

## Balanced design と balanced array について

海上保安大学校 栗田正秀  
広島大 理 西井龍映

### § 1. 序

Resolution  $2t+1$  の  $2^m$ -FF (fractional factorial) design について, design  $T$  が balanced であるための必要十分条件は, information matrix  $M_T$  が正則で,  $T$  が index set  $\{M_i\}$  を持つ balanced array (B-array)  $[N, m, 3, 2t]$  であることは, 山本・白倉・栗田 [4] によって示された。Resolution  $V$  の  $3^m$ -FF design について, design  $T$  が balanced であるための必要十分条件は,  $M_T$  が正則で,  $T$  が index set  $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$  を持つ B-array  $[N, m, 3, 4]$  であることは, 栗田 [3] で示された。

ここでは, 一般の  $s^m$ -FF design について, 上と同様な結果が得られることを見る。

### § 2. Parameter の定義

Factor  $F_1, F_2, \dots, F_m$  は 各々  $s$  種の level  $0, 1, \dots, s-1$  を持ち.

$Z$  はその assembly を辞書式順序に並べたものとする.

$$Z = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, 1 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 0, s-1 \\ 0, 0, \dots, 1, 0 \\ \vdots \\ s-1, s-1, \dots, s-1, s-1 \end{bmatrix} : s^m \times m$$

$\eta(Z)$  は  $Z$  の row vector  $\underline{j}$  に対応する assembly  $j$  の観測値の期待値とし, 順に並べた  $s^m \times 1$  の vector であるとする.

定義 2.1 Parameter vector  $\theta(Z)$  を次の様に定義する.

$$(2.1) \quad \theta(Z) = (D_{(m)} D_{(m)})^{-1} D_{(m)} \eta(Z)$$

ただし,  $D = \begin{bmatrix} d_{(0)} \\ d_{(1)} \\ \vdots \\ d_{(s-1)} \end{bmatrix} : s \times s$  行列で,  $D$  の row vector  $d_{(i)}$  は

$d_{(i)} = (d_{0(i)}, d_{1(i)}, \dots, d_{s-1(i)})$  ( $i = 0, 1, \dots, s-1$ ) と書け,

$d_{(0)} = (1, 1, \dots, 1)$  かつ  $d_{(i)} d_{(j)} = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij} > 0, i, j = 0, 1, \dots, s-1$ )

を満足する.  $D_{(m)}$  は  $D$  の  $m$  回の Kronecker 積とする.

この定義より,  $\theta(0, 0, \dots, 0)$  は general mean を.

$\theta(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, 0) \quad (\varepsilon_r \in \{1, 2, \dots, s-1\}, r=1, 2, \dots, n)$  は

Factor  $F_1, F_2, \dots, F_n$  の interaction を意味する.

(2.1) は  $\eta(Z) = D_{(m)} \theta(Z)$  と解くことができる.

このことから, assembly  $\underline{j} = (j_1, j_2, \dots, j_m)$  による effect は,

$\eta(\underline{j}) = \sum_{\underline{\varepsilon} \in Z} d_{\underline{\varepsilon}}^j \theta(\underline{\varepsilon})$  で表現される. ただし,  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$

は  $Z$  の row vector を動かす,  $d_{\underline{\varepsilon}}^j = d_{j_1}(\varepsilon_1) d_{j_2}(\varepsilon_2) \dots d_{j_m}(\varepsilon_m)$  である.

以後  $l+1$  Factor interaction 以上無視可能と仮定する。

$N$ 個の assembly  $j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(N)}$  から成る design  $T$  を考える。  
このとき,  $T = \begin{bmatrix} j^{(1)} \\ j^{(2)} \\ \vdots \\ j^{(N)} \end{bmatrix}$  で表現する。  $\theta_\nu$  は  $l$  Factor interaction

まどのすべての parameter を並べた column vector,  $y(T)$  を assembly  $j^{(k)}$  による観測値を並べたものとする。

$$(2.2) \quad y(T) = E_T \theta_\nu + e_T$$

と書ける。ただし  $\nu = \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} (s-1)^k$  (parameter の個数),  $E_T$  は  $N \times \nu$  の design matrix,  $e_T$  は  $N \times 1$  の error vector であり  $\text{Exp}(e_T) = 0$ ,  $\text{Var}(e_T) = \sigma^2 I_N$  とする。

(2.2) の normal equation は,  $M_T \hat{\theta}_\nu = E_T' y(T)$  (ただし  $M_T = E_T' E_T$ ) であり,  $M_T$  が正則行列なら,  $\hat{\theta}_\nu = V_T E_T' y(T)$  ( $V_T = M_T^{-1}$ ) が  $\theta_\nu$  の BLUE (best linear unbiased estimator) になり,  $\text{Var}(\hat{\theta}_\nu) = \sigma^2 V_T$  が成立する。

[注] parameter  $\theta(\alpha)$ ,  $\theta(\beta)$  に対応する行列  $M_T$  の成分を。

$$\varepsilon(\alpha, \beta) \text{ とすれば, } \varepsilon(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^N d_{\alpha}^{j^{(k)}} \cdot d_{\beta}^{j^{(k)}} \text{ である。}$$

$T_{t_1 t_2 \dots t_n} (1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq m)$  を,  $T$  の  $t_1$  列  $t_2$  列  $\dots$   $t_n$  列から成る  $N \times n$  の sub array とする。このとき  $\mu_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$  を, この sub array に, row vector  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  ( $\nu_r \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ ) が含まれる回数とする。さらに  $\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n} = \varepsilon(\alpha, \beta)$  で定義する。ただし,  $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ ,  $\beta = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m)$  だ。

$$t = t_r \text{ のとき } \begin{cases} \alpha_t = \varepsilon_r \\ \beta_t = 0 \end{cases} \text{ 又は } \begin{cases} \alpha_t = 0 \\ \beta_t = \varepsilon_r \end{cases} \quad (r=1, 2, \dots, n) \text{ を}$$

$t \neq t_r (r=1, 2, \dots, n)$  のときは  $\alpha_t = \beta_t = 0$  を満たしている。こ  
こに、 $\varepsilon_r \in \{0, 1, \dots, s-1\} (r=1, 2, \dots, n)$  である。

これらを辞書式順序に並べた vector を

$$\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n} = \|\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}\|, \quad \mu_{t_1 t_2 \dots t_n} = \|\mu_{t_1 t_2 \dots t_n}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}\|$$

とおけば、次の補題が成り立つ。

補題 2.1 すべての sub array  $T_{t_1 t_2 \dots t_n}$  について

$$\gamma_{t_1 t_2 \dots t_n} = D_{(n)} \mu_{t_1 t_2 \dots t_n} \quad \text{が成立する。}$$

### §3. Balanced array と information matrix

Balanced array は Chakravarti [2] により、最初に定義された。

定義 3.1  $T$  が strength  $n$  で、index set  $\{\lambda_{i_0 i_1 \dots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_{s-1} = n\}$  を持つ balanced array (B-array)  $[N, m, s, n]$  であるとは、 $T$  が  $0, 1, \dots, s-1$  を成分に持つ  $N \times m$  の行列で、 $T$  のどの  $N \times n$  sub array も、level が  $r$  である factor を  $ir$  個持つ ( $r=0, 1, \dots, s-1$ )。すべての row vector が  $\lambda_{i_0 i_1 \dots i_{s-1}}$  に含まれるようなものをいう。

定義 3.2  $T$  が B-array  $[N, m, s, n]$  で、その index set  $\{\lambda_{i_0 i_1 \dots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_{s-1} = n\}$  が  $\{\lambda\}$  に等しいとき、 $T$  は index  $\lambda$  を持つ Orthogonal array (O-array)  $[N, m, s, n]$  であると定義する。

定義 3.3  $M_T$  が *balanced* (又は *permutation invariant*) であるとは,  $\forall \tau \in \mathcal{S}_m$  に対し,  $\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\tau\alpha, \tau\beta)$  がすべての  $\alpha, \beta$  に対し成立するときをいう。ただし,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  のとき,  $\tau\alpha = (\alpha_{\tau(1)}, \alpha_{\tau(2)}, \dots, \alpha_{\tau(m)})$ ,  $\tau\beta$  も同様に約束する。

$l \leq [\frac{m}{2}]$  なる  $l$  に対し,  $l+1$  Factor interaction 以上のすべての parameter が無視可能なら, 次の 2 定理が成立する。

定理 3.1  $u$  Factor interaction ( $u \leq l$ ) 以下のすべての parameter が, 他の parameter と独立に推定できるための必要十分条件は,  $T$  が  $O$ -array  $[N, m, s, u, l]$  であることである。

[注]  $u = l$  ならば,  $M_T$  は対角行列である。

定理 3.2  $M_T$  が *balanced* であるための必要十分条件は,  $T$  が index set  $\{i_1, i_2, \dots, i_s \mid i_1 + i_2 + \dots + i_s = 2l\}$  を持つ  $B$ -array  $[N, m, s, 2l]$  であることである。

証明の概略: 補題 2.1,  $D$  の直交性.  $\varepsilon(\alpha, \beta)$  は  $\gamma_{t_1 \dots t_l}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_l}$  の一次結合で書けることより。

#### §4. Multidimensional relationship

MDPBAS (multidimensional partially balanced association scheme) の定義は, Bose & Srivastava [1] で与えられた。これの拡張である MDRS (multidimensional relationship) は, 最初に 栗田 [3] で与えられた。ここでは

その定義を明らかにする。

定義 4. 1  $n_i$  個の元から成る集合  $S_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}$  ( $i=1, 2, \dots, L$ ) があり, relation  $R$  が  $\bigcup_{i=1}^L S_i$  の元の間で定義されていて, 次の条件を満たすとき,  $R$  を MDR  $S$  という。

(i) すべての  $S_i \times S_j$  ( $i, j=1, 2, \dots, L$ ) に於いて, local relationship set  $\pi^{ij}$  ( $|\pi^{ij}| = m_{ij}$ ) が存在して,  $S_i$  のどの元  $x_{ij}$  に対しても,  $S_j$  は  $m_{ij}$  個の disjoint なクラスに分割され, 各クラスは  $x_{ij}$  と  $\alpha (\in \pi^{ij})$  の relation にあるものの全体で, その濃度は  $n_\alpha^{ij}$  であり,  $x_{ij}$  のとり方によらず一定である。

$(x_{ij}, x_{jg})$  が  $\alpha (\in \pi^{ij})$  の relation にあることを  $R(x_{ij}, x_{jg}) = R_\alpha^{ij}$  とは  $x_{ij} \xrightarrow{\alpha} x_{jg}$  で表現する。

(ii)  $S_i, S_j, S_k$  を任意に選ぶ: ( $i, j, k=1, 2, \dots, L$ )  $\pi^{ik}$  の任意の元  $\gamma$  に対し,  $S_i \times S_k$  の元  $(x_{ij}, x_{k\ell})$  で  $\gamma$  の関係にあるものを取る。  $\forall \alpha \in \pi^{ij}, \forall \beta \in \pi^{jk}$  を与えると,

集合  $\left\{ x_{jg} \in S_j \mid \begin{array}{c} x_{ij} \xrightarrow{\gamma} x_{k\ell} \\ \alpha \searrow \nearrow \beta \\ x_{jg} \end{array} \right\}$  の濃度は,  $x_{ij} \xrightarrow{\gamma} x_{k\ell}$  で

ある限り,  $x_{ij}, x_{k\ell}$  の取り方によらず,  $i, k, \gamma, j, \alpha, \beta$  のみに依存する定数  $\delta(i, k, \gamma; j, \alpha, \beta)$  である。

[注] この relation は必ずしも対称ではない。

この MDR  $S$  から, local relationship matrix  $\{A_\alpha^{ij} \mid \alpha \in \pi^{ij}\}$  と relationship matrix  $\{D_\alpha^{ij} \mid \alpha \in \pi^{ij}, i, j=1, 2, \dots, L\}$  を次のよ

に定義する。

定義 4. 2 任意の  $(i, j)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, L$ ) を考える。  $\forall \alpha \in \pi^{i,j}$  に対して、  $A_\alpha^{i,j}$  は  $n_i \times n_j$  行列で、その  $(f, g)$  element  $a_{f,g}^{i,j}(\alpha)$  は、  

$$a_{f,g}^{i,j}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{if} \xrightarrow{\alpha} x_{jg} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} f=1, 2, \dots, n_i \\ g=1, 2, \dots, n_j \end{pmatrix}$$

である。

定義 4. 3 上の  $(i, j), \alpha$  に対し、  $D_\alpha^{i,j}$  は  $P \times P$  の行列で ( $P = n_1 + n_2 + \dots + n_L$ )、  $L^2$  個の sub matrix から成る。  $S_i$  に対応する row block,  $S_j$  に対応する column block の  $n_i \times n_j$  sub matrix は  $A_\alpha^{i,j}$  であり、他の sub matrix の element はすべて 0 である。

MDRS と  $\{A_\alpha^{i,j}\}, \{D_\alpha^{i,j}\}$  の定義により、次の補題を得る。

補題 4. 1  $A_\alpha^{i,j} A_\beta^{j,k} = \sum_{\gamma \in \pi^{i,k}} g(i, k, \gamma; j, \alpha, \beta) A_\gamma^{i,k}$   
 $D_\alpha^{i,j} D_\beta^{j,k} = \left( \sum_{\gamma \in \pi^{i,k}} g(i, k, \gamma; j, \alpha, \beta) D_\gamma^{i,k} \right) \delta_{j,\gamma}$   
 がすべての  $\alpha \in \pi^{i,j}, \beta \in \pi^{j,k}, i, j, k = 1, 2, \dots, L$  に対し成立する。

補題 4. 2  $\mathcal{A}$  を  $\{D_\alpha^{i,j} \mid \alpha \in \pi^{i,j} \ i, j = 1, 2, \dots, L\}$  の元の  $\mathbb{R}$  上の一次結合全体とすれば、 $\mathcal{A}$  は  $P \times P$  行列  $\{D_\alpha^{i,j}\}$  を base とする行列多元環になる。この algebra  $\mathcal{A}$  を MDRS の relationship algebra と呼ぶ。

§ 5. Balanced fractional  $s^m$  factorial design

$S_{p_0, p_1, \dots, p_{s-1}}$  を parameter の index の集合で,  $\{d \in Z \mid w_r(d) = p_r, r=0, 1, \dots, s-1\}$  と定義する。ただし  $w_r(d)$  は vector  $d$  の元で,  $r$  であるものの個数とする。(t+1) Factor interaction 以上無視可能としているから, unknown parameter の index の集合族  $\mathcal{S}$  は,  $\{S_I \mid I = (p_0, p_1, \dots, p_{s-1}), p_0 + p_1 + \dots + p_{s-1} \leq t\}$  である。 $S = \bigcup_{S_I \in \mathcal{S}} S_I$  は unknown parameter の index 全体である。

$M(s)$  を  $s \times s$  行列全体とするとき,  $S \times S$  から  $M(s)$  への map  $W^*$  を次のように定義する。

定義 5. 1  $S \times S \ni \forall (d, \beta)$  に対し,  $W^*(d, \beta)$  の  $(i, j)$  element ( $i, j=1, 2, \dots, s$ ) は, 集合  $\{t \in \{1, 2, \dots, m\} \mid d_t = i-1, \beta_t = j-1\}$  の濃度とする。ただし,  $d = (d_1, d_2, \dots, d_m), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  である。

[注] この map  $W^*$  は  $(d, \beta)$  の Factor の permutation に関する maximal invariant function である。

$\mathcal{S}$  の中に, 次のように relation を定義する。 $\mathcal{S}$  の任意の元  $S_I, S_J$  に対し, local relationship set  $\pi^{I, J}$  を  $\{W^*(d, \beta) \in M(s) \mid (d, \beta) \in S_I \times S_J\}$  とし,  $S_I \times S_J \ni \forall (d, \beta)$  が  $W \in \pi^{I, J}$  の relation にあるとは,  $W = W^*(d, \beta)$  の時, かつその時に限りいう。

定理 5. 1  $\mathcal{S}$  に定義された relation は MDR S である。

[注]  $\pi^{I, J} \ni \forall W$  に対し,  $W' \in \pi^{I, J}$  が成立する。



定理 5.2 この MDRS から生成される relationship algebra  $\mathcal{A}$  は  $I_\nu$  ( $\nu = \sum_{k=0}^s \binom{m}{k} (s-1)^k$ ) を含む。

定義 5.2  $\mathcal{A}$  の vector subspace  $\mathcal{O}$  を  $\{B_{\mathbf{W}}^{P, \mathbf{g}} \mid \mathbf{W} \in \pi^{P, \mathbf{g}}, S_P, S_{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}\}$  の元の一次結合全体とする。ただし、

$$B_{\mathbf{W}}^{P, \mathbf{g}} = \begin{cases} D_{\mathbf{W}}^{P, P} & \text{if } P = \mathbf{g} \text{ かつ } \mathbf{W} = \mathbf{W}' \in \pi^{P, P} \\ D_{\mathbf{W}}^{P, \mathbf{g}} + D_{\mathbf{W}'}^{\mathbf{g}, P} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。ただし、 $\mathbf{W} \in \pi^{P, \mathbf{g}}$  である。

[注] 定義 3.3 は  $M_T \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$  と言い換えてよい。

定義 5.3  $s^m$ -FF design  $T$  が balanced design とは  $M_T$  が正則で、 $V_T = M_T^{-1}$  が permutation invariant であるときもいう。

$l$  が  $l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  を満たすとき、次の主定理を得る。

定理 5.3 Resolution  $2l+1$  の  $s^m$ -FF design  $T$  が balanced design であるための必要十分条件は、 $T$  が  $M_T$  を正則にする B-array  $[N; m, s, 2l]$  であることである。

[証明] ( $\Rightarrow$ ) 仮定より  $V_T \in \mathcal{O} \subset \mathcal{A}$  であり、 $\mathcal{A} \ni I_\nu$  (定理 5.2) から  $M_T = V_T^{-1} \in \mathcal{A}$  がわかる。定義 5.2 の注、定理 3.2 より、 $T$  は B-array  $[N; m, s, 2l]$  である。

( $\Leftarrow$ ) 仮定より  $M_T \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$  であり、 $\mathcal{A} \ni I_\nu$  から  $V_T \in \mathcal{A}$  である。故に  $V_T$  は permutation invariant であるから、 $T$  は balanced design である。

## REFERENCES

- [1] Bose, R. C. and Srivastava, J. N. (1964). Multidimensional partially balanced designs and their analysis, with applications to partially balanced factorial fractions. *Sankhyā* (A) 26 145-168.
- [2] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhyā* 17 143-164.
- [3] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional  $3^m$  factorial designs. Submitted to *J. Statist. Planning Inf.*
- [4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength  $2\ell$  and balanced fractional  $2^m$  factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27 143-157.