), and examples of the necessary one for $m=2$.

分条件外の場合ではあるが shock は発生しないことを確認している。

5. あとがき

以上本研究では、流出解析における場及び入力の不均一性の効果の評価問題に関わる基礎的研究の一環として、地表面流における不連続現象である kinematic shock に注目し、単一斜面雨水流モデルに基づき、shock 発生の可能性のある 3 種のモデルケース；A.有効降雨が斜面流下方向にステップ状減少関数分布をする場合、B.雨域が斜面流下方向に等速移動する場合、及びC.有効降雨及び（又は）流れ係数が斜面流下方向に指数型単調減少関数分布をする場合、を取り挙げ、それぞれ無次元化のもとに次のようなことを行った。まず、ケースAでは下流無降雨域におけるものを含めて shock front の軌跡及び front 水深の一般式を解析的に求めて示し、ケースBでは front の軌跡、水深の一般式の他に生じ得る最大水深を求め、それらの発生条件も明示した。又、ケースCについては front 軌跡の一般式を解析的に得ることが困難であるため、shock の発生条件について考察し、shock 非発性の十分条件等を示すにとどまった。なお、ここでは shock front に注目したため、全体の流出ハイドログラフの形態は示さなかったが、ケースA、Bについては front 軌跡の導出過程において必要であった水深分布から直ちに得られることはいうまでもない。

以上の解析によって得られた結果は、もとより単純なモデルに基づく純数学的なものにすぎず、必ずしも実際の現象と合致しない点が多々あることはいうまでもないが、基礎式である kinematic 近似が成立する限り^{3),4)}においては当らずといえども遠からずと考えられ、流出現象における入力及び場の不均一性による特に非線形効果が無視できない場合がどのような場合であるか等を示唆する基礎情報となると共に、今日実用化されている雨水流法 (kinematic wave 法) における kinematic shock の取り扱いに際して、例えば数値計算法の妥当性の検証用や改良といった間接的な役に立つものと考えている。こうした場合、もちろん水理実験等による実証的検討の裏付けが必要であることはいうまでもない。しかし、ここで示したモデルケースのような実験を精度よく行うには、極めて大規模かつ（又は）精巧な装置等が必要と考えられ、その実行は容易ではなからうが、前報⁴⁾の結果の実証も含め、今後の重要な課題の1つといえよう。逆に、本研究の解析結果は、こうした実験の計画を立てる際の基礎情報として役立つことにもなる。

参 考 文 献

- 1) 友杉邦雄・石原安雄：降雨分布特性が出水波形特性に及ぼす効果——要素的直接流出場の水理モデルの解析解による検討——，京大防災研年報，第29号 B-2, 1986, pp. 193-215.
- 2) Lighthill, F. R. S. and G. B. Whitham: On Kinematic Waves, I, Flood Measurements in Long Rivers. Proc. Royal Soc. of London, A-229, 1955, pp. 281-316.
- 3) Woolhiser, D. A. and J. A. Liggett: Unsteady one-dimensional flow over a plane —The rising hydrograph, Water Resources Research, 3(3), 1967, pp. 753-771.
- 4) Morris, R. G. and D. A. Woolhiser: Unsteady one-dimensional flow over a plane: Partial equilibrium and recession hydrographs, Water Resources Research, 16(2), 1980, pp. 355-360.