

Jordan 写像の線形性について

山形大学 (工) 羽毛田 穰祐 (Jôusuke Hakeda)

昨年、野田の“作用素論と作用素環論研究集会”で次の定理を報告した。

定理 A M を可変な直和因子を持たない AW^* 代数、 N を C^* 代数、 ϕ を M から N への $*$ 半群同形写像とする。

$$\left[\begin{array}{l} \text{即ち } \phi \text{ は次の (i) } \sim \text{ (iii) を満足する。} \\ \text{(i) } \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad x, y \in M \\ \text{(ii) } \phi(x^*) = \phi(x)^* \quad x \in M \\ \text{(iii) } \phi \text{ は全単射である。} \end{array} \right]$$

このとき ϕ は加法的である。更に M の中心射影元 e が一意に存在して、 ϕ は Me 上では線形写像、 $M(1-e)$ 上では共役線形写像になっている。

この「定理 A」に関して、斎藤 (和) は JBW 代数で定理 A と同様の結果が成立するであろうと予想した。 昨年の野田の研究集会の報告には次の定理も含まれていた。

定理 B M を I_1 型, I_2 型, I_3 型の直和因子を持たない JBW 代数 (積は $\circ$ で表わす)。 N を JBW 代数 (N の積も $\circ$ で表わす)。 ϕ を M から N への Jordan 写像とする。

$$\left[\begin{array}{l} \text{即ち } \phi \text{ は次の (i), (ii) を満足する。} \\ \text{(i) } \phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y) \quad x, y \in M \\ \text{(ii) } \phi \text{ は全単射である。} \end{array} \right]$$

このとき ϕ は線形写像である。

この「定理B」は “ 斎藤の予想 ” に対する部分的解答にもなっている。一般に J B W 代数は I_n 型 , I_∞ 型 , II 型 , III 型 の J B W 代数の直和に分解され、 I_2 型 , I_3 型 を除いた各型の J B W 代数は von Neumann 代数に良く似た面があり、 I_2 型 , I_3 型は von Neumann 代数とまったく状況が異なっていることが知られている。(例えば spin factor とか Cayley 代数 $\mathbb{O}$ 上の 3×3 エルミート行列に $x \circ y = (1/2)(x y + y x)$ で積 $\circ$ を定義した Jordan 代数 $H_3(\mathbb{O})$ 等)。

Jordan 代数の積は非結合的であるが、特に $H_3(\mathbb{O})$ 等では Cayley 代数の積が非結合的であることが、直接計算を著しく困難にしている。例外 Jordan 代数(特に $H_3(\mathbb{O})$)に於ける“定理B”に相当する結果も、昨年末に一応得られたが、証明法は具体的な $H_3(\mathbb{O})$ の中での計算に依っており、「定理B」の証明とは異なったものである。

この報告ではこれらの場合を I_2 型 の場合も含む統一的な方法によって“斎藤の予想”に対する最終的な結果を与える。

定義 実 Jordan 代数 M (積は $\circ$ で表わす) からある実代数 N (積は M と同じ記号 $\circ$ で表わす) への写像 ϕ が M 上の Jordan 写像であるとは ϕ が M から N への全射かつ積同形写像をいう。

即ち ϕ は次の条件 (i), (ii) を満足する。

- $$\left[\begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y) \quad x, y \in M \\ \text{(ii)} & \phi \text{ は全単射である。} \end{array} \right]$$

以後 M は unital な実 Jordan 代数, ϕ は M からある実代数 N への Jordan 写像を表わすものとし、定理等の記述を除いて、特に付加する条件のみを記述することにする。

主定理 M を I_1 型 直和因子を持たない J B W 代数, N を実 Jordan Banach 代数, ϕ を M から N への Jordan 写像とする。このとき ϕ は線形写像である。この定理は I_1 型 直和因子を持たない J B W 代数 M の“代数的構造”が M の“積構造”によって完全に定まってしまうことを示している。

1. Jordan 代数の古典論からの準備

特別 Jordan 代数の議論を一般の Jordan 代数に拡張するために、次の “Macdonald の定理” と “Shirshof-Cohn の定理” は強力である。

Macdonald の定理

変数 c について 1 次の 3 変数 a, b, c の Jordan 多項等式 $p(a, b, z) = 0$ が全ての特別 Jordan 代数で成立するならば、 $p(a, b, c) = 0$ は任意の Jordan 代数で成立する。

Shirshof-Cohn の定理

$M[a, b, 1]$ を $a, b, 1$ で生成された Jordan 部分代数とする。このとき $M[a, b, 1]$ は特別 Jordan 代数である。

$\{abc\} = (a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a - (c \circ a) \circ b$ を Jordan 三重積とよぶ。 $Ta b = a \circ b$, $U_{a,c} b = \{abc\}$, $U_a = U_{a,a}$ で Jordan 代数上の線形作用素 $Ta, U_{a,c}, U_a$ を定義する。作用素間の交換子積を $[Ta, Tb]$ 等と表わす (i.e. $[Ta, Tb] = Ta Tb - Tb Ta$)。

補題 1.1 $4\{abc\}^2 = 4\{a\{b(a \circ c)b\}a\} - 2\{aba\} \circ \{cbc\} + \{a\{bc^2 b\}a\} + \{c\{ba^2 b\}c\}$ が成立する。

定義 1.2 a と b ($a, b \in M$) が作用素可換 (operator commute) であるとは、 $[Ta, Tb] = 0$ が成立することとする (i.e. 任意の $x \in M$ に対して $a \circ (b \circ x) = b \circ (a \circ x)$)。

任意の Jordan 代数で任意の a に対して $[Ta, Ta^2] = 0$ が成立することより、次の補題が導かれる。

補題 1.3 $[Ta, Tb \circ c] + [Tb, Tc \circ a] + [Tc, Ta \circ b] = 0$ が成立する。

また直交する巾等元に関する計算に次の補題は有力である。

補題 1.4 $E_n = \{e_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ を和が単位元 1 になる直交する巾等元の集合とする (i.e. $e_i^2 = e_i$, $e_i \circ e_j = 0$, $\sum e_i = 1$)。このとき $e, f, g \in E_n$ に対して

$$T e U f, g = \begin{cases} U e & (e = f = g) \\ 1/2 U f, g & (e \in \{f, g\}) \\ 0 & (e \in \{f, g\}, n \geq 3 \text{ の場合}) \end{cases}$$

が成立する。

補題 1.5 直交する M の巾等元 e と f に対して、 $(U e x) \circ (U f y) = 0$ が成立する。

2. Jordan 写像の基本的性質

補題 2.1 $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$

証明 ϕ が全射であることより $a \in M$ が存在して $\phi(a) = 0$
 従って $\phi(0) = \phi(0 \circ a) = \phi(0) \circ 0 = 0$
 また任意の $x \in M$ に対して $\phi(x) = \phi(1 \circ x) = \phi(1) \circ \phi(x)$
 より ϕ が全射であるから $\phi(1)$ は N の単位元である。

補題 2.2 e と f が M の直交する巾等元ならば

$\phi(e + f) = \phi(e) + \phi(f)$ が成立する。

証明 $\phi(e), \phi(f), \phi(e) + \phi(f)$ は N の巾等元であり、 $\phi(e)$ と $\phi(f)$ は直交する。従って $h = \phi(\phi(e) + \phi(f))$ とおくと、 h は M の巾等元である。

$\phi(e \circ h) = \phi(e) \circ \phi(h) = \phi(e) \circ (\phi(e) + \phi(f)) = \phi(e)$
 従って ϕ が単射であることより $e \circ h = e$ 、同様に $f \circ h = f$
 故に $(e + f) \circ h = e + f$ が成立するから
 $\phi(e + f) = \phi((e + f) \circ h) = \phi(e + f) \circ \phi(h)$
 $= \phi(e + f) \circ \phi(e) + \phi(e + f) \circ \phi(f) = \phi(e) + \phi(f)。$

補題 2.3 e と f を M の巾等元 (直交していなくとも良い) とする。

このとき $\phi(e - f) = \phi(e) - \phi(f)$ が成立する。

証明 $g = 1 - e, x = e - f$ とおくと、
 $\phi(x) = ((\phi(e) + \phi(f)) \circ \phi(x)) \circ (\phi(e) + \phi(f))$
 $= \phi((e \circ x) \circ e) + \phi((e \circ x) \circ f) + \phi((f \circ x) \circ e)$
 $+ \phi((f \circ x) \circ f)$

$$(e \circ x) \circ e = (e \circ (1-f)) \circ e \quad \text{と} \quad \phi(1-e) = 1 - \phi(e) \quad (\text{補題 2.1 及び 2.2 より})$$

$$\begin{aligned} \phi((e \circ x) \circ e) &= (\phi(e) \circ \phi(1-f)) \circ \phi(e) \\ &= (\phi(e) \circ (1 - \phi(f))) \circ \phi(e) \\ &= (\phi(e) \circ \phi(e)) \circ \phi(e) \\ &\quad - (\phi(e) \circ \phi(f)) \circ \phi(e) \\ &= (\phi(e) \circ (\phi(e) - \phi(f))) \circ \phi(e) \\ \phi((e \circ x) \circ f) &= 0 = (\phi(e) \circ (\phi(e) - \phi(f))) \circ \phi(f) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \phi((f \circ x) \circ e) &= (\phi(f) \circ (\phi(e) - \phi(f))) \circ \phi(e) \\ \phi((f \circ x) \circ f) &= \phi(-f) = -\phi(f) \\ &= (\phi(f) \circ (\phi(e) - \phi(f))) \circ \phi(f) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \phi(x) &= ((\phi(e) + \phi(f)) \circ (\phi(e) - \phi(f))) \circ (\phi(e) + \phi(f)) \\ &= \phi(e) - \phi(f) \end{aligned}$$

補題 2.4 e と f を M の nontrivial な直交する巾等元とするととき、任意の $x, y \in M$ に対して $\phi(\{exe\} + \{fyf\}) = \phi(\{exe\}) + \phi(\{fyf\})$ が成立する。

証明 $Te Ue = Ue$, $Te Uf = 0$ が成立しているから、
 $(e+f) \circ (\{exe\} + \{fyf\}) = \{exe\} + \{fyf\}$

従って

$$\begin{aligned} \phi(\{exe\} + \{fyf\}) &= \phi(e+f) \circ \phi(\{exe\} + \{fyf\}) \\ \text{一方 補題 2.2より } \phi(e+f) &= \phi(e) + \phi(f) \quad \text{だから} \\ \phi(\{exe\} + \{fyf\}) &= (\phi(e) + \phi(f)) \circ \phi(\{exe\} + \{fyf\}) \\ &= \phi(e) \circ \phi(\{exe\}) + \phi(e) \circ \phi(\{fyf\}) \\ &\quad + \phi(f) \circ \phi(\{exe\}) + \phi(f) \circ \phi(\{fyf\}) \\ &= \phi(\{exe\}) + \phi(\{fyf\}) \end{aligned}$$

補題 2.5 e と f を M の nontrivial な直交する巾等元とするととき任意の $\alpha, \beta \in C$ に対して $\phi(\alpha e + \beta f) = \phi(\alpha e) + \phi(\beta f)$ が成立する。

証明 補題 2.4 に於いて $x = \alpha \cdot 1$, $y = \beta \cdot 1$ と置くと補題を得る。

定義 2.6 直交する巾等元 E と F に対して $s^2 = e + f$
 かつ $\{ses\} = f$ となる部分対称元 s が存在するとき e と f は強連結と呼ぶ。

補題 2.7 e を M の nontrivial な巾等元とする。もし e と直交する M の巾等元 f が存在して e と f が強連結ならば任意の M の元 x, y に対して、
 $\phi(\{exe\} + \{eye\}) = \phi(\{exe\}) + \phi(\{eye\})$ が成立する。

証明 直交する巾等元 e と f が強連結だから、ある部分対称元 s が存在して $s^2 = e + f$ かつ $\{ses\} = f$ が成立する。
 $r = 2\{esf\}$, $p = 1/2(e + f + r)$, $q = 1/2(e + f - r)$ とおくと
 補題 1.1 により $r^2 = \{e\{sfs\}e + \{f\{ses\}f\}$
 Shirshov-Cohn の定理より

$$\begin{aligned}\{sfs\} &= \{s\{ses\}s\} = \{s^2 e s^2\} \\ &= \{(e+f)e(e+f)\} = e\end{aligned}$$

従って $r^2 = e + f$

更に $\{rer\} = 2(e \circ r) \circ r - r^2 \circ e$, 補題 1.4 により

$$\begin{aligned}e \circ r &= 1/2 r (f \circ r = 1/2 r) \quad \text{従って} \quad \{rer\} = r^2 - r^2 \circ e \\ &= r^2 \circ (1 - e) = (e + f) \circ (1 - e) = f\end{aligned}$$

かつ $\{ere\} = 2(e \circ r) \circ e - r \circ e = 0$

また p, q は直交する巾等元で $\{epe\} = 1/2 e + 1/2 \{ere\} = 1/2 e$
 同様にして $\{eqe\} = 1/2 e$

$x_1 = 4\{exe\}$, $y_1 = 4\{eye\}$ とおくと Macdonald の定理により
 $\{exe\} = \{\{epe\}(4x)\{epe\}\} = \{e\{px_1 p\}e\}$ と
 $\{eye\} = \{e\{qy_1 q\}e\}$ が得られる。

従って $\{exe\} + \{eye\}$

$$= \{e(\{px_1 p\} + \{qy_1 q\})e\}$$

$$= ((2e - 1) \circ (\{px_1 p\} + \{qy_1 q\})) \circ e \quad \text{と}$$

$$\phi(\{px_1 p\} + \{qy_1 q\})$$

$$= \phi(\{px_1 p\}) + \phi(\{qy_1 q\}) \quad (\text{補題 2.4 より})$$

$$\phi(\{exe\} + \{eye\}) = (\phi(2e - 1) \circ (\phi(\{px_1 p\})$$

$$+ \phi(\{qy_1 q\}))) \circ \phi(e)$$

$$= \phi(\{exe\}) + \phi(\{eye\}) \text{ を得る。}$$

定義 2.8 次の (i)~(iii) を満足する M の n 個の巾等作用素の集合 E_n を M の対角単位と呼ぶ。

- (i) E_n の全ての元の和が M の単位元 1 に等しい。
- (ii) E_n の任意の2元は直交している。
- (iii) E_n の任意の2元は強連結である。

補題 2.9 M が対角単位 E_n ($n \geq 2$) を持てば ϕ は $R \cdot 1$ 上で加法的である。
従って $R \cdot x$ 上加法的である。

証明 補題 2.7 に於いて $e = e_i$, $f = e_j$ ($i \neq j$), $x = \alpha \cdot 1$, $y = \beta \cdot 1$ ($\alpha, \beta \in C$) とおけば、

$$\phi(\alpha e_i + \beta e_i) = \phi(\alpha e_i) + \phi(\beta e_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

故に

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1) &= \phi(\sum (\alpha + \beta) e_i) \\ &= \sum \phi((\alpha + \beta) e_i) \quad (\text{補題 2.5}) \\ &= \sum (\phi(\alpha e_i) + \phi(\beta e_i)) \\ &= \sum \phi(\alpha e_i) + \sum \phi(\beta e_i) \\ &= \phi(\sum \alpha e_i) + \phi(\sum \beta e_i) \quad (\text{補題 2.5}) \\ &= \phi(\alpha \cdot 1) + \phi(\beta \cdot 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{従って } \phi(\alpha x + \beta x) &= \phi((\alpha + \beta) \cdot 1) \circ \phi(x) \\ &= (\phi(\alpha \cdot 1) + \phi(\beta \cdot 1)) \circ \phi(x) \\ &= \phi(\alpha x) + \phi(\beta x) \quad \text{を得る。} \end{aligned}$$

補題 2.10 M に対角単位 E_n ($n \geq 2$) が存在するとき
 M の対称元 s, t に対して (i.e. $s^2 = 1, t^2 = 1$)
 $\phi(s + t) = \phi(s) + \phi(t)$ が成立する。

証明 $e = 1/2(1 + s)$, $f = 1/2(1 - t)$ とおくと、
 e と f は 巾等元となる。

$$s = 2e - 1, t = 1 - 2f \quad \text{だから} \quad s + t = 2(e - f)$$

従って 補題 2.3 と 補題 2.5 と 補題 2.9 により

$$\begin{aligned} \phi(s + t) &= \phi(2(e - f)) = 2\phi(e - f) \\ &= 2(\phi(e) - \phi(f)) \\ &= \phi(e) - (1 - \phi(e)) + (1 - \phi(f)) - \phi(f) \\ &= \phi(e) + \phi(-(1 - e)) + \phi(1 - f) + \phi(-f) \\ &= \phi(e - (1 - e)) + \phi(1 - f) - \phi(f) \\ &= \phi(s) + \phi(t) \end{aligned}$$

補題 2.11 M が対角単位 E_n ($n \geq 2$) を持てば

$\phi(x) = \sum_i \phi(\{e_i x e_i\}) + 2 \sum_{i \neq j} \phi(\{e_i x e_j\})$ が成立する。

証明 $\sum_i \phi(e_i) = 1$ より

$$\phi(x) = ((2 \sum_i \phi(e_i) - 1) \circ \phi(x)) \circ (\sum_i \phi(e_i))$$

$$= 2 \sum_i (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_i)$$

$$+ 2 \sum_{i \neq j} (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_j)$$

$$- \sum_i \phi(x) \phi(e_i)$$

$$= \sum_i ((2 \phi(e_i) - 1) \circ \phi(x)) \circ (e_i)$$

$$+ 2 \sum_{i \neq j} (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_j)$$

$$2 \phi(e_i) - 1 = \phi(e_i) - (1 - \phi(e_i))$$

$$= \phi(e_i) - \phi(1 - e_i) = \phi(-(1 - e_i))$$

$$= \phi(e_i - (1 - e_i)) = \phi(2e_i - 1)$$

従って $(\phi(2e_i - 1) \circ \phi(x) \circ \phi(e_i))$

$$= \phi((2e_i - 1) \circ x \circ e_i)$$

$$= \phi(\{e_i x e_i\})$$

直交する巾等元 e_i と e_j は

作用素可換から $(e_i \circ x) \circ e_j = (e_j \circ x) \circ e_i$

だから $i \neq j$ に対して

$$(\phi(e_i) \circ \phi(x) \circ \phi(e_j) + (\phi(e_j) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_i))$$

$$= \phi((e_i \circ x) \circ e_j) + \phi((e_j \circ x) \circ e_i)$$

$$= 2 \phi((e_i \circ x) \circ e_j)$$

$$= \phi(2(e_i \circ x) \circ e_j) \quad (\text{補題 2.9})$$

$$= \phi(\{e_i x e_j\})$$

この補題 2.11 は M が対角単位 E_n ($n \geq 2$) を持てば 写像 $\phi_i : x \mapsto$

$\phi(\{e_i x e_i\})$ と 写像 $\phi_{i,j} : x \mapsto \phi(\{e_i x e_j\})$

が加法的ならば ϕ は加法的であることを示している。既に ϕ_i の加法性は補題 2.7

で示されているので ϕ の加法性を示すためには $\phi_{i,j}$ の加法性を示せば良いことがわかる。

命題 2.12 M が対角単位 E_n ($n \geq 4$) を持つ実 Jordan 代数ならば M 上の Jordan 写像 ϕ は加法的である。

証明 互いに異なる添数 i, j, m, n に対して、部分対称元 $s_{i,j}$ と $s_{m,n}$ が存在して $s^2 = e_i + e_m$, $s^2 = e_j + e_n$, $\{s_{i,m} e_i s_{i,m}\} = e_m$, $\{s_{j,n} e_j s_{j,n}\} = e_n$ が成立する。
 $r = 2\{e_i s_{i,m} e_m\}$, $t = 2\{e_j s_{j,n} e_n\}$, $s = r + t$,
 $e = e_i + e_j$, $f = e_m + e_n$ とおくと補題 1.1 により
 $r^2 = e_i + e_m$, $t^2 = e_j + e_n$
 また補題 1.4 より $r \circ t = 0$ 従って $s^2 = e + f$ が成立し、
 $\{r e r\} = e_m$, $\{t e t\} = e_n$, $\{r e t\} = 0$ 従って $\{s e s\} = f$ が成立する。故に巾等元 e と f は部分対称元 s によって強連結である。
 従って 補題 2.7 により

$\phi(\{e x e\} + \{e y e\}) = \phi(\{e x e\}) + \phi(\{e y e\})$ が成立する。補題 1.4 により

$$\begin{aligned} & \{e\{e_i x e_j\}e\} \\ &= 2(e \circ \{e_i x e_j\}) \circ e - \{e_i x e_j\} \circ e \\ &= \{e_i x e_j\} \quad \text{となり} \\ & \phi(\{e_i x e_j\} + \{e_i y e_j\}) \\ &= \phi(\{e\{e_i x e_j\}e\} + \{e\{e_i y e_j\}e\}) \\ &= \phi(\{e_i x e_j\}) + \phi(\{e_i y e_j\}) \end{aligned}$$

だから 写像 $x \mapsto \phi(\{e_i x e_j\})$ は任意の異なる i, j について加法的である。補題 2.7 と併せると結論を得る。

3. Jordan Banach 代数上の Jordan 写像

この節では対称となる M は unital な実 Jordan Banach 代数とする。

補題 3.1 e と f を直交する M の巾等元とする。

このとき $\|x\| \leq 1$ となる $x \in M$ に対して、 $\{e x f\} = \{e s f\}$ となる対称元 s が存在する。

証明 $g = 1 - e$, $a = \{e \{x g x\} e\}$, $b = \{g \{x e x\} g\}$ とおく。
 $Me(a)$ (resp. $Mg(b)$) は e と a を (resp. g と b を) 含む
 UeM (resp. UgM) の最小の閉部分代数とする。

$\{p_n(\lambda)\}$ を $[-1, 1]$ 上 $\sqrt{1-\lambda}$ へ一様収束する多項式とする。

$\|x\| \leq 1$ より $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$ であり

$e \circ \{exy\} = g \circ \{exg\} = 1/2 \{exg\}$ (補題 1.4) と

$a^k \circ \{exg\} = b^k \circ \{exg\}$ ($k = 1, 2, \dots$) が成立するから

$\{p_n(a)\}$ (resp. $\{p_n(b)\}$) は $\sqrt{e-a}$ (resp. $\sqrt{g-b}$) に
 一様収束する。従って $\sqrt{e-a} \circ \{exg\} = \sqrt{g-b} \circ \{exg\}$ が成立する。

$s = \sqrt{e-a} - \sqrt{g-b} + 2 \{exg\}$ とおくと

$\sqrt{e-a} \circ \sqrt{g-b} = 0$ (補題 1.5)

補題 1.1 と上のことより s は M の 対称元となる。更に e と f は作用素可換であり、補題 1.4 より

$$\begin{aligned} \{esf\} &= 2(e \circ s) \circ f \\ &= (e - a + 2\{exg\}) \circ f \\ &= 2\{exf\} \circ f \\ &= \{exf\} \end{aligned}$$

命題 3.2 M が対角単位 E_n ($n \geq 2$) を持つ実 Jordan Banach 代数, N が実 Jordan normed 代数ならば M から N への Jordan 写像 ϕ は線形である。

証明 $\delta = \|x\| + \|y\|$, $x_1 = \delta^{-1} x$, $y_1 = \delta^{-1} y$ とおくと、ある固定された i, j ($i \neq j$) について、 $\{e_i x e_j\} = \{e_i s e_j\}$,
 $\{e_i y_1 e_j\} = \{e_i t e_j\}$ となる対称元 s, t が存在する。

従って

$$\begin{aligned} \phi(\{e_i (x+y) e_j\}) &= \phi(\delta \cdot 1) \circ \phi(\{e_i x_1 e_j\} + \{e_i y_1 e_j\}) \\ &= \phi(\delta \cdot 1) \circ \phi(\{e_i s e_j\} + \{e_i t e_j\}) \quad (\text{補題 3.1}) \\ &= \phi(\delta \cdot 1) \circ \phi(\{e_i (s+t) e_j\}) \\ &= \phi(\delta \cdot 1) \circ \phi(2(e_i \circ (s+t) \circ e_j)) \\ &= 2\phi(\delta \cdot 1) \circ ((\phi(e_i) \circ \phi(s+t)) \circ \phi(e_j)) \\ &= 2\phi(\delta \cdot 1) \circ ((\phi(e_i) \circ (\phi(s) + \phi(t))) \circ \phi(e_j)) \quad (\text{補題 2.10}) \\ &= \phi(\delta \cdot 1) \circ \phi(\{e_i s e_j\}) + \phi(\{e_i t e_j\}) \\ &= \phi(\{e_i x e_j\}) + \phi(\{e_i y e_j\}) \end{aligned}$$

故に 写像 $x \mapsto \phi(\{e_i x e_j\})$ は加法的であり、補題 2.7 と併せ

ると 補題 2.11 により ϕ は M 上加法的である。

写像 ϕ が加法的だから任意の整数 n と任意の自然数 m に対して

$n\phi(x) = \phi(m(n/m)x) = m\phi(n/mx)$ 従って任意の有理数 p に対して $\phi(px) = p\phi(x)$ 全ての $x \in M$ に対して成立する。

$[\lambda]$ が λ を越えない最大の整数を表わすものとする (Gauss の記号)。この時任意の正の数 λ に対して ϕ が正值写像だから

$$0 \leq \phi(\lambda \cdot 1) \leq \phi((1/[1/\lambda]) \cdot 1) = (1/[1/\lambda]) \cdot 1$$

従って $\lambda \mapsto \phi(\lambda \cdot 1)$ は $0 \in \mathbb{R}$ で連続である ($\phi(-1) = -1$)。

故に $\mathbb{R}$ 上で連続であり、任意の実数 r に対して $\phi(rx) = r\phi(x)$

($x \in M$) が成立する。

主定理の証明 M は次の形に直和分解される。

即ち $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus \dots$

ここで M_1 は I_∞ 型 JBW 代数、 M_2 は II 型 JBW 代数、 M_3 は III 型 JBW 代数、 M_i ($i \geq 4$) は I_{n_i} 型 ($n_i \geq 2$) JBW 代数である。各 M_i は各々対角単位 E_{n_i} ($n_1 = n_2 = n_3 = 4$, $n_i \geq 2$ ($i \geq 4$)) を持つ実 Jordan Banach 代数であるから、 $p_i = 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 1 \oplus 0 \oplus \dots$ とおくと、 $M \circ p_i$ は M_i と同型な実 Jordan Banach 代数だから $M \circ p_i$ と M_i を同一視することにする (i.e. $M \circ p_i = M_i$)。 $\phi(M \circ p_i) = N_i$ とすると、 N_i は N の Jordan 部分代数で $\phi_i = \phi|_{(M_i \circ p_i)}$ は $M_i \circ p_i$ から N_i への Jordan 写像である。

従って 命題 3.2 により線形写像である。 N と $\bigoplus N_i$ は

写像 $\eta: \phi(x) \mapsto \bigoplus \phi(x) \circ \phi(p_i)$ によって代数的に Jordan 同形であり、 M と $\bigoplus (M \circ p_i)$ も 写像 $\theta: x \mapsto \bigoplus \phi(M \circ p_i)$ によって代数的に Jordan 同形である。更に次の diagram は可換となっているから ϕ は線形写像である。

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & N \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \eta \\
 \bigoplus M_i & \xrightarrow{\bigoplus \phi_i} & \bigoplus N_i
 \end{array}$$

参 考 文 献

- 【1】 N.Jacobson, Structure and Representatins of Jordan dgdras,
Amer.Math.Soc.Colloq.Publ. 39, 1968.
- 【2】 羽毛田 穰祐: 作用素代数上の乗法的写像の加法性について, 作用素・
作用素環論研究集会記録, 1984.
- 【3】 H.H.Olson and E.Stormer,
Jordan Operator Algebras, Pitman, 1984.