

# 包括原理のある集合論と超準的自然数

矢田部俊介 (Shunsuke Yatabe)

神戸大学工学部

## 1 Introduction

この小論では、Łukasiewicz 無限値述語論理  $LQ$  で包括原理を公理として持つ集合論  $H$  において、「自然数の集合  $\omega$  は必ず超準的な元を含む」という定理 [Yat05] を紹介する。またこの定理の証明を紹介するとともに、あわせて包括原理をもつ集合論における算術の展開可能性について考察を行う。

この定理の証明方法は Moh Shaw-Kwei の Paradox [Msk54] および Hajek-Paris-Shephardson の定理 [HPS00] の証明の応用である。また今回の結果は、 $\omega$  が本来想定していなかった元を含んでしまうという点で、包括原理の下での集合概念が予想以上に複雑な面を持ち、また包括原理のみによって古典的数学のかなりの部分が展開可能ではないかという Skolem の予想に対し否定的な結論を与えるものである。

また我々の結果と [HPS00] の結果 ( $LQ$  上で真理述語を持つ算術を考えるとその算術のモデルは必ず超準的な自然数を含む) との類似は、包括原理の下での集合概念が真理述語の下での真理概念と大きな共通点を持つものであるという指摘 [GB93][Vis84] に新たな実例を付け加えるものである。

## 2 包括原理について

### 2.1 包括原理と古典論理上の Paradox

The comprehension principle (包括原理) は、任意の formula  $\varphi$  に対して、 $\{x : \varphi(x)\}$  の形の集合の存在を保証する。包括原理は Frege や Cantor によって導入された、非常に強力な集合の存在保証原理であり、Frege は一時期古典論理と包括原理によってすべての古典的数学を基礎付けできると主張したことでも知られている。しかし包括原理は古典論理の上では矛盾を導く。

その最も有名な例である Russell Paradox の導出を簡略化して示すと以下の通りである。古典論理の下で包括原理を仮定する。このとき以下の集合  $R$  「自分自身を元として含まない集合の集合」を定義しよう。

$$R = \{x : x \notin x\}$$

このとき、まず  $R \in R$  を仮定してみると

$$\frac{\frac{R \in R \text{ (仮定)}}{R \notin R} \quad (R \text{ に代入}) \quad R \in R \text{ (仮定)}}{\perp}$$

と矛盾が導かれる。 $R \notin R$ を仮定しても同様の矛盾が導かれる。

Russell paradoxを解決するため、いくつかの解決策が提案された。一番広く知られている解決法は、古典論理は保持するが、包括原理を制限するというものである。その典型的な例が公理的集合論 ZFC であろう。この ZFC が根ざしていると言われる集合概念は、iterative conception of set (反復的な集合観)と呼ばれている [Boolos 1971]。これは、簡単に言えば、「 $x$  というものの集まりは、 $x$  のすべてのメンバー  $y \in x$  が**すでに集合である**とき、 $x$  自身も集合であり得る。」ということができるだろう。つまりこのとき、「自分自身をメンバーとして持つ集まりは集合ではない」ということになる。したがって「すべての集合からなる集まりは集合ではない」、従って「Russell paradox を起こす集まりも集合ではない」などの結果を導く。

## 2.2 Contraction rule の制限による Paradox の解決

矛盾を回避するための別のやり方も存在する。ここでは、包括原理を保持するかわりに、古典論理を制限して矛盾が導出できないくらい弱める、というやり方を紹介しよう。

先ほどの証明図をもう一回見てみると、仮定  $R \in R$  を 2箇所で使用していることに気づく。このように、古典論理では「同じ仮定を何回でも使用してよい」ということが許されている。

Contraction rule: 「同じ仮定は何度用いてもよい」

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash C}{A, \Gamma \vdash C}$$

すなわち、「 $A$  を 2 回使って証明できる式  $C$  は、 $A$  を 1 回だけ使って証明できると見なしてよい」ということである。

Grisin は、この Contraction rule が Russell Paradox の導出に本質的な役割を果たしていることを示した。つまり、古典論理から contraction rule のみを除去した体系を **Grisin logic (GL)** と呼ぶとき、GL では包括原理を仮定しても Russell paradox は起こらず、矛盾が起きないことを示した [Gri82]。

**Theorem 2.2.1 (Grisin)** GL 上で包括原理を仮定しても矛盾を起こさない。

包括原理のある集合論が無矛盾である以上、この体系の中で古典数学がどこまで展開可能であるかを考察することは、Frege の戦略 (包括原理によって数学の基礎を築く) がどこまで有効か見極めたいという点からも、興味ある問題であるだろう。

また包括原理に基づく集合概念は、よく研究されている反復的な集合観でのそれとは大きく異なっている。両者の違いを際立たせるであろうテーマの一つが、古典数学の展開可能性についてである。古典論理上の反復的な集合論で古典的な数学が展開可能であることはよく知られているが、同じことが証明力が弱い論理上の集合論でできる保証はない。包括原理だけを仮定して数学がどこまで展開可能かを探求すること、特に無限集合を扱う上でどのような違いがあるのかを調べることは興味深い問題であるだろう。

それでは包括原理によって定義される集合は、どのような性質を持つのだろうか。包括原理は、命題とその外延としての集合が対応することを主張しているようにも見える。この意味で「命題と集合を同一視する」[Oka03] ことができると思われる。ただし外延と命題の両者が完全に同一視できるわけではない。GL 上では包括原理だけでは矛盾を導かないが、

**Theorem 2.2.2 (Grisin)** 包括原理の他に外延性公理を仮定すると *Russell paradox* を引き起こしてしまう。

つまり同値な命題が集合としては別なものを定めることがあり得るわけである。ちなみに外延性公理について説明する。以下の二つの equality relation を定義したとする。

**Leibniz equality**  $x = y$  iff  $(\forall z)[z \in x \leftrightarrow z \in y]$ ,

**Extensional equality**  $X =_{\text{ext}} Y$  iff  $(\forall x)[x \in X \leftrightarrow x \in Y]$ .

$x = y \rightarrow x =_{\text{ext}} y$  は当たり前である。このとき外延性公理は、任意の集合  $x, y$  にたいし、逆向き ( $x =_{\text{ext}} y \rightarrow x = y$ ) を保証する。もちろん iterative conception of set は extensionality と無矛盾であるので、この性質は GL 上の集合概念を特徴づける要素の一つとなっている。

### 2.3 Recursion theorem と算術の展開

それでは包括原理を使うことで、数学をどの程度展開することが可能となるのだろうか。GL+包括原理の上では以下が可能である（以下、この節では GL+包括原理を仮定する）。まず包括原理により、自然数などを定義することができる<sup>1</sup>。

- $0 = \emptyset = \{x : x \neq x\}$ ,
- $1 = \{\emptyset\}$ ,
- $2 = \{\{\emptyset\}\}$ , etc.

それだけでなく、以下に述べる Recursion theorem により、自然数全体の集合  $\omega$  や、関数の再帰的定義などが可能である。

**Theorem 2.3.1 (Recursion theorem)** 任意の formula  $\varphi(x, \dots, y)$  にたいして以下が成立する。

$$(\exists z)(\forall x)[x \in z \leftrightarrow \varphi(x, \dots, z)]$$

証明は [Can03] による<sup>2</sup>。つまりこの定理により  $z$  自身がパラメーターとして現れるような formula で定義される集合を定義できる。特に特殊なターム  $\theta$  を定義できる。これは以下を満たす。

$$(\forall x)x \in \theta \leftrightarrow \varphi(x, \dots, \theta)$$

これにより各種の再帰的定義が可能になる。例を挙げれば、

**Definition 2.3.2** 自然数の集合  $\omega$  は、以下を満たす term として導入される。

$$(\forall x)x \in \omega \leftrightarrow [x = \emptyset \vee (\exists y)[y \in \omega \wedge x = \{y\}]]$$

関数の再帰的定義に関しては、以下が証明可能である<sup>3</sup>。

**Lemma 2.3.3 (照井)** 任意の r.e. predicate が weakly numeralwise representable である。

大まかにいって、任意の r.e. predicate  $\psi \subseteq \mathbb{N}$  に対してある formula  $\varphi(x)$  が存在し、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\psi(n) \iff \varphi(\bar{n}) \text{ is provable in GL set theory}$$

が成立する、ということである [Ter03]。この点で包括原理のある集合論は、算術に関してある程度の表現力を持つものと思われる。

## 2.4 多値論理の集合論

### 2.4.1 Łukasiewicz 無限値述語論理 LQ

GL と包括原理によってどこまで古典的な数学をその枠組みの上で展開できるかという問題に関して、この小論では GL の extension となる LQ の上で包括原理を持つ集合論 H 上でこの問題を考察する。この節では、まずその枠組みとなる論理 LQ を紹介する。

Łukasiewicz 無限値述語論理 LQ は、GL と古典論理の中間に位置する多値論理の一種である。syntactical には非常に複雑で、recursively axiomatizable ではないことが知られている [Sca62]。

predicate logic      Grisín logic  $\xrightarrow{\subseteq}$  LQ  $\xrightarrow{\subseteq}$  古典論理

Hilbert 流公理化      ○      ×      ○

図 1: 述語論理

LQ は結局 Hay によって無限個の推論規則を持つ形で定式化された [Hay63]。彼女の形式化はモデルに対し完全である。そのため今回は真理関数的なモデルを使用して、LQ を定義することにした。

**Definition 2.4.1**  $L_{\infty}$  を以下を持つ言語とする。

- 2-ary predicate  $\in$ ,
- logical constant  $\rightarrow, \neg, \forall$ .
- 任意の  $\varphi(x)$  にたいし、 $\{x : \varphi(x)\}$  を term として認める。
- $-$  Leibniz equality:  $x = y$  iff  $(\forall z)[x \in z \leftrightarrow y \in z]$
- $-$  constant symbol  $\emptyset$  を、term  $\{x : x \neq x\}$  の略記として導入する。

モデル  $M = \langle M, r_{\in}, (m_c)_{c \text{ constant}} \rangle$  を考える。ただし

- $M$  は集合で  $M \neq \emptyset$ , 任意の const.  $c$  にたいし  $m_c \in M$
- $r_{\in} : M^2 \rightarrow [0, 1]$ ,

**Definition 2.4.2** モデル  $M$  上で  $\|\varphi\|_M$  が  $\varphi$  の  $M$  における真理値であるとは、

- 任意の  $a, b$  に対して  $\|a \in b\|_M = r_{\in}(a, b)$
- $\|\neg\varphi\|_M = 1 - \|\varphi\|_M$ ,
- $\|\varphi_0 \rightarrow \varphi_1\|_M = \min(1, 1 - \|\varphi_0\|_M + \|\varphi_1\|_M)$ ,
- $\|(\forall x)\varphi(x)\|_M = \inf\{\|\varphi(a)\|_M : a \in M\}$

**Definition 2.4.3** LQ 上の任意の理論  $T$  に対し、

- $M$  が  $T$  のモデルであるとは、 $\|\varphi\|_M = 1$  for any  $\varphi \in T$  が成立するときのことをいう。
- $\varphi$  が  $T$  で証明可能であるとは、任意の  $T$  のモデル  $M$  で真理値が 1 となることをいう。

## 2.4.2 集合論 H

さて、 $LQ$  の下で、包括原理は矛盾を導かないことが知られている。

**Theorem 2.4.4 (White)**  $LQ$  では包括原理を仮定しても矛盾を起こさない。

White による証明は、証明論的技法により行われた (proof search tree の infinite branch をとることによって証明可能な closed formula の無限集合を構成する)。

**Definition 2.4.5**  $LQ$  上で公理として包括原理のみを持つ集合論を  $H$  と呼ぶことにする

$H$  は White によって、Hay の名前にちなんで命名された。

Lukasiewicz 無限値論理で包括原理を仮定しても矛盾を起こさないだろうと最初に提唱したのは Skolem だが<sup>4</sup>、彼はその集合論では

*it may be possible to derive a significant amount of mathematics in a set theory*

(数学の重要な部分を展開できるだろう) といっている [Sko57]<sup>5</sup>。

predicate logic      Grisín logic  $\xrightarrow{\subset} LQ \xrightarrow{\subset} \text{古典論理}$

包括原理                      ○                      ○                      ×

今のところ知られている中では、 $LQ$  は包括原理を仮定しても矛盾を起こさない論理の中で、もっとも古典論理に近い (証明力の強い) ものの一つである。従って、包括原理のみで古典数学がどこまで展開できるのかという視点からは、最も証明力の強い体系の一つである  $H$  でどこまで古典数学が展開可能かということを考えることは価値のある問題であるだろう。

## 3 $H$ における $\omega$ の構造について

### 3.1 超準的自然数の存在

2.4.2 節で紹介したように、 $H$  においてはある程度通常の (古典論理上の) 数学が展開できるのではないかとこれまで予想されてきた。しかし最近の研究により、実は  $H$  では古典的な数学とはかなり違った現象が起こることがわかってきた。特に、定理 2.3.1 は  $H$  において各種の再帰的定義を可能とするが、しかしこれは古典論理上の再帰的定義とは大きく異なった性質を持つ。それを端的に示すのが以下の定理である [Yat05]。

**Theorem 3.1.1**  $H$  では、「 $\omega$  は必ず超準的な自然数を含む」と解釈できる文章が証明可能である。

この章ではこの定理の証明を紹介する。

### 3.2 定理 3.1.1 の証明

この定理の証明は、Moh Shaw-Kwei の Paradox [Msk54] の導出方法の応用である<sup>6</sup>。任意の自然数  $m$  に  $\rightarrow_m$  を以下のように再帰的に定義する。

- $A \rightarrow_0 \neg A$  は  $\neg A$  で定義し、
- 任意の  $i < m$  にたいし、 $A \rightarrow_{i+1} \neg A$  は、 $A \rightarrow (A \rightarrow_i \neg A)$  で定義する。

Claim 3.2.1 任意の標準的 (standard) な自然数  $n \in \mathbb{N}$  にたいし、

$$\|A \rightarrow_n \neg A\|_M = \min\{(n+1)(1 - \|A\|_M), 1\}$$

が成立する。

$\omega$  が標準的な自然数のみを含んでいると仮定する。また集合

$$R_\omega = \{x : (\exists n) x \in x \rightarrow_n x \notin x\}$$

を定義する。注意として、任意の自然数  $m$  に対して  $\rightarrow_m$  を定義可能であることは自明であるが、ここで出てくるような  $(\exists m) A \rightarrow_m B$  という formula が定義可能かどうかは決して自明ではない。4.2 節で扱うような真理述語のある算術の場合であれば定義可能であることは簡単である。我々の場合は 3.2.1 節で Recursion theorem を使用して定義を与える。

さて  $R_\omega$  が定義できたとして、 $\|R_\omega \in R_\omega\|_M$  はいくつになるだろうか？

- $\|R_\omega \in R_\omega\|_M = 1$  と仮定する。このとき

$$\begin{aligned} \|R_\omega \in R_\omega\|_M &= \|(\exists n)[R_\omega \in R_\omega \rightarrow_n R_\omega \notin R_\omega]\|_M \\ &= \sup_{n \in \omega} \{\min\{(n+1)(1 - \|R_\omega \in R_\omega\|_M), 1\}\} \\ &= \sup_{n \in \omega} \{\min\{(n+1) \times 0, 1\}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、矛盾である。

- 今度は  $\|R_\omega \in R_\omega\|_M = p < 1$  と仮定する。このとき、ある自然数  $m$  が存在して、 $m \times (1 - p) \geq 1$  となるはずである。従って

$$\begin{aligned} \|R_\omega \in R_\omega\|_M &= \|(\exists n)[R_\omega \in R_\omega \rightarrow_n R_\omega \notin R_\omega]\|_M \\ &= \sup_{n \in \omega} \{\min\{(n+1)(1 - \|R_\omega \in R_\omega\|_M), 1\}\} \\ &= \sup_{n \in \omega} \{\min\{(n+1)(1 - p), 1\}\} \\ &\geq \min\{m \times p, 1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

より、こちらも矛盾である。

### 3.2.1 $\rightarrow_m$ のフォーマルな定義

フォーマルには、上の  $\rightarrow_m$  は recursion theorem を使って定義できる。term  $\theta$  を以下のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \langle n, x \rangle \in \theta &\iff [n = \emptyset \wedge x \notin x] \\ &\quad \vee [(\exists k \in \omega) n = \{k\} \wedge (x \in x \rightarrow \langle k, x \rangle \in \theta)] \end{aligned}$$

つまり  $\langle n, x \rangle \in \theta$  は  $x \in x \rightarrow_n x \notin x$  を表す。

このとき以下のように書ける。

$$R_\omega = \{x : (\exists n \in \omega) \langle n, x \rangle \in \theta\}$$

### 3.2.2 Paradox (のように見えるもの) の解決

前節において、論理式  $R_\omega \in R_\omega$  の真理値が決められず、矛盾を起こすかのように見えた。しかし White の証明したように  $H$  は無矛盾のはずである。この（見かけ上の）paradox の解決策は以下の通りである。

- $\|R_\omega \in R_\omega\|_M = 1$  が成立する。  
なぜならば、1 以外だと仮定すると、先ほどの議論と同じく、 $\omega$  の標準的な部分のみで  $\|R_\omega \in R_\omega\|_M = 1$  が結論されてしまう。
- 標準的な自然数  $n$  に対しては、 $\|\langle n, R_\omega \rangle \in \theta\|_M = 0$  が成立する。
- $\omega$  は実は超標準的な自然数  $d$  を含んでおり、

$$\|\langle d, R_\omega \rangle \in \theta\|_M > 0$$

が成立している。つまり claim 3.2.1 は、この超標準的な自然数  $d$  の所で破綻している。

以上により、

- 標準的な  $n$  に対し  $\|\langle n, R_\omega \rangle \in \theta\|_M = 0$  となる一方、超標準的な  $d$  に対しては  $\|\langle d, R_\omega \rangle \in \theta\|_M > 0$  であるのだから、 $\langle d, R_\omega \rangle \in \theta$  は「 $d$  は超標準的な自然数」と解釈できる文である。
- また  $\|R_\omega \in R_\omega\|_M = 1$ 、つまり  $(\exists n) \langle n, R_\omega \rangle \in \theta$  はいつも真理値が 1 である（つまり  $LQ$  で証明可能である）。

ということになるため、 $H$  から「 $\omega$  は必ず non-標準的な自然数を含む」と解釈できる文章  $R_\omega \in R_\omega$  が証明可能である。□

最後に  $\omega$  の crispness についてコメントをする。

**Definition 3.2.2 (Crispness)** • 論理式  $\varphi(x)$  が *crisp* であるとは、任意の  $a$  に対し、 $\|\varphi(a)\|_M$  が 0 もしくは 1 になることである。

- 集合  $X$  が *crisp* であるとは、論理式  $x \in X$  が *crisp* になることである。

定理 3.1.1 の証明において、 $\omega$  が crisp でない場合、「超準的な自然数」 $d$  は  $0 < \|d \in \omega\| < 1$  を満たしている場合がありえる（こういう  $d$  を「自然数」と呼んでいいのか抵抗感を感じる）。もし  $\omega$  が crisp なモデルであれば、そのモデルでは必ず  $\omega$  が超準的な自然数を含むと言え、定理 3.1.1 の主張の「と解釈できる」の部分を削除することができる。ただし、例えば  $\omega$  が crisp 集合であっても、 $\theta$  や  $R_\omega$  が crisp になる保証はない。

### 3.3 系: $\omega$ の order type について

さて  $\omega$  の order type についてもうすこし考察を進めてみよう。前章において、標準的な自然数  $n$  について、 $\langle n, R_\omega \rangle \notin \theta$  の真理値が 1 になること、またある超準的な自然数が存在して  $\|\langle d, R_\omega \rangle \in \theta\|_M > 0$  となることを示した。次の疑問は逆が成立するのか、つまり  $\|\langle n, R_\omega \rangle \notin \theta\| = 1$  ならば  $n$  は標準的な自然数であるといえるのか、ということである。もし言えるのなら、 $\omega' = \{n \in \omega : \langle n, R_\omega \rangle \notin \theta\}$  は  $\omega$  の standard part に近い性質を持つ（ $\omega$  が crisp ならば standard part そのものになる）ことになる。しかし我々が得る結論は否定的なものである。我々は逆に、 $\mathbf{H}$  において、「 $\omega$  は無限個の超準的な自然数を含む」と解釈できるような一連の結果を証明することができる。

以下の集合を inductive に定義する。

- $\omega^{(0)} = \omega, R_{\omega^{(0)}} = R_\omega$
- $\omega^{(1)} = \{n \in \omega^{(0)} : \langle n, R_{\omega^{(0)}} \rangle \notin \theta\}, R_{\omega^{(1)}} = \{x : (\exists n \in \omega^{(1)}) \langle n, x \rangle \in \theta\}$
- ...
- $\omega^{(n+1)} = \{k \in \omega^{(n)} : \langle k, R_{\omega^{(n)}} \rangle \notin \theta\}, R_{\omega^{(n+1)}} = \{x : (\exists n \in \omega^{(n+1)}) \langle n, x \rangle \in \theta\}$
- ...

我々の希望は、 $\omega^{(1)}$ （もしくはせめてある  $n$  に対して  $\omega^{(n)}$ ）が標準的な自然数のみで構成されていてほしい、ということである。しかし残念ながら以下が証明可能できてしまう。

**Lemma 3.3.1** 任意の（標準的）自然数  $n$  について、 $\mathbf{H}$  において「 $\omega^{(n)}$  は超準的な自然数を含む」と解釈できる文が証明可能である。

**proof** ここでは  $n = 1$  のケースのみ証明する。 $R_{\omega^{(1)}} \in R_{\omega^{(1)}}$  の真理値を考えると、定理 3.1.1 と全く同じ論法から

- 任意の標準的な自然数  $k$  に対して  $\langle k, R_{\omega^{(1)}} \rangle \in \theta$  の真理値は 0 になり、
- ある超準的な自然数  $d$  に対して  $\|\langle d, R_{\omega^{(1)}} \rangle \in \theta\| > 0$  となり、
- $R_{\omega^{(1)}} \in R_{\omega^{(1)}}$ （つまり  $(\exists n \in \omega^{(1)}) [\langle n, R_{\omega^{(1)}} \rangle \in \theta]$ ）の真理値はいつも 1 となる。

つまりこれは「 $\omega^{(1)}$  は超準的な自然数を含んでいる」と解釈できる文章  $R_{\omega^{(1)}} \in R_{\omega^{(1)}}$  が  $\mathbf{H}$  で証明可能ということになる。□

この証明から、

- 任意の (標準的) 自然数  $n, k$  について、 $\|k \in \omega^{(n)}\| = 1$  が成立することがわかる。さらに、 $\omega$  が crisp であれば  $\omega^{(n)}$  は後者関数について閉じている。
- 同様に構成法から任意の  $j$  について  $\|j \in \omega^{(n)}\| \geq \|j \in \omega^{(n+1)}\|$  であり、この意味で  $\omega^{(n+1)}$  は  $\omega^{(n)}$  の initial segment である。

もし  $\omega$  が crisp であれば、 $\omega^{(n)}$  は  $\omega^{(n+1)}$  の proper initial segment になり、後者関数について閉じた (真に小さい) initial segment を無限に「下の方に」とっていけると言うことになる。この事態は、「 $\omega$  は超準的な自然数の無限下降列を含む」とも解釈できる。これは、PA における Friedman の定理と多少似た状況であり、興味深い現象といえるかもしれない。

## 4 LQ 上の算術と集合論

### 4.1 系: Hajek の定理と H 上の算術の展開可能性

Skolem の提唱に関連して、この節では H における算術の展開可能性を考察する。例えば足し算  $+$  を H において定義可能であるかどうか考えてみよう。足し算のグラフ  $Plus(x, y, z)$  (ただし  $x + y = z$  を表現する) 自体は定理 2.3.1 より構成可能である。しかし  $Plus$  の crispness や、 $Plus$  を使って  $plus(x, y) = z$  を定義したときこれが関数となること、さらには  $plus(x, y)$  の totality などを含む原理のみから示す方法は知られていない。おそらく、これらを示すためには包括原理に加えてさらに強い公理/ルールが必要になると思われる。

Hajek は、おそらく次節で紹介する PALTr に着想を得て、H の枠内で induction scheme を仮定することでどの程度算術が展開可能かを研究した [Haj05]。

**Definition 4.1.1** *induction scheme on  $\omega$*  とは、任意の formula  $\varphi$  に

$$\varphi(0) \wedge (\forall n \in \omega) \varphi(n) \leftrightarrow \varphi(n+1) \text{ infer } (\forall x)[x \in \omega \rightarrow \varphi(x)]$$

という形をしている。

このとき H 上で induction scheme on  $\omega$  を仮定した体系においては、以下が証明可能である。

- $\omega$  が crisp 集合 (定義 3.2.2 参) となる。
- 足し算、かけ算などの初等的演算が crisp な total function として定義できる。
- すべての PA の定理をこの体系で証明することができる。

しかしその後で、彼は以下の否定的な結論を示している<sup>7</sup>。

**Theorem 4.1.2 (Hajek)** H に induction scheme on  $\omega$  を付け加えると矛盾を起こす。

**proof** induction scheme を仮定しよう。先ほどは  $\|R_\omega \in R_\omega\| = 1$  (つまり  $\neg(\forall n)[\langle n, R_\omega \rangle \notin \theta]$ ) を証明した。このとき

- $\|\langle 0, R_\omega \rangle \notin \theta\| = \|R_\omega \in R_\omega\| = 1,$

- $\|\langle n, R_\omega \rangle \notin \theta\| = 1$  を仮定すると

$$\|\langle n+1, R_\omega \rangle \notin \theta\| = 1 - \underbrace{\|R_\omega \in R_\omega\|}_{\text{真理値 } 1} \rightarrow \underbrace{\|\langle n, R_\omega \rangle \in \theta\|}_{\text{仮定より真理値 } 0} = 1$$

逆も成立することは簡単にわかる。

従って、induction より  $(\forall x)[\langle x, R_\omega \rangle \notin \theta]$  が証明されることになるが、これは我々の仮定に反する。□

古典論理上の PA においては、モデルの中で標準的な自然数と超準的な自然数を区別することができないことはよく知られている（そしてそれは数学的帰納法による）。一方、H 内部で展開される算術においては、自然数  $n$  が標準的である場合論理式  $\langle n, R_\omega \rangle \in \theta$  の真理値が 0 になり、ある超準的な自然数  $d$  に対して  $\|\langle d, R_\omega \rangle \in \theta\| > 0$  になるという意味で、標準的な自然数と超準的な自然数の区別が可能である（そしてそのため数学的帰納法を仮定することができない）。この点で、両者は好対照である。

この定理 4.1.2 により H に induction scheme on  $\omega$  を付け加えたような理論を考えることができない<sup>8</sup>。そのため  $\omega$  が crisp でありうるのか、足し算などの初等的な関数が crisp な total function として定義できるのかは、未だに定かではない。Hajek も以下の疑問を表明している。

can we add consistently to the theory axioms guaranteeing the existence of the crisp structure  $\omega$  of natural numbers and further add all the axioms of Peano arithmetic for  $\omega$ ?

この問題は依然として open であるが、現在のところ、上の結果を考えると Hajek による自然数の coding の下では否定的な結論が予想される。

## 4.2 真理述語を持つ算術における類似の結果との比較

これまでは包括原理のある集合論のなかで、古典的数学とは違った現象が起こるというという話をしてきた。この節は話を変え、H での結果を、LQ 上の算術における類似の結果（LQ 上で真理述語を持つ算術 PALTr における Hajek, Paris and Shepherdson の定理）と比較したい。

**Definition 4.2.1** 算術 PALTr は、PA の言語に加えて真理述語 Tr を持つ LQ 上の理論である。その公理と rule は

- PA のすべての公理および deduction rule
- Binary relation の Successor  $S(x, y)$ , equality = および 3-ary relation の addition  $A(x, y, z)$ , multiplication  $B(x, y, z)$  に対し、以下が真理値 1 となる

$$(\forall \vec{x}) P(\vec{x}) \vee \neg P(\vec{x})$$

- 真理述語 Tr をもち、以下を満たす
  - Tr に関する equality axiom

– “the dequotation axiom schema”

$$\varphi \leftrightarrow \text{Tr}(\bar{\varphi})$$

が任意の閉論理式  $\varphi$  について成立 ( $\bar{\varphi}$  は  $\varphi$  の Gödel number)。

このとき、以下の定理が成立する [HPS00]。

**Lemma 4.2.2** 1. 任意の算術の文  $\varphi$  に  $\text{PA} \vdash \varphi$  iff  $\text{PALTr} \vdash \varphi$  となる。

2. 任意の formula  $\varphi(x)$  に対し対角化が可能である：文  $\psi$  が存在し以下が成立する。

$$\text{PALTr} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\bar{\psi})$$

**Theorem 4.2.3 (HPS)** 1.  $\text{PALTr}$  は無矛盾である

2.  $\text{PALTr}$  の任意のモデルにおいて、 $\omega$  は必ず超準的な自然数を含む。

proof 2 の証明は、対角化定理により

$$\text{PALTr} \vdash \lambda \leftrightarrow (\exists x) \text{Tr}(\bar{\lambda} \rightarrow_x \neg \bar{\lambda})$$

となる  $\lambda$  を構成する。この  $\lambda$  は我々の  $R_\omega \in R_\omega$  と同じ役割を果たす。□

この点で上の2は、Yatabe の定理と対応していると考えてよい。また証明方法はほぼ同じである。

包括原理の下での集合概念と真理述語の振る舞いが似ていることは、Visser[Vis84] や Gupta-Belnap[GB93] などによって繰り返し指摘されてきたことでもある。Visser は Russell paradox の構造と Grelling's paradox のそれは *even identical* であると指摘している。また Gupta-Belnap は、包括原理の下での集合概念が自己言及的なものであることとともに、

Concepts with circular definitions behave in ways that are remarkably similar to the behavior of the concept of truth.

と書いている。我々の定理は、この「両者が似ている」という主張に、新たな実例を付け加えるものであると言えるだろう。

## 5 Conclusion

我々はこの小論で、Łukasiewicz 無限値述語論理  $\mathbf{LQ}$  で包括原理を仮定した場合、「自然数の集合  $\omega$  は必ず超準的な元を含む」と解釈できる文が証明可能であることを示した。これは包括原理の下での集合概念が予想以上に複雑で、古典的数学を  $\mathbf{H}$  で展開したいという希望に否定的な結論を与える。また今回の定理は、真理述語を持つ算術に関する HPS の定理の集合論版であるといえ、真理述語と包括原理による集合との間の親近性に新たな例を付け加えている。

Faculty of Engineering,  
Kobe University  
Kobe 657-8501, Japan  
yatabe@kurt.scitec.kobe-u.ac.jp

## Notes

<sup>1</sup>この構成法は Hajek による [Haj05]

<sup>2</sup>照井一成氏によれば、この定理は Cantini の他に白旗優氏と J.Y.Girard によって独立に証明されていた

<sup>3</sup>この補題は、元々 GL から二重否定の除去ルールを取り去った BCK 論理の上で包括原理を仮定した集合論上で証明された。

<sup>4</sup>彼と Chang[Cha63]、Fenstad [Fen64] は無矛盾性を証明するため、ZFC のモデルの中で組合せ的にモデル構成をしようとしたが、部分的結果（包括原理の論理式を特殊な形に制限したもの）のみで終わった。

<sup>5</sup>[Sko57] はドイツ語であり、本文中の引用文は [Whi79] による。

<sup>6</sup>Moh Shaw-Kwei の Paradox[MSK54] は、任意の自然数  $m \in \mathbb{N}$  に対し、Łukasiewicz  $m$ -値述語論理上で包括原理を仮定すると矛盾が起こることを示すものである。Łukasiewicz  $m$ -値述語論理  $\mathbf{L}_m$  は真理値の値域が  $\{0, \frac{1}{m-1}, \dots, \frac{m-2}{m-1}, 1\}$  であり、真理関数の計算は  $\mathbf{LQ}$  と同じである。さて  $\mathbf{L}_m$  において包括原理を仮定する。このとき以下の集合

$$R_m = \{x : x \in x \rightarrow_{m-1} x \notin x\}$$

を考える。このとき claim 3.2.1 より、論理式  $R_m \in R_m$  の真理値はいくつだと定めても矛盾を導く。

<sup>7</sup>Hajek は [Haj05] において  $\mathbf{LQ}$  よりも証明力の弱い論理 (Łukasiewicz logic  $\mathbf{LV}$ ) 上で包括原理を持つ集合論 (weak Cantor-Łukasiewicz set theory  $\mathbf{CL}_0$ ) 上でこの定理を証明した。その証明は、 $\mathbf{H}$  で induction scheme on  $\omega$  を仮定すると、普通の  $\mathbf{PA}$  の定理すべてに加え、self-referring な真理述語でさらに論理結合子と可換になるものを構成することができることを示している (そのような真理述語を持つ算術は矛盾を導くことが [HPS00] で示されている)。我々の定理 4.1.2 は、本来の Hajek の定理の特殊なケースであるが、その分証明は簡単である。

<sup>8</sup>注意として、induction scheme を制限して  $\varphi$  が  $\omega$  を含まないような論理式にのみ制限した場合は、その制限されたルールを付け加えても矛盾をうまないことを Hajek が示している。ただしこのルールでは、初等的関数を定義するのには役不足であることも明らかである。

## 参考文献

- [Boolos 1971] Boolos, G. 1971. "The iterative conception of set" The Journal of philosophy 68: 215-32.
- [Can03] Andrea Cantini. "The undecidability of Grisin's set theory" Studia logica 74 (2003) pp.345-368

- [Cha63] C. C. Chang. "The axiom of comprehension in infinite valued logic" *Mathematica Scandinavia* 13 (1963) pp.9-30
- [Fen64] J.E. Fenstad. "On the consistency of the axiom of comprehension in the Lukasiewicz infinite-valued logic" *Mathematica Scandinavia* 14 (1964) pp.65-74
- [Gri82] Grisín, V. N. Predicate and set-theoretic calculi based on logic without contractions. *Math. USSR Izvestija* 18 (1982) 41-59.
- [GB93] Anil Gupta, Nuel Belnap "The revision theory of truth" MIT Press, 1993
- [Haj05] Petr Hajek. "On arithmetic in the Cantor-Lukasiewicz fuzzy set theory" *Archive for Mathematical Logic*, 44(6): 763 - 82.
- [HPS00] Petr Hajek, Jeff B. Paris, John C. Shepherdson. "The Liar Paradox and Fuzzy Logic" *Journal of Symbolic Logic*, 65(1) (2000) pp.339-346
- [Hay63] Louise Schmir Hay. "Axiomatization of the Infinite-Valued Predicate Calculus" *Journal of Symbolic Logic*, 28(1) (1963) pp.77-86
- [Msk54] Moh Shaw-Kwei. "Logical paradoxes for many-valued systems" *Journal of Symbolic Logic*, 19(1)(1954) pp.37-40
- [Oka03] 岡本賢吾 "命題と集合を同一視すること" *科学哲学* 36-2 (2003) pp.103-118
- [Sca62] B. Scarpellini. "Die Nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Lukasiewicz" *Journal of Symbolic Logic*, 27 (1962) pp.159-170
- [Sko57] T. Skolem. "Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom" *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 3(1957) pp.1-17
- [Ter03] 照井一成 "Linear Logic and Naive Set Theory" Summer School on Foundations of Mathematics, Shizuoka University, September, 2003.
- [Yat05] Shunsuke Yatabe "A note on Hajek, Paris and Shepherdson's theorem" *Logic Journal of IGPL*, pp.261-266, vol. 13(2), March 2005.
- [Vis84] Albert Visser. "Semantics and the liar Paradox" *Handbook of philosophical logic*. Vol. IV. pp.617-702 Synthese Library, 167. D. Reidel Publishing Co.(1984)
- [Whi79] Richard B. White. "The consistency of the axiom of comprehension in the infinite-valued predicate logic of Lukasiewicz" *Journal of Philo. Logic*, 8 (1979) pp.509-534