

## 等質確率場に関する 2, 3 の話題

駒根大 文理 麻生泰弘

先冬に行われた, “多重マルコフ性と予測理論への応用”  
に於て, 筆者は E. WONG (1969) の紹介を行った。  
この論文に於て, E. WONG (1969) の紹介及び問題  
点の指摘, (2) U. D. PÖPPERT (1968) による線  
形外挿問題の結果の振張を述べ, 簡単な文献表を記す。

(2) に関する, 英文原稿 “On a Linear Extrapolation  
Problem of Some Homogeneous Random Fields” を参照され  
たい。

### §1. E. WONG (1969) の紹介

E. WONG (1969), “HOMOGENEOUS  
GAUSS-MARKOV RANDOM FIELDS”  
, Ann. Math. Stat., 40, pp. 1625-1634 を紹介す  
る。

この論文の構成は、2. i" Second-order properties を扱い、  
 3. i" Homogeneous Gauss-Markov Fields を特徴づける (定理 1)、  
 4. i" Generalized Homogeneous Gauss-Markov Fields  
 を扱う (定理 2)。以下、順次、紹介する。

$(\Omega, \mathcal{C}, P)$ : a fixed probability space

$\{x(\omega; z), \omega \in \Omega, z \in V_n\}$ :  $n$  次元パラメータ空間  $V_n$  をもつ

Gaussian random field

以下、 $V_n$  は (a) Euclid 空間  $E^n$ , あるいは  
 rank 1 なる定曲率対称空間 (b) 球面  $S^n$  及び (c) 実双  
 曲空間  $H^n$  である。

$GL(V_n)$ : 距離を保つ  $V_n$  の運動の full linear group

Def: 任意の集合  $A = \{z_i\} \subset V_n$  に対し、

$\{x(z_i), z_i \in A\}$  と  $\{x(gz_i), z_i \in A\}$  とが  $g \in GL(V_n)$

のとき、同一分布を有するとき、確率場  $\{x(z), z \in V_n\}$  は  
 等質 (homogeneous) であるという。

この論文は扱うマルコフ性は次の様に理解する。すなわち  
 ,  $\partial D$  を含む次元  $n-1$  なる  $V_n$  の曲面とし、 $V_n$  を  
 有界領域  $D^-$  と、領域  $D^+$  とに分けるものとする。 $\{x(z), z \in \partial D\}$   
 が与えられたとき、 $\{x(z), z \in D^-\}$  と  $\{x(z), z \in D^+\}$  とが

独立ならば、確率場  $\{X(z), z \in V_n\}$  はマルコフ性をもつという。

以下、確率場  $\{X(z), z \in V_n\}$  を 2 次元平均連続な Gaussian field  $\varphi$  は homogeneous とする。平均値関数を 0 とする。また、相関関数を  $R(d(z, z'))$ ,  $d(z, z')$  は  $z, z' \in V_n$  の距離, と記す。相関関数  $R(d(z, z'))$  は正値定符号である。

$\Delta(V_n)$ : the Laplace-Beltrami operator  
metric を

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r) \sum_{i=1}^{n-1} \left( \prod_{k=i+1}^{n-1} \sin^2 \varphi_k \right) dq_i^2$$

と表わすとき,

$$\Delta(V_n) = \left\{ g^{n-1}(r) \right\}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[ g^{n-1}(r) \frac{\partial}{\partial r} \right] + (g^2(r))^{-1} \Delta(S^{n-1}),$$

$$\Delta_0(V_n) \equiv \left\{ g^{n-1}(r) \right\}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[ g^{n-1}(r) \frac{\partial}{\partial r} \right].$$

$\psi(0) = 1$ ,  $\Delta_0(V_n)\psi = \lambda\psi$  なる関数  $\psi$  は,  $V_n$  上の (zonal) spherical function である。(正値定符号)

$\mathcal{L}$ :  $\int g^{n-1}(r) |f(r)| dr < +\infty$  なる複素数値関数の  
集合

$\mathcal{M}$ : すべての spherical function の集合

$\mathcal{M}$  に次のような最弱位相を与える;

すなわち,  $f \in L$  の Fourier 変換

$$\hat{f}(\psi) = \int \psi(r) f(r) g^{n-1}(r) dr, \quad \psi \in \mathcal{M}$$

が連続となる最弱位相を与える。このとき, Naimark, Normed Rings, p. 426 に於て,

$$R(r) = \int_{\mathcal{M}} \psi(r) \sigma(d\psi),$$

$\sigma(d\psi)$  は  $\mathcal{M}$  上の finite Borel 測度。

$\Lambda: \Delta_0(\mathbb{R}^n)$  の固有値の集合

$\Lambda$  の  $\lambda$  に対応する spherical function を  $\psi(\lambda, r)$  と書くとき,

$$R(r) = \int_{\Lambda} \psi(\lambda, r) \bar{\pi}(d\lambda),$$

ここに  $\bar{\pi}(d\lambda)$  は  $\Lambda$  上の finite Borel 測度。

spherical function  $\psi$  は, 具体的に 15 次のように与えられる。

(1)  $E^n$  のとき;

$$\psi(\lambda, r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\nu r)}{\left(\frac{\nu r}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \lambda = -\nu^2, \quad 0 \leq \nu < +\infty$$

(2)  $S^n$  のとき;

$$\psi(\lambda, r) = \frac{\Gamma(n-1) k!}{\Gamma(n+k-1)} C_k^{\frac{n-1}{2}}(\cos(r)),$$

$$\lambda = -k(k+n-1), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(3)  $H^n$  のとき;

$$\psi(\lambda, r) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\operatorname{sh}^{\frac{n-2}{2}}(r)} \rho_{-\sigma-\frac{n}{2}}^{\frac{2-n}{2}}(\operatorname{ch}(r)),$$

$$\sigma = -\frac{n-1}{2} + \sqrt{1} \rho \ (\rho \neq 0) \text{ (fundamental series) 及 } \nu = \sigma: \text{noninteger} \in (-n+1, 0) \text{ (complementary series) } z'',$$

$$\lambda = \sigma(\sigma + n - 1).$$

注意1: E. Wong, A. M. Yaglom (1961) によれば,  $H^n$  の場合の complementary series が存在しない。

注意2:  $S^n$  に扱う空間の場合には, Laplace-Beltrami 作用素が一意的に定まり, 従って spherical function も上述の要請により完全に定まる。

$L^2(S^{n-1})$ :  $S^{n-1}$  上の一様な測度に関する  $L^2$  乗可積分関数空間の基底

$m=0, 1, 2, \dots$  に対し,

$$\Delta(S^{n-1})h = -m(m+n-2)h$$

の解をなす空間 ( $GL(S^{n-1})$  不変) を  $Z_m$  とし,  $\dim(Z_m) = d_m$  とおく。  $Z_m$  の基底, 実数値関数で正規直交なるものをとり  $\{h_{m\ell}, 1 \leq \ell \leq d_m\}$  とおく。

これをを用いて, 我々は次の展開式をうる;

$$(1) \quad \psi(\lambda, d(z, z')) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_m} h_{m,l}(q) h_{m,l}(q') \psi_m(\lambda, v) \psi_m(\lambda, v'),$$

::: 1 = ,

$$[\Delta_0(V_n) - \{q^2(v)\}^{-1} \{m(m+n-2)\}] \psi_m = \lambda \psi_m.$$

以上第2節の内容である。

(1) を用いて,

$$(2) \quad R(d(z, z')) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_m} h_{m,l}(q) h_{m,l}(q') \int_{\Lambda} \psi_m(\lambda, v) \psi_m(\lambda, v') d\tilde{F}(\lambda).$$

いま,  $\{x_{m,l}(v)\}$  を独立な 1 次元 Gauss 過程とする。又

より,

$$\mathbb{E} x_{m,l}(v) x_{p,k}(v') = \delta_{mp} \delta_{lk} \int_{\Lambda} \psi_m(\lambda, v) \psi_m(\lambda, v') d\tilde{F}(\lambda).$$

$$(3) \quad x(q, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_m} h_{m,l}(q) x_{m,l}(v).$$

$$x_{m,l}(v) = \int x(q, v) h_{m,l}(q) dv(q),$$

$S^{n-1} :: 1 = dv(q)$  は  $S^{n-1}$  上の normalized

Haar measure .

Lemma 1:

$x(z)$ ,  $z=(v, \omega)$  を等質な Gauss-Markov field とする。

$$x_{m2}(v) \equiv \int_{S^{n-1}} x(z) h_{m2}(\omega) dS(\omega)$$

↙  $\{x_{m2}(v)\}$  は、独立な 1 次元 Gauss-Markov 過程である。

$E x_{m2}(v) x_{m2}(v') = f_m(\max(v, v')) g_m(\min(v, v'))$   
 を満たす関数  $f_m, g_m$  が存在する。

Theorem 1:

$\{x(z), z \in T_n\}$  が 2 次元平均連続な homogeneous Gaussian field とする。

↙  $\{x(z), z \in T_n\}$  が Markovian であるための必要条件は、

$$(4) \quad R(d(z, z')) = C \psi(d(z, z')),$$

ここに  $C = R(0)$  であり,  $\psi$  は  $T_n$  上の  
 spherical function,  
 が存在するとしてある。

注意: (4) を満たす nontrivial な Markovian

field の存在の検討が残っている。事実,  $V_n = \mathbb{R}^n$ ,  $\partial D$  を半径  $r$ , 中心は原点なる球面とすると,  $\partial D$  上の値に  $\delta$  1, すべての  $z \in V_n$  どの値が確率 1 で定まってしまう。

以下 3 節の内容である。

以下に紹介する 4 節の内容は検討している。

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  : 急減少な  $C^\infty$ -実数値関数の Schwartz 空間

$\mathcal{H}$  : 平均 0 なる実 Gaussian 確率変数のヒルベルト空間

$X : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$  cont. linear map を real zero-mean Gaussian generalized Random field とする。

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (isometry) に対し,

$$(T_g f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}z), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Def. :  $\forall g \in GL(\mathbb{R}^n)$  に対し,

$$B(f_1, f_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} X(f_1) X(f_2) = \mathbb{E} X(T_g f_1) X(T_g f_2), \\ f_1, f_2 \in \mathcal{S}$$

のとき,  $X$  は homogeneous とする。  $B$  は  $X$  の covariance bilinear form とする。

- bilinear f'nal  $B$  on  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ , homogeneous Gaussian generalized random field  $X$  の covariance f'nal  $\gamma$  があるための必要十分条件は,

$$(5) \quad B(f_1, f_2) = \int_0^\infty \sum_{m, l} \hat{f}_{me}^{(1)}(\lambda) \hat{f}_{me}^{(2)}(\lambda) d\bar{F}(\lambda),$$

$\bar{F}$  は  $(0, \infty)$  上のゆるぎある非減少関数であり

$$(6) \quad \hat{f}_{me}(\lambda) = \int_{S^{n-1}} d\nu(q) \int_0^\infty r^{n-1} dr f(r, q) \psi_m(-\lambda, r) h_{me}(q)$$

$, m=0, 1, 2, \dots, 1 \leq l \leq d_m$

もみたす  $\gamma$  である。

$\partial D$ : a smooth  $n-1$  closed surface in  $R^n$

$d\sigma$ : the differential surface area on  $\partial D$

$f \in L^2(\partial D, d\sigma) \iff \hat{f} \in \mathcal{H}_1$

$$\hat{f}_{me}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial D} f(x) \psi_m(-\lambda, r(x)) h_{me}(q(x)) d\sigma,$$

$$\tilde{f}(q, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m, l} h_{me}(q) \hat{f}_{me}(\lambda).$$

また,

$$\hat{f}(q, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m, l} \hat{f}_{me}(\lambda) h_{me}(q).$$

いま,  $f \in \mathcal{L}^2(\partial D, d\sigma)$  のとき  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(d\tilde{\mu}, d\sigma)$  なる  $X$  に対し,

$$\begin{aligned} X_{\partial D}(f) &\equiv \sum_{m,l} \int_0^\infty \tilde{f}_{ml}(\lambda) \hat{x}_{ml}(d\lambda), \\ &:: \hat{x}_{ml}(d\lambda) \text{ is,} \\ X(f) &= \sum_{m,l} \int_0^\infty \hat{f}_{ml}(\lambda) \hat{x}_{ml}(d\lambda) \\ &\text{である.} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(\partial D)$ : the closed linear manifold generated by  $\{X_{\partial D}(f), f \in \mathcal{L}^2(\partial D, d\sigma)\}$ .

$P_{\partial D} \mathcal{H}(\partial D')$ :  $\mathcal{H}(\partial D)$  への射影  $P_{\partial D}$  による  $\mathcal{H}(\partial D')$  の像

Def.: 任意の  $\partial D_1 \subset \partial D \subset \partial D_2$  に対し,

$\mathcal{H}(\partial D_2) - P_{\partial D} \mathcal{H}(\partial D_2)$  と  $\mathcal{H}(\partial D_1)$  と直交する  
とき,  $X$  は Markovian であるといふ。

Theorem 2:

$\{X(f), f \in \mathcal{S}\}$ : homogeneous Gaussian generalized random field on  $\mathbb{R}^n$ , with spectral distribution  $\bar{\Gamma}$

↙  $X$  が Markovian であるための必要十分条件は,

$$(7) \quad \int_0^\infty \psi_0(-\lambda, r) \bar{\Gamma}(d\lambda) = R(r), \quad r > 0$$

$\mathcal{R},$

(8)  $\{T^{n-1}\}^{-1} \frac{d}{dv} \left[ v^{n-1} \frac{d}{dv} \right] R = \alpha R$ ,  $\alpha$ : 正定数  
 を持たず  $(0, \infty)$  上の 2 回微分可能な関数を定義する  
 ことである。

方程式 (8) の解は,

$$(a) \quad R(v) = C_1 J_{\frac{n-2}{2}}(v_0 v) / (v_0 v)^{\frac{n-2}{2}}$$

及び

$$(b) \quad R(v) = C_2 K_{\frac{n-2}{2}}(v_0 v) / (v_0 v)^{\frac{n-2}{2}}$$

であり, (a) は  $\lambda = v_0^2$  での jump するスペクトル測度  $\bar{\mu}$  に対応し, (b) は

$$\bar{\mu}(dv^2) = \frac{C_2}{v_0^n} \frac{v^{n-1} dv}{1 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2}$$

に対応する。(b) のとき,  $n=1$  ならば,

$$R(r) = \frac{1}{2} \pi A e^{-v_0 |r|}$$

となり, これは Ornstein - Uhlenbeck process の相関関数

注意 4: Wong は,  $S^n$  を基底  $T_k$  2 に相当する結果を得  
 ているが,  $H^n$  の場合は未解決と述べている。

注意 5: 確率場の多次 Markov 性に関する議論, 2 行, 2 行

注意 6: 対称空間の rank  $> 1$  の場合は, この論文の論  
 法は適用困難と思われる。

# On a Linear Extrapolation Problem Of Some Homogeneous Random Fields

Yasuhiro Asoo (Shimane Univ.)

## §0. Introduction and Summary

Let  $V$  be the  $d$ -dimensional Euclidean space or  $d$ -dimensional sphere. Our random field  $(X(\omega; z), z \in V)$  has the mean function 0 and the covariance function  $R(z, z')$ , and it belongs to the class  $L^2(\Omega)$ . We call it the homogeneous random field whenever  $R(gz, gz') = R(z, z')$  for any  $g \in GL(V)$ . In this case, the covariance function is of the form  $R(\rho(z, z'))$ , where  $\rho(z, z')$  is a distance between  $z$  and  $z'$ . Moreover, we assume that the random field  $X(z)$  is continuous in quadratic mean, then the covariance function  $R(\rho(z, z'))$  is a positive definite function. As well known, the positive definite function has the spectral representation with spherical functions. In our case, it takes the following forms;

for  $V = E^d$ ,

$$R(\rho(z, z')) = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{d}{2}-1}(\lambda \rho)}{(\lambda \rho)^{\frac{d}{2}-1}} dF(\lambda),$$

, where  $R(0) = F(+\infty) < +\infty$ ,

(1)

for  $V = S^d$ ,

$$R(\rho(z, z')) = \Gamma(d-1) \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(d-1)} \frac{C_\nu^{d-1}(\rho)}{C_\nu^{d-1}(1)} w(\nu),$$

, where  $w(\nu) \geq 0$  and  $R(0) = \sum_{\nu=0}^\infty w(\nu)$

We consider the following extrapolation problem; our data is observations on  $n$  concentric spheres with center at coordinate origin, and using these observations, we will extrapolate any one point outside of these regions. Let an extrapolated value be  $\hat{X}(z)$ ; our extrapolation error is measured by

$$\delta^2(z) = E(X(z) - \hat{X}(z))^2. \quad (2)$$

Our extrapolator  $\hat{X}(z)$  is of the form, when we denote a point  $z$  by coordinate  $(\theta, \phi)$ ,  $\theta \in S^{d-1}$  and  $0 \leq \phi < +\infty$  ( $V = E^d$ ),  $0 \leq \phi \leq \pi$  ( $V = S^d$ ),

$$\hat{X}(z) = \sum_{i=1}^n \int_{S^{d-1}} c^{(i)}(z; \vartheta) X(\vartheta; \theta_i) dv(\vartheta), \quad (3)$$

, where  $dv(\vartheta)$  is the normalized Haar measure on  $S^{d-1}$ .

We will determine coefficients  $c^{(i)}(z; \vartheta)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) to minimize the error  $\delta^2(z)$  and evaluate the minimum value of  $\delta^2(z)$ . We assume that these coefficients belong to the class  $L^2(S^{d-1})$ . In the following, we treat these problems and in particular, for the case of  $n = 1$  and origin, we will give an explicit evaluation. U.D. Popov (1968) treated the same problem for  $V = E^2$ .

### §1. Euclidean space

In this case, our coefficients  $c^{(i)}(z, \vartheta)$  have the Fourier expansion

$$c^{(i)}(z; \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_K \hat{c}^{(i)}(z; K) H_K^{\ell}(\vartheta), \quad (4)$$

, where  $\vartheta = (\vartheta^{(d-1)}, \dots, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(1)})$ ,

$0 \leq \vartheta^{(1)} < 2\pi$ ,  $0 \leq \vartheta^{(j)} \leq \pi$  ( $j \neq 1$ ) and  $H_K^{\ell}(\vartheta)$

( $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ;  $K = (k_1, \dots, k_{d-2})$  such

that  $k_0 = \ell \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{d-2} \geq 0$ ) are the

complete orthonormal system of  $L^2(S^{d-1})$ .

For fixed  $z_j \in E$ , a set of observation points, from (3) we have

$$R(\rho(z, z_j)) = \sum_{i=1}^n \int_{S^{d-1}} c^{(i)}(z; \vartheta) R(\rho(z_i, z_j)) dv(\vartheta). \quad (5)$$

Putting  $z_i = (\theta_i, \vartheta_i)$ ,  $z_j = (\theta_j, \vartheta_j)$ , we get

$$R(\rho(z_i, z_j)) = r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{\ell_{d-2}} a_{\ell}^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \overline{H_L^{\ell}(\vartheta_i)} H_L^{\ell}(\vartheta_j) \quad (6)$$

, where  $a_{\ell}^{(d)}(\theta_i, \theta_j) = \int_0^{\pi} \frac{J_{\ell}(\rho_i \rho_j \cos \nu)}{(\rho_i \rho_j)^{\ell}} \frac{J_{\ell}(\rho_i \rho_j \sin \nu)}{(\rho_i \rho_j)^{\ell}} dF(\nu)$ .

Substituting (4) and (6) in (5), we get

$$R(\rho(z, z_j)) = r^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{\ell_{d-2}} \sum_{i=1}^n a_{\ell}^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z; L) H_L^{\ell}(\vartheta_j)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L \gamma_j^{(d)}(z; l, L) H_L^l(q_j), \quad (7)$$

, where  $\gamma_j^{(d)}(z; l, L) = P^{(d)}(\frac{1}{2})(-1)^{l_{0-2}} \sum_{i=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \cdot \hat{c}^{(i)}(z; L).$

From the expression (7), we can determine coefficients  $\gamma_j^{(d)}(z; l, L)$  uniquely and the matrix  $A_l^{(d)} = (a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j))$  is a nonnegative definite symmetric matrix, so that whenever  $\det(A_l^{(d)}) \neq 0$ , we can determine coefficients  $c^{(i)}(z, q)$  uniquely. To evaluate the error  $\delta_{\Pi}^2(z)$ , we need an evaluation of  $\|\hat{X}(z)\|^2 = E(\hat{X}(z))^2$ . While from (3) and (5), using (7), we get

$$\begin{aligned} \|\hat{X}(z)\|^2 &= P^{(d)}(\frac{1}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{l_{d-2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \overline{\hat{c}^{(i)}(z; L)} \hat{c}^{(j)}(z; L) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L \sum_{i=1}^n \hat{c}^{(i)}(z; L) \gamma_i^{(d)}(z; l, L) \end{aligned} \quad (8)$$

In particular, when  $n = 1$ , we have

$$\delta_1^2(z) = F(+\infty) - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L (-1)^{l_{d-2}} P^{(d)}(\frac{d}{2}) \frac{[a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)]^2}{a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)} |H_L^l(q_0)|^2. \quad (9)$$

Thus we have a proposition

Proposition 1: In the Euclidean case, using a extrapolator of the form (3), when we have observations on one sphere with center at origin, the extrapolation error is given by the formula (9), and in particular, for  $d = 2$ , it depends only on distance from origin.

For the case of  $d = 2$ , the expression (9) becomes as

$$\delta_1^2(z) = F(+\infty) - \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^{(2)}(\theta_0, \theta_1))^2 / a_l^{(2)}(\theta_1, \theta_1).$$

Finally, we consider extrapolation of origin. In this case,

$$\begin{aligned} R(p(z, z_j)) &= R(\theta_j) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_L \gamma_j^{(d)}(z; l, L) H_L^l(q_j), \\ \text{so that } \gamma_j^{(d)}(z; l, L) &= \delta(l) \delta(L) R(\theta_j) \text{ and} \\ \delta_n(z) &= F(+\infty) - P^{(d)}(\frac{d}{2}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_0^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \overline{\hat{c}^{(i)}(z; 0)} \hat{c}^{(j)}(z; 0) \end{aligned} \quad (10)$$

, in particular when  $n = 1$ , we have

$$\delta_1^2(z) = F(+\infty) - \frac{1}{2^{d-2}} \frac{[P^{(d)}(\frac{d}{2}) \sum_0^{\infty} \frac{J_{d-2}(q_0)}{(\frac{d}{2})^{\frac{d-2}{2}}} df(q_0)]^2}{\sum_0^{\infty} [P^{(d)}(\frac{d}{2}) \frac{J_{d-2}(q_0)}{(\frac{d}{2})^{\frac{d-2}{2}}} df(q_0)]^2}.$$

In the latter case, using Cauchy-Schwarz inequality, we get a lower

bound of error,  $\delta_1^2(z) \geq F(+\infty)(1 - 1/2^{d-2})$ , and the lower bound is attained iff the spectral distribution function  $F(\nu)$  jumps at

$\nu$ -values such that  $\Gamma(\frac{d}{2}) \frac{J_{\frac{d-1}{2}}(\nu)}{(\frac{\nu}{2})^{\frac{d-1}{2}}} = C$ ,  $0 < C \leq 1$ .

## §2. Spherical space

In this case, our coefficients  $c^{(i)}(z; \theta)$  have a Fourier expansion

(4) and corresponding to (6) we have

$$R(\rho(z_i, z_j)) = \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \frac{J_l(\rho)}{l!} \frac{J_l(\rho)}{l!},$$

where  $a_l^{(d)} = \sum_{\nu=l}^{\infty} w(\nu) \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \frac{2^{2l+d-2} (\nu-l)! \Gamma(\frac{d-1}{2} + l)}{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2} + l)}$

$$C_{\nu-l}^{(d-1)/2 + l}(\cos \theta_i) \sin^l(\theta_i) C_{\nu-l}^{(d-1)/2 + l}(\cos \theta_j) \sin^l(\theta_j) \quad (11)$$

and corresponding to (7) we have

$$R(\rho(z, z_j)) = \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} \sum_{i=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z; L) \frac{J_l(\rho)}{l!} \frac{J_l(\rho)}{l!} \quad (12)$$

Also corresponding to (8),

$$\|\hat{X}_n(z)\|^2 = \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_l^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z; L) \hat{c}^{(j)}(z; L) \frac{J_l(\rho)}{l!} \frac{J_l(\rho)}{l!}$$

and we have

$$\delta_1^2(z) = R(0) - \frac{2^{d-2}}{\pi} \Gamma(\frac{d}{2}) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l^{d-2} \frac{|a_l^{(d)}(\theta_0, \theta_0)|^2}{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(\frac{d-1}{2} + l)} \frac{J_l(\rho)}{l!} \frac{J_l(\rho)}{l!} \quad (13)$$

Thus we get a proposition

Proposition 2: In the spherical case, using an extrapolator of the form (3), when we have observations on one sphere with center at origin (north pole), the extrapolation error is given by the formula (13), and in particular, for  $d = 2$ , it depends only on distance from origin.

For the case of  $d = 2$ , the formula (13) becomes as

$$\delta_1^2(z) = R(0) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=\nu}^{\infty} w(\nu) (-1)^l \frac{(\nu-l)!}{(\nu+l)!} \frac{|a_l^{(2)}(\theta_0, \theta_0)|^2}{a_l^{(2)}(\theta_0, \theta_0)} \frac{J_l(\rho)}{l!} \frac{J_l(\rho)}{l!}$$

We note that this proposition parallels proposition 1 in the Euclidean

case. But as seen in the following, a lower bound of error of extrapolation of origin with  $n = 1$ , differs.

Let an extrapolated point be the origin; then we have results

$$\|\hat{x}_n(z)\|^2 = \frac{2^{d-2}}{\pi} \sum_{i,j=1}^n a_0^{(d)}(\theta_i, \theta_j) \hat{c}^{(i)}(z;0) \overline{\hat{c}^{(j)}(z;0)},$$

and

$$\delta_1^2(z) = R(0) - \frac{[P(d-1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P(\nu+1)}{P(\nu+d-1)} C_{\nu}^{\frac{d-1}{2}}(\cos \theta_1) w(\nu)]^2}{\sum_{\nu=0}^{\infty} [P(d-1) \frac{P(\nu+1)}{P(\nu+d-1)} C_{\nu}^{\frac{d-1}{2}}(\cos \theta_1)]^2 w(\nu)}.$$

Thus in the spherical case, error function  $\delta_1^2(z)$ ,  $z$  is the origin, has lower bound 0 and this lower bound is attained iff spectrum distributes on  $\nu$ -values such that  $\frac{P(d-1)P(\nu+1)}{P(\nu+d-1)} C_{\nu}^{\frac{d-1}{2}}(\cos \theta_1) = C$ ,  $0 < C \leq 1$ .

### References

- (1) U.D. Popov (1968), "On Some Problems of The Linear Extrapolation For Homogeneous And Isotropic Random Fields Which Are Observed On The Circles," Mat.Zam., 4, pp.589-598 (in Russian).
- (2) E. Wong (1969), "Homogeneous Gauss-Markov Random Fields," Ann.Math.Stat., 40, pp.1625-1634.
- (3) N.J. Vilenkin (1968), Special Functions and the Theory of Group Representations, Translations of Mathematical Monographs, vol.22, AMS.

This list is not complete one; more complete list is contained in I.Kubo or in S.Panchev. Wong's paper and Popov's paper is not contained, and also Yadrenko's several previous papers are not contained.

1956:

K.Ito: Isotropic Random Currents, 3-rd Berkeley Symp.,

Vol.2, pp.125-132.

P.Levy: A Special Problem of Brownian Motion, and a General

Theory of Gaussian Random Function, 3-rd Berkeley

Symp., Vol.2, pp.133-175.

1957:

A.M.Yaglom: Some Classes of Random Fields in n-dimensional

Space Related to Stationary Random Process,

Theory of Prob. and Appl., 2, pp.273-320.

N.N.Chentsov: Levy Brownian Motion for Several Parameters

and Generalized White Noise, Theory of Prob.

and Appl., 2, pp.265-266.

1961:

A.M.Yaglom: Second-order Homogeneous Random Fields, 4-th

Berkeley Symp., Vol.2, pp.593-620.

1962:

Urbanik: Generalized Stationary Processes of Markovian  
Character, Stud.Math, 21.

M.I.Fortus: Formulas for Extrapolation of Random Fields,  
Theory of Prob. and Appl.,7.pp.101-108.

1963:

McKean: Brownian Motion with a Several Dimensional Time,  
Theory of Prob. and Appl.,8.pp.335

1965:

A.M.Yaglom: Outline of Some Topics in Linear Extrapolation  
of Stationary Random Processes, 5-th Berkeley  
Symp.. Vol.2,Part1,pp.259-278.

A.S.Monin and A.M.Yaglom: Statistical Hydrodynamics,Part 1,  
NAUKA, Moscow(English trans.  
from MIT Press)

1967:

I.Kubo: Kakurituba no Wadai, Seminar on Prob. Vol.26  
(in Japanese)

A.S.Monin and A.M.Yaglom: Statistical Hydrodynamics,Part 2  
, NAUKA, Moscow.

1968:

M.M.Rao: Local Functionals and Generalized Random Fields,  
Bull.Amer.Math.Soc.,74,pp.288-293.

1969:

M.M.Rao: Representation Theory of Multidimensional Generalized Random Fields, Proc. 2nd International Symp. Multivariate Analysis, pp.411-436.

1971:

G.M.Molchan: Characterization of Gaussian Fields with Markov Property, D.A.N., 197.

O.I.Orebkova: Some Problems of Extrapolation of Random Fields, D.A.N., 196.

M.I.Yadrenko: Isotropic Random Field with Markov Property, Theory of Prob. and Math.Stat., 5, pp.128-137.

M.M.Rao: Local Functionals and Generalized Random Fields with Independent Values, Theory of Prob. and Appl., 16, pp.466-483.

S.Panchev: Random Functions and Turbulence, Pergamon.

Preprint:

L.D.Pitt: A Markov Property for Gaussian Processes with Multidimensional Parameter. Arch. Rat. Mech. Analysis, 17 (1971), 367-391.