

Fuchs 双曲型方程式の 超函数解の構造.

東大. 理. 田原秀敏.

§0. まえがき

最初に常微分方程式の局所理論を復習しておこう.

$$(0). \quad t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + p(t)t \frac{du}{dt} + q(t)u = 0. \quad (p(t), q(t) \text{ は正則函数}).$$

方程式 (0) は $t=0$ を確定特異点に持っている. 決定方程式を

$$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + p(0)\lambda + q(0) = (\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)$$

とする. 簡単のため, ρ_1, ρ_2 は整数 と仮定すると

(I) 方程式 (0) の $t=0$ の近傍 ($t=0$ を除く) での正則解は次の形に一意的に表わされる.

$$u(t) = C_1 t^{\rho_1} u_1(t) + C_2 t^{\rho_2} u_2(t).$$

$u_1(t), u_2(t)$ は $t=0$ で正則, C_1, C_2 は任意定数.

(II) 方程式 (0) の $t=0$ の近傍での超函数 (hyperfunction) 解は,

(II-1) ρ_1, ρ_2 は整数の時 は次の形に一意的に表わされる.

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{\pm} C_1^{\pm} (t \pm i0)^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} C_2^{\pm} (t \pm i0)^{\rho_2} \tilde{u}_2(t) \\ &= \sum_{\pm} d_1^{\pm} t_{\pm}^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} d_2^{\pm} t_{\pm}^{\rho_2} \tilde{u}_2(t). \end{aligned}$$

$\tilde{u}_i(t) = u_i(t)|_R$. $c^\pm, d^\pm$ は任意定数.

(II-2) $\rho_1 = \text{正整数 (又は0)}$, $\rho_2 \neq \text{整数}$ とすると一般解は.

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 t^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} c_2^\pm (t \pm i0)^{\rho_2} \tilde{u}_2(t) + c' \gamma(t) t^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) \\ &= \sum_{\pm} c_1 t_{\pm}^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} d_2^\pm t_{\pm}^{\rho_2} \tilde{u}_2(t). \quad (t_{\pm}^n \equiv \gamma(\pm t) t^n) \end{aligned}$$

なる事は良く知られている.

我々は既に 田原 [1][2] で 多変数の Fuchs 型及び Fuchs 双曲型偏微分方程式について幾多の議論を展開した. この論文では. それらを踏まえ. 上の (I) (II) に類似の基本解を完全に決定する. それにより. Fuchs 型及び Fuchs 双曲型方程式の一般解は全部書き下す事ができる. 同時に 田原 [2] で目標とした双曲型方程式の結果を拡張する事は. 完全に達成された事になる.

§1. Fuchs 型方程式の基本解

田原 [1][2] での議論を. $t=0$ に特異点を持つ正則解についての. 基本解の構成という面から捕え直してみる.

$$P(t \times D_t D_k) = t^k D_t^m + \dots + P_k(t \times D_k) D_t^{m-k} + \dots + P_m(t \times D_k).$$

$$(1) \quad 0 \leq k \leq m$$

$$(2) \quad \text{ord } P_j(t \times D_k) \leq j \quad 1 \leq j \leq m$$

$$(3) \quad \text{ord } P_j(0 \times D_k) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq r \quad (P_j(0 \times D_k) = q_j(x) \text{ とおく.})$$

定義(1.1) 微分作用素 P が (1)(2)(3) を満す時, P は $t=0$ に関し $\text{weight}(m-k)$ の Fuchs 型 であると言う. 特性多項式を

$$\begin{aligned} P(\lambda, x) &= \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+1) + a_1(x) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+2) + \cdots + a_k(x) \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+k+1) \\ &= \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+k+1) (\lambda-\lambda_1(x)) \cdots (\lambda-\lambda_k(x)) \end{aligned}$$

とおく. 特性根 $\lambda=0, 1, \dots, m-k-1, \lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)$ である.

Fuchs 型方程式の詳細は, 田原 [1][2], Baouendi-Goulaouic [3] を参照されたい. 特性根について, 次の仮定をおく.

(仮定) $\lambda_i(0), \lambda_i(0) - \lambda_j(0) \in \mathbb{Z} \quad (i \neq j)$.

この時, 正則解に関する基本解は, 次の様にして構成される.

$$\begin{aligned} \hat{V}_j &= \{ (tx, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; |t| < \varepsilon, |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, x_i \neq y_i \quad (i=1, \dots, n), \\ &\quad |t| < (M|x_i - y_i|)^p \quad (i \neq j) \}. \end{aligned}$$

$$\tilde{V} = \bigcap_{j=1}^n \hat{V}_j \quad \text{とおく.}$$

形式的微分作用素の環 $\hat{\mathcal{D}}^{(p)}$ ([2] 参照) は次の様に表わされる.

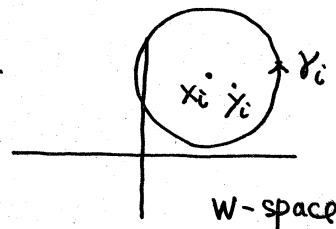
$$\hat{\mathcal{D}}^{(p)} \equiv \varinjlim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow 0}} \left(\frac{\mathcal{O}(\tilde{V})}{\bigoplus_{j=1}^n \mathcal{O}(\hat{V}_j)} \otimes dy \right).$$

$\hat{\mathcal{D}}^{(p)}$ は次の諸性質をもっている.

(1) $\hat{\mathcal{D}}^{(p)}$ は環構造をもつ. 積は $K_1 = K_1(tx, y) dy, K_2 = K_2(tx, y) dy$

に対し, $K_1 K_2 \equiv \oint_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} K_1(txw) K_2(twy) dw$.

積分路は右図の γ_i で共通定義領域に含まれるものとする.



(2) $p=0$ の時は $\hat{\mathcal{D}}(0)$ は微分作用素のなす環.

(3) $\hat{\mathcal{Q}}$ を $t=0$ にのみ特異点をもつ正則函数の芽 (多価函数も許す) 全体とする時. $\hat{\mathcal{D}}(p)$ は $\hat{\mathcal{Q}}$ の作用環になる. 又

$\mathcal{Q}$ を正則函数全体とする時. $\hat{\mathcal{D}}(p)$ は $\mathcal{Q}$ の作用環にもなる.

但し. $K = K(t \times \gamma) d\gamma \in \hat{\mathcal{D}}(p)$. $u(t \times) \in \mathcal{Q}$ 又は $\hat{\mathcal{Q}}$ に対し.

$$K \cdot u = \oint_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} K(t \times \gamma) u(t \times \gamma) d\gamma \quad \text{と定める.}$$

定理 (1.2). 行列微分作用素 $P = tD_t - A(t \times D_x)$ が次を満たす.

(1). $A(t \times D_x) = (A_{ij}(t \times D_x))_{1 \leq i, j \leq m}$ とおく時. $\text{ord } A_{ij}(t \times D_x) \leq n_i - n_j + 1$.

(2) $t=0$ の時 $\text{ord } A_{ij}(0 \times D_x) \leq 0$ ($A(0 \times D_x) = A_0(x)$ とおく.)

(3) $A_0(0)$ の固有値 α_i について. $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$.

この時. 適当な $U(t \times \gamma) d\gamma \in GL(\hat{\mathcal{D}}(p))$ を取ると

$$U^{-1} P U = tD_t - A_0(x)$$

なる変形が出来る.

(証明). A の matrix-order < 1 の時は ω (微分作用素) の中で上の変形が成り立つ事は [1], [2] で示した. $\hat{\mathcal{D}}(p)$ を導入すれば同様に証明できる. Q.E.D.

定理 (1.3). $P(t \times D_x D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 型. 特性根につい

て. $\lambda_\nu(0)$, $\lambda_i(0) - \lambda_j(0) \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) を仮定する. $u(t \times)$ は $t=0$ に特異点をもつ正則函数. 即ち $u(t \times) \in \hat{\mathcal{Q}}$ ($\mathcal{Q} \subset \hat{\mathcal{Q}}$). とする.

この時 適当な K_i ($i=0, \dots, m-k-1$), L_j ($j=1, \dots, k$) $\in \hat{\mathcal{D}}(p)$ が存在し

$$v_i = K_i (D_t^i u), \quad w_j = L_j (t D_t - j + 1) \cdots (t D_t) D_t^{m-k-1} u$$

なる関係式により次の (1)(2) の方程式は同値になる.

$$(1) \quad Pu = 0$$

$$(2) \quad D_t v_i = 0, \quad (t D_t - j + 1) w_j = 0, \quad (i=0, \dots, m-k-1, j=1, \dots, k).$$

(証明) $\sigma(p) = t^k D_t^m$ の時, $K_i, L_j \in \mathcal{D}$ で (1)(2) が同値なることは,

[2] で既に示した. それと同様である.

Q.E.D.

上の関係式を逆に表現すると, 適当な $\tilde{K}_i, \tilde{L}_j \in \hat{\mathcal{D}}(p)$ より

$$u = \sum \tilde{K}_i v_i + \sum \tilde{L}_j w_j$$

と書ける. 今 $\tilde{K}_i, \tilde{L}_j$ の定義函数を適当に一つとって, それを

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_i(t, x, y) dy, \quad \tilde{L}_j = \tilde{L}_j(t, x, y) dy$$

と表わす. 次の結果が §0.(I) の拡張である.

系 (1.4) (1.3) の条件を仮定する. この時 $Pu = 0$ の解で,

高々 $t=0$ にのみ特異点をもつ正則解 (多価を許す) は, 次の形

に一意的に書ける.

$$u(t, x) = \sum_i \int \tilde{K}_i(t, x, y) \varphi_i(y) dy + \sum_j \int \tilde{L}_j(t, x, y) t^{\lambda_j(y)} \psi_j(y) dy$$

$\varphi_i(y), \psi_j(y)$ は 任意正則函数.

(証明) 定理 (1.3) より, $v_i = \varphi_i(x), w_j = t^{\lambda_j(x)} \psi_j(x)$ を得るから

明らか.

Q.E.D.

注意 (1.5) (1). 基本解と特性根との対応は、次の通りである.

$$\tilde{K}_i(t \times \gamma) \longleftrightarrow \lambda = i \quad (\text{正整数又は } 0)$$

$$\tilde{L}_j(t \times \gamma) \longleftrightarrow \lambda = \lambda_j(\alpha) \quad (\text{非整数})$$

(2) $Pu = 0$ の解で正則解 ($t=0$ も含めて) のみを考えるならば、次の形に一意的に表わされる.

$$u(t, x) = \sum_i \int \tilde{K}_i(t \times \gamma) \phi_i(\gamma) d\gamma.$$

適当に定数倍して, $(\frac{\partial}{\partial t})^i u(t, x)|_{t=0} = \phi_i(x), \quad 0 \leq i \leq m-k-1$

なる様に $\tilde{K}_i$ を選べる. (これが Cauchy 問題の基本解である. Baouendi-Goulaouic [3] が示したのは、この部分に他ならない.)

(3) $\int \tilde{L}_j(t \times \gamma) t^{\lambda_j(\alpha)} \psi_j(\gamma) d\gamma$ の部分に関連した議論としては、Tsuno [4] がある.

Problem (1.6). $\lambda_i(\omega), \lambda_i(\omega) - \lambda_j(\omega) \notin \mathbb{Z} \quad (i \neq j)$ の仮定を省け. 言い換えるなら、常微分方程式の Frobenius の方法を拡張せよ.

§2. Fuchs 双曲型方程式の超函数基本解.

実領域での超函数解の構造を解明する. 議論は、田原 [1] [2] で設定された方針を実行する事により、なされる.

$$P(t \times D_t D_x) = t^k D_t^m + P_1(t \times D_x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \cdots + P_k(t \times D_x) D_t^{m-k} + \cdots + P_m(t \times D_x).$$

$$(1) \quad 0 \leq k \leq m$$

$$(2) \quad \text{ord } P_j(t \times D_x) \leq j \quad 1 \leq j \leq m$$

$$(3) \quad \text{ord } P_j(0 \times D_x) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

$$(4) \quad m \text{ 階部分 } \sigma_m(p) = t^k p_m(t \times \tau \xi) \text{ なる積の形.}$$

$$(5) \quad p_m(t \times \tau \xi) = 0 \text{ の根 } \tau \text{ について, } t, x, \xi \text{ 実数} \Rightarrow \tau \text{ も実数}$$

定義 (2.0.1) P が (1)~(5) を満す時, $\{t=0\}$ に関し $\text{weight}(m-k)$ の Fuchs 双曲型という. (詳細は [1][2] を参照されたい.)

特性根について, §1 と同様. 次の仮定をおく.

$$(\text{仮定}) \quad \lambda_i(\omega), \lambda_i(\omega) - \lambda_j(\omega) \in \mathbb{Z} \quad (i \neq j).$$

注意 (2.0.2) $k=0$ の時, P は双曲型方程式に他ならない. この時, 超函数解について, $P: B \rightarrow B$ を考える時.

$$(i) \quad \text{Coker } P = 0$$

$$(ii) \quad \text{Ker } P \cong {}'B^m \quad ({}'B \text{ は } x\text{-変数のみの超函数})$$

(ii) は具体的には, Cauchy 問題の基本解 $E_j(t \times \gamma)$ $0 \leq j \leq m-1$ を取る事により (基本解は一意的に存在).

$$\begin{cases} u(t, x) = \sum_{j=0}^{m-1} \int E_j(t \times \gamma) v_j(\gamma) d\gamma, & v_j(\gamma) \in {}'B \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t, x)|_{t=0} = v_j(\gamma) & 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

により対応付けられる. (詳細は Boney-Schapira [5], 柏原-

河合 [6] を参照) 本節の目標は、この結果を Fuchs 双曲型に拡張する事である。

次の図式を考えよう. ($aB \ni u \Leftrightarrow u \in B \ \& \ S-S(u) \neq (0, \pm Fdt\infty)$.)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & aB & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_{(0, +Fdt\infty)} \oplus C_{(0, -Fdt\infty)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow P_a & & \downarrow P & & \downarrow P_c \\ 0 & \longrightarrow & aB & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_{(0, +Fdt\infty)} \oplus C_{(0, -Fdt\infty)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

これを '3つ組の完全列' とみて, long exact sequence をとる

$$\begin{array}{ccccccc} \text{と,} & 0 & \longrightarrow & \text{Ker } P_a & \longrightarrow & \boxed{\text{Ker } P} & \longrightarrow \text{Ker } P_c \\ & & & & & \longrightarrow & \text{Coker } P_a \longrightarrow \boxed{\text{Coker } P} \longrightarrow \text{Coker } P_c \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る. 従って, $\text{Ker } P$, $\text{Coker } P$ の研究は次の二つに分かれる.

(2.1). $P_a: aB \rightarrow aB$ の構造は如何. ?

(2.2). $P_c: C_{(0, \pm Fdt\infty)} \rightarrow C_{(0, \pm Fdt\infty)}$ の構造は如何. ?

前者は, Cauchy 問題に対応し, 後者は $k=0$ の時の佐藤の基本定理の拡張を意図するものである.

§2.1. $P_a: aB \rightarrow aB$ の構造.

Cauchy 問題の 解の存在と一意性は, 次の定理が保証する.

定理 (2.1.1) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型, 特性多項式について, $\varphi(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \geq m-k$ が成り立つとする.

この時、任意の超函数 $f(t, x) \in \mathcal{A}\mathcal{B}$, $v_0(x), \dots, v_{m-k-1}(x) \in \mathcal{B}'$ に対し
 次の条件を満たす超函数 $u(t, x) \in \mathcal{A}\mathcal{B}$ が一意的存在する。

$$\begin{cases} Pu = f \\ (\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=t_0} = v_j \quad 0 \leq j \leq m-k-1 \end{cases}$$

(証明). 存在については既に [1][2] で証明した。問題は一意性であるが、次の順序で証明される。念のため、存在も含め、補題を連らねてゆく事にする。

補題 (2.1.2). 定理 (2.1.1) の Cauchy 問題は、常に解をもつ。

(証明) [1][2] 参照。基本的には、§1 での Fuchs 型に対する正則解の存在と、Boney-Schapira [5] の論法を合わせればよい。Q.E.D.

補題 (2.1.3).

$I \subset \mathcal{A}S^*R^n$. 固有凸閉集合

$$\tilde{I} = \{ (t, x, F(\langle \tau dt + \langle \xi, dx \rangle)^\infty); (x, F(\langle \xi, dx \rangle^\infty)) \in I \}$$

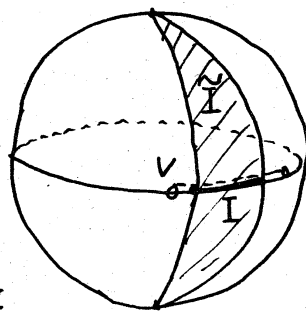
とおく。Cauchy 問題に関し、

$$S-S(f) \subset \tilde{I}, \quad S-S(v_j) \subset I$$

と仮定する。この時、 I の任意の近傍 V に

対し、 $S-S(u) \subset \tilde{V}$ とはる解が存在する。 (V に依存して u の定義域 (t, x) を十分小さく取ってゆく。)

(証明). Boney-Schapira [5] の論法で、超函数の定義函数の正則



域を延長してゆく時、 $t=0$ の近傍では x -空間の領域がほとんどもとの領域と同じ位迄延長できる事に注意すればよい。

Q.E.D.

補題 (2.1.4) 定理 (2.1.1) の解は一意的である。即ち $Pu=0$ 。

$u \in aB$ $(\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=0} = 0 \quad 0 \leq j \leq m-k-1$ ならば $u=0$ である。

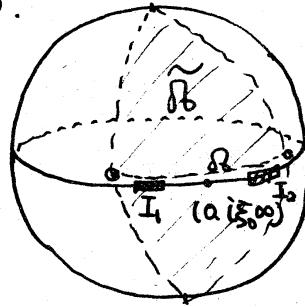
(証明)

任意の $(0, i\xi_0, \infty)$ を取り、 $sp: B \rightarrow C(0, i\xi_0, \infty)$ $sp(u)=0$ を示せば u は実解析的だから Taylor 展開より $u=0$ を得る。 $sp(u)$ を示せばよい。 $(0, i\xi_0, \infty)$ の近傍 $\Omega \subset \sqrt{-1}S^*R^n$ をとる。

u を $(0, i\xi_0, \infty)$ の近傍で cut off する事により、適当な $w \in aB$, $S-S(w) \subset \widehat{\Omega}$

$$sp(w) = sp(u)$$

とできる。 ($\widehat{\Omega}$ は補題 (2.1.3) の記号)



$sp(w)=sp(u)$ より、 $sp.P(w-u)=0$ 。従って、適当な固有凸閉集合 I_ν と超函数 $w_\nu \in aB$ をとって 次を満す様にできる。

$$(i) \quad \bigcup \widetilde{I}_\nu \ni (0, i\xi_0, \infty) \quad B \text{ 上 } \forall_{\nu,j} v_{\nu,j} \in 'B \quad (0 \leq j \leq m-k-1)$$

$$(ii) \quad S-S(w_\nu) \subset \widetilde{I}_\nu \quad S-S(v_{\nu,j}) \subset I_\nu$$

$$(iii) \quad P(w-u) = \sum_\nu w_\nu, \quad (\frac{\partial}{\partial t})^j (w-u)|_{t=0} = \sum_\nu v_{\nu,j} \quad 0 \leq j \leq m-k-1.$$

補題 (2.1.3) より次の Cauchy 問題は解をもつ。

$$\begin{cases} Pu_\nu = w_\nu, & u_\nu \in aB, \quad S-S(u_\nu) \subset \widetilde{I}_\nu \\ (\frac{\partial}{\partial t})^j u_\nu|_{t=0} = v_{\nu,j} & 0 \leq j \leq m-k-1. \end{cases}$$

$\tilde{u} = w - \sum_{\nu} u_{\nu}$ とおく. $\tilde{u}$ は次の条件を満たす.

① $\tilde{u} \in aB$

② $P\tilde{u} = Pw - \sum P u_{\nu} = Pw - \sum w_{\nu} = Pu = 0.$

③ $sp(\tilde{u}) = sp(w) = sp(u)$

④ $(\frac{\partial}{\partial t})^j \tilde{u}|_{t=0} = (\frac{\partial}{\partial t})^j w|_{t=0} - \sum v_{\nu j} = (\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=0} = 0.$

この時 $\tilde{u} = 0$ を示す. すると③より $sp(u) = 0$ を得て証明は完了する. $\tilde{u} = 0$ の証明. $S-S(\tilde{u}) \subset \tilde{Q}$ 故 $\tilde{u}$ は u とつ方向からの正則函数の境界値で表わされる. $\tilde{u} = [\varphi(t, z)]$ とする.

この時 ②④より ② $P\varphi = 0$ ($\varphi \in \mathcal{O}(\Gamma)$
 Γ は cone)

④ $(\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi|_{t=0} = 0 \quad 0 \leq j \leq m-k-1.$

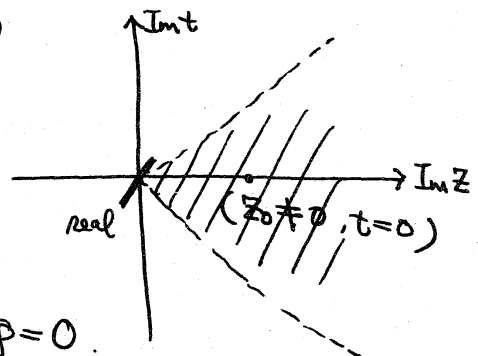
を得る. $\varphi(t, z)$ の定義域は右図の

斜線部とみなしてよい.

上の ②④ を $t=0, z_0 \neq 0 \in$  で考えると z についての Taylor

展開より $(t, z) = (0, z_0)$ の近傍で $\varphi = 0$.

一意接線より $\varphi = 0$ が全体の斜線部でいえる. 故に $\tilde{u} = 0$ を得る. Q.E.D.



注意 (2.1.5) 補題 (2.1.3) は $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 2変数の時は自明である. 従って, 補題 (2.1.4) の証明法より Cauchy 問題の解の一意性は 2変数の時は Fuchs 型 に対し成り立つ.

注意 (2.1.6) [1] [2] で論じた Fuchs 双曲系の Cauchy 問題についても、解の存在と一意性が成り立つ。(詳しくは [1] [2] を参照。Fuchs 系の Cauchy-Kowalevsky の定理と上の議論より得られる)。

$P_a : aB \rightarrow aB$ の構造にもどろう。定理 (2.1.1) より

$$(i) \operatorname{Coker} P_a = 0$$

$$(ii) \operatorname{Ker} P_a \cong {}^1B^{m-k}.$$

を得る。(ii) の対応は具体的には、Cauchy 問題の基本解 $E_j(t, x, y)$ ($0 \leq j \leq m-k-1$) を使うと

$$\begin{cases} u(t, x) = \sum_j \int E_j(t, x, y) v_j(y) dy \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t, x) \Big|_{t=0} = v_j(x) \quad 0 \leq j \leq m-k-1 \end{cases}$$

によって対応づけられる。

ここで、Cauchy 問題の基本解 $\{E_j(t, x, y)\}_{0 \leq j \leq m-k-1}$ とは次をいう

$$\begin{cases} P E_j = 0, \quad S-S(E_j) \neq (0, \pm \sqrt{t} dt, \infty) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^l E_j \Big|_{t=0} = \delta_{j,l} \delta(x-y) \quad 0 \leq j, l \leq m-k-1 \end{cases}$$

この様な E_j は一意的に存在し、その特異スペクトルは

$$S-S(E_j) \subset \{ (t, x, y; \sqrt{t}(\tau dt + \xi dx + \eta dy)) \in \infty; \ x=y, \\ |\tau| \leq M |\xi|, \ |\xi + \eta| \leq M |\xi|^{1/2} |\eta| \}$$

(具体的な構成は、[1] [2] を参照されたい。)

§2.2. $P_c : C_{(0, \pm i\infty)} \rightarrow C_{(0, \pm i\infty)}$ の構造.

$(0, \pm i\infty)$ で方程式系 $\mathcal{M} = \mathcal{P}^\dagger / \mathcal{P}^\dagger \cdot \mathcal{P}$ (又は $\mathcal{P} / \mathcal{P} \cdot \mathcal{P}$) を考える. $\mathcal{M}$ の台は $\{t=0\}$ 故 maximally degenerate である. そこで max. deg. 台をもつ方程式系の標準形を求める事を考える. 簡単は場合は既に 柏原-大島 [7] で求められている. 次の通りである.

定理 (2.2.1) $A(t \times D_t D_x)$ を $(0, \pm i\infty)$ での 0 階の $\mathfrak{A}D \cdot \mathcal{Q}_p$ を成分とした行列とする. この時 可逆な $\mathfrak{A}D \cdot \mathcal{Q}_p$ の行列 $U(t \times D_t D_x), V(x, D_t D_x)$ (各成分は高々 0 階) が存在して 次が成り立つ.

$$U(t \times D_t D_x) (t D_t - A(t \times D_t D_x)) V(x, D_t D_x) = t D_t - B(x, D_x).$$

残念ながら. この定理は. 我々の Fuchs 双曲型を cover しない. $\mathcal{M}$ の標準形を求める為には. 無限階の $\mathfrak{A}D \cdot \mathcal{Q}_p$ を使う必要があるだろう. 我々の得た標準形は次の通りである.

$$A(t \times D_t D_x) = (A_{ij}(t \times D_t D_x))_{1 \leq i, j \leq m}.$$

(1) $A_{ij}(t \times D_t D_x)$ は $(0, \pm i\infty)$ での $\mathfrak{A}D \cdot \mathcal{Q}_p$. $\text{ord } A_{ij} = n_{ij}$ とおく.

(2) A の matrix order $\rho_A < 1$

$$\text{但し. } \rho_A = \max_{\substack{S \\ i_1, \dots, i_S}} \frac{1}{S} \text{ord } \Gamma_{\{i_1, \dots, i_S\}}. \quad \Gamma_{\{i_1, \dots, i_S\}} = \begin{bmatrix} n_{i_1 i_1} & \dots & n_{i_1 i_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i_S i_1} & \dots & n_{i_S i_S} \end{bmatrix}$$

$$\text{ord } \Gamma_{\{i_1, \dots, i_S\}} = \max_{\substack{\pi \\ (\text{置換})}} \sum n_{i_k i_{\pi(k)}} \quad \text{と定義する.}$$

- (3) $A(t \times D_t D_x)$ は D_t に関して高々 0 階. (従って $A(t \times D_t D_x) = \sum_{\alpha, \beta} t^\alpha A_{\alpha\beta}(x D_x) D_t^\beta$ と展開できる)
- (4) $A_{00}(x D_x) = A^0(x)$. 函数行列である.
- (5) $A^0(0)$ の固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ について $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$.

定理 (2.2.2) $A(t \times D_t D_x)$ が上の (1)~(5) を満たすとする. この時, 無限階の可逆写 $D, \mathcal{O}_p$ $U(t \times D_t D_x) \in GL(m, \mathcal{P}_{(0, dt^0)})$ が存在し

$$U^{-1}(t D_t - A(t \times D_t D_x)) U = t D_t - A^0(x)$$

が成り立つ.

(証明はかなり長くなるので §3 で実行する).

系 (2.2.3) $A(t \times D_t D_x)$ の各成分が高々 0 階 & $\sigma_0(A)(0, 0, 1, 0)$ の固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ について $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ とする. この時適当な $U(t \times D_t D_x) \in GL(m, \mathcal{P}^f)$ (各成分は 0 階) が存在し.

$$U^{-1}(t D_t - A(t \times D_t D_x)) U = t D_t - A(0, x, 1, 0)$$

(証明). A の各成分が 0 階ならば (1)~(4) は自動的に満たしている. 故に明らか. (なお, 系 (2.2.3) は $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ を除けば定理 (2.2.1) と同じ内容). Q.E.D.

系 (2.2.4) m 階の微分作用素 $P(t \times D_t D_x)$ が

$$P(t \times D_t D_x) = Q(t, x, t D_t, t D_x) + t R(t, x, t D_t, D_x)$$

$$(1) \text{ord } Q > \text{ord } R$$

(2) $Q(0, x, y, 0)$ の y^m の係数 $\neq 0$ で, $Q(0, x, y, 0) = 0$ の根を $\lambda_1(\omega)$

$\dots, \lambda_m(\omega)$ とする時 $\lambda_i(\omega), \lambda_i(\omega) - \lambda_j(\omega) \in \mathbb{Z}$ と仮定.

この時, 次の同型が $(0, \text{dt}\infty)$ で成り立つ.

$$P/P_P \cong \bigoplus_{j=1}^m P/P(tD_t - \lambda_j(\omega)) \quad (\text{as 左 } P\text{-加群})$$

(証明).

既に [12] で類似の標準形を幾度となく導いた. 同じ方法による. なお 柏原-大島 [1] も参照されたい. Q.E.D.

系 (2.2.4) の形より, 従来 $P = Q(t, x, tD_t, tD_x)$ なる形の確定特異点型に対してのみ論じられていた境界値問題は, $P = Q + R$ の形に這一般化される. (弱い意味の確定特異点型の境界値問題). $P = Q(t, x, tD_t, tD_x)$ の場合は, *system* の場合も含め, 柏原-大島 [1] で詳述されている. 弱い場合への拡張は, いつか機会があれば, まとめる事にし, 今は論じない.

系 (2.2.5). P が weight $(m-k)$ の Fuchs 型で, $\sigma_m(p) = t^k p_m$, & 特性根に関し, $\lambda_i(\omega), \lambda_i(\omega) - \lambda_j(\omega) \in \mathbb{Z}$ とする. (双曲型の条件は不必要). この時 $(0, \text{dt}\infty)$ で次の同型が成り立つ.

$$P/P_P \cong \bigoplus_{j=1}^k P/P(tD_t - \lambda_j(\omega)) \quad (\text{as 左 } P\text{-加群})$$

(証明). (2.2.4) と同じこと.

Q.E.D.

さて $P_c: C_{(0, \pm Fdt\infty)} \rightarrow C_{(0, \pm Fdt\infty)}$ の構造にもどろう.

(2.2.5) より $(0, \pm Fdt\infty)$ では $(tD_t - \lambda_j(\alpha))u = 0$ と同値である.

$P/P(tD_t - \lambda_j(\alpha))$ の $C_{(0, \pm Fdt\infty)}$ での構造は次の通りである.

定理 (2.2.6) $tD_t - \lambda(\alpha): C_{(0, \pm Fdt\infty)} \rightarrow C_{(0, \pm Fdt\infty)}$ に関し.

(i) $\text{Coker } P = 0$

(ii) $\text{Ker } P \cong {}^1B$. ($Pu=0$ なる u は $u=(t+i0)^{\lambda(\alpha)}\varphi(\alpha)$ と表さる).

(証明) (i) は自明. $D_t^{\lambda(\alpha)} \in \mathcal{P}_R$ (佐藤-河合-柏原 [8] を参

照. $\mathcal{P}_R \equiv C_R \otimes \mathcal{U}_X$ で $\mathcal{P}_R \times C \rightarrow C$ 作用環と見る. 又 $P \subset \mathcal{P}_R$).

$$D_t^{\lambda(\alpha)} (tD_t - \lambda(\alpha)) D_t^{-\lambda(\alpha)-1} = t$$

と変形できる. 故に $t: C_{(0, Fdt\infty)} \rightarrow C_{(0, Fdt\infty)} \rightarrow 0$ を示せばよい.

$\forall \mu \in C_{(0, Fdt\infty)}$ に対し $\exists u \in B$. $\text{sp}(u) = \mu$. u の特異スペクトル $C_{(0, Fdt\infty)}$ の近傍とできる. 定義函数 $\varphi(t, z)$ の境界値 $= u$ とする. この時 $\frac{1}{t}\varphi(t, z)$ も超函数を定義する. ($= w$)

明らかに $t \cdot \text{sp}(w) = \mu$ となる.

(Q.E.D.)

以上により. $P_c: C_{(0, \pm Fdt\infty)} \oplus C_{(0, -Fdt\infty)} \rightarrow C_{(0, +Fdt\infty)} \oplus C_{(0, \pm Fdt\infty)}$

の構造は (i) $\text{Coker } P_c = 0$

(ii) $\text{Ker } P_c \cong {}^1B^{2k}$.

を得る.

§§2.3. $P: B \rightarrow B$ の構造.

P8の図式と §§2.1, 2.2 の議論より. 次は明らかである.

$$(i) \operatorname{Coker} P = 0$$

$$(ii)' \quad 0 \rightarrow aB^P \rightarrow B^P \xrightarrow{sp_{\pm}} C_{(0, \mp \operatorname{Fid} t_{\infty})}^P \oplus C_{(0, \mp \operatorname{Fid} t_{\infty})}^P \rightarrow 0.$$

$$aB^P \cong B^{m-k}, \quad C_{(0, \pm \operatorname{Fid} t_{\infty})}^P \cong B^{2k}.$$

まず (ii)' の完全列が分解している事を示そう. 系 (2.2.5) の同型は, $P/P.P = P.u$, $P/P(tD_t - \lambda_j^{(\alpha)}) = P.v_j$ (u, v_j は生成元) とおく時, 適当な巫 $D \in \mathcal{O}_p$, $A_j(t \times D_t D_k)$ ($1 \leq j \leq k$) によって,

$$v_j = A_j(t \times D_t D_k) u$$

なる関係式で与えられる. (ii)' の完全列と $v_j = A_j \cdot u$ より,

次を満たす超函数 $F_j^{(\pm i_0)}(t \times y)$ ($1 \leq j \leq k$) が存在する.

$$(i) \quad P \cdot F_j^{(\pm i_0)} = 0$$

$$(ii) \quad A_j(t \times D_t D_k) sp_{\pm} F_j^{(\pm i_0)}(t \times y) = (t \pm i_0) \lambda_j^{(\alpha)} \delta_{\alpha-\gamma} \cdot \delta_{j,l}$$

(この $F_j^{(\pm i_0)}$ は module aB^P で決まる超函数).

補題 (2.3.1) $\lambda: C_+^P \oplus C_-^P \rightarrow aB^P$ を次の順序で定義する.

$$\begin{aligned} C_+^P \oplus C_-^P \ni u_+ \oplus u_- &\xrightarrow{\lambda_1} (A_j u_+) \oplus (A_j u_-) = (t \pm i_0) \lambda_j^{(\alpha)} \phi_j^{\pm}(\omega) \\ &\xrightarrow{\lambda_2} u = \sum_{\pm j} \int F_j^{(\pm i_0)}(t \times y) \phi_j^{\pm}(y) dy \in aB^P. \end{aligned}$$

この時, $sp_{\pm} \cdot \lambda = id$ である.

(証明) λ_1 は単射 (同型) なる事に注意しよう.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \circ \text{sp}_\pm \circ \lambda (u_+ \oplus u_-) \\
&= \lambda_1 \left(\text{sp}_+ \left(\sum_{\ell} \int F_\ell^{(\pm i\omega)}(tx, y) \varphi_\ell^\pm(y) dy \right) \oplus \text{sp}_- \left(\sum_{\ell} \int F_\ell^{(\mp i\omega)}(tx, y) \varphi_\ell^\mp(y) dy \right) \right) \\
&= \left\{ A_j \left(\text{sp}_+ \left(\sum_{\ell} \int F_\ell^{(\pm i\omega)} \varphi_\ell^\pm dy \right) \right) \right\} \oplus \left\{ A_j \left(\text{sp}_- \left(\sum_{\ell} \int F_\ell^{(\mp i\omega)} \varphi_\ell^\mp dy \right) \right) \right\} \\
&= \left\{ A_j \text{sp}_+ \int F_j^{(\pm i\omega)} \varphi_j^\pm dy \right\} \oplus \left\{ A_j \text{sp}_- \int F_j^{(\mp i\omega)} \varphi_j^\mp dy \right\} \\
&= \left(\int (t+i\omega) \lambda_j^{(\omega)} \delta(x-y) \varphi_j^\pm(y) dy \right) \oplus \left(\int (t-i\omega) \lambda_j^{(\omega)} \delta(x-y) \varphi_j^\mp(y) dy \right) \\
&= \left((t+i\omega) \lambda_j^{(\omega)} \varphi_j^\pm(x) \right) \oplus \left((t-i\omega) \lambda_j^{(\omega)} \varphi_j^\mp(x) \right) \\
&= \lambda_1 (u_+ \oplus u_-)
\end{aligned}$$

λ_1 は単射. 故 $\text{sp}_\pm \circ \lambda (u_+ \oplus u_-) = u_+ \oplus u_-$ 故 $\text{sp}_\pm \circ \lambda = \text{id}$ Q.E.D.

写像 λ により, (II)' は分解している. 更に, (2.3.1) の証明より結局, 次の形にまとめられる.

$$(II) \quad \text{Ker } P \cong \mathcal{B}^{m+k}.$$

具体的には, 上の $F_j^{(\pm i\omega)}(tx, y)$ と §2.1 の Cauchy 問題の基本解 $E_j(tx, y)$ を使うと

$$u(tx) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \int E_i(tx, y) \varphi_i(y) dy + \sum_{\pm, j=1}^k \int F_j^{(\pm i\omega)}(tx, y) \psi_j^\pm(y) dy.$$

によって, 任意関数 $\varphi_i, \psi_j^\pm$ と対応している.

定理 (2.3.2) P を Fuchs 双曲型. (wh. (m-k)). 特性根 $\lambda_j(\omega)$ について $\lambda_i(\omega), \lambda_j(\omega) - \lambda_i(\omega) \in \mathbb{Z}$ ($\forall j, 1 \leq i, j \leq k$) と仮定する. この時 $Pu = 0$ なる超函数解は次の形に一意的に表わされる.

$$u(tx) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \int E_i(tx, y) \varphi_i(y) dy + \sum_{\pm, j=1}^k \int F_j^{(\pm i\omega)}(tx, y) \psi_j^\pm(y) dy.$$

$\varphi_i(x) \psi_j^\pm(x)$ は任意超函数.

(証明). 明らか.

Q.E.D.

注意(2.3.3) $E_i(t \times \gamma)$, $F_j^{(\pm i_0)}(t \times \gamma)$ が $\mathfrak{so}(\Pi)$ の拡張なる基本解である. 特性根との対応は

$$E_i(t \times \gamma) \longleftrightarrow \lambda = i \quad (0 \leq i \text{ は正整数}) \quad (\text{特異点なし})$$

$$F_j^{(\pm i_0)}(t \times \gamma) \longleftrightarrow \lambda = \lambda_j \quad (\text{非整数}) \quad (\text{特異点ある})$$

基本解のうち $\{E_i(t \times \gamma)\}$ は一意的に決まるが, $\{F_j^{(\pm i_0)}(t \times \gamma)\}$ の選び方には, αB^P だけの任意性がある. $\lambda = \lambda_j(x)$ に対応する基本解も一意的に決定することを考えよう.

補題(2.3.4) 次の条件を満す超函数 $F_j^\pm(t \times \gamma)$ ($1 \leq j \leq k$) が存在し, かつ一意的である.

$$(i) \quad P F_j^\pm = 0$$

$$(ii) \quad A_\ell \operatorname{sp}_\pm F_j^\pm = t_\pm^{\lambda_j(x)} \delta_\ell \delta(x - \gamma) \quad 1 \leq j, \ell \leq k$$

$$(iii) \quad \operatorname{Supp} F_j^\pm \subset \{\pm t \geq 0\} \quad (\text{複号同順})$$

(証明).

$(0, dt\infty)$ で $Pu \cong \bigoplus_{j=1}^k P v_j$ 関係式は $v_j = A_j u$ で与えられる.

この関係式を逆にみると, 適当な $K_j(t \times D_k D_k) \in \mathcal{P}$ があって

$$u = \sum_{j=1}^k K_j v_j$$

従って $w_j^\pm = K_j \cdot t_\pm^{\lambda_j(\omega)} \delta(x-y)$ とおけば、次を満たす。

(i) $w_j^\pm$ は $(0, \pm F \text{Id} \times \infty)$ での microfunction

(ii) $A_\ell w_j^\pm = \delta_{j\ell} t_\pm^{\lambda_j(\omega)} \delta(x-y) \quad 1 \leq j, \ell \leq k$

この時実は $w_j^\pm$ は microfunction のみならず、超函数として、意味付けできることを示そう。

$K_j t_\pm^{\lambda_j(\omega)} \delta(x-y)$ の内、 $t_\pm^{\lambda_j(\omega)} \delta(x-y)$ は超函数である。 K_j は、 D_t の負巾以外は全て微分作用素だから普通の微分で作用させる。 D_t^{-m} ($m > 0$) は、次の様に形式的に作用させる。

$$D_t^{-m}(t_\pm^{\lambda(\omega)}) = \frac{1}{(\lambda(\omega)+1)(\lambda(\omega)+2)\cdots(\lambda(\omega)+m)} t_\pm^{\lambda(\omega)+m}$$

この時、上の作用は、重 $D_t \mathcal{O}_P$ の積と、互換である。即ち 2 つの重 $D_t \mathcal{O}_P$ P, Q に対し $(P \circ Q)(t_\pm^{\lambda(\omega)}) = P(Q(t_\pm^{\lambda(\omega)}))$ が成り立つ。(互換性の証明は、あとまわし)。

ここで、次の Radon 変換の公式を思い出そう。

$$\delta(x-y) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int \frac{\omega(\xi)}{(\langle x-y, \xi \rangle + i0)^n} \quad \omega(\xi) \text{ は単位球の面積要素}$$

上で決めた作用により、次の形式和を考える。

$$\tilde{F}_j^\pm(t \times y, \xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} K_j(t \times D_t D_x) t_\pm^{\lambda_j(\omega)} \frac{1}{(\langle x-y, \xi \rangle)^n}$$

とおく。

形式的な作用と重 $D_t \mathcal{O}_P$ の互換性より、次を満たす。

$$(a) \quad P(t \times D_t D_x) \tilde{F}_j^\pm(t \times y, \xi) = 0$$

$$(b) \quad A_\ell \tilde{F}_j^\pm(t \times y, \xi) = \delta_{j\ell} \cdot \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} t_\pm^{\lambda_j(\omega)} \frac{1}{(\langle x-y, \xi \rangle)^n}$$

P の双曲型の仮定より, 田原 [1][2], 柏原-河合 [6] の基本解の構成法と殆んど同様にして, $\tilde{F}_j^\pm(t \times \gamma; \xi)$ は, $\text{Im}(x - \gamma; \xi) > 0$ 方向からの境界値として超函数を定義する. それを $\hat{F}^\pm(t \times \gamma; \xi, +i0)$ と書く.

$$\cancel{F}_j^\pm(t \times \gamma) = \int \tilde{F}_j^\pm(t \times \gamma; \xi, +i0) \omega(\xi)$$

とおく. 上の (a)(b) と Radon 変換の公式より

$$(i) \quad P \cdot F_j^\pm = 0$$

$$(ii) \quad A_\ell \text{sp}_\pm F_j^\pm = \delta_{j\ell} t^{\lambda_j(\omega)} \delta(x - \gamma)$$

$$(iii) \quad S-S(F_j^\pm) \subset \{\pm t \geq 0\}$$

を満たす事は明らかである. 一意性は Holmgren-柏原-河合の定理を使えばよい. Q.E.D.

証明中で決めた作用と $\text{Sp}(\mathbb{R})$ の積との互換性を示しておこう. 問題は変数 t に関するのみだから, $P = P(t, D_t)$, $Q = Q(t, D_t)$ として, $(P \circ Q)(t^\lambda) = P(Q(t^\lambda))$ を示せばよい.

各項ずつ考えて, 結局, $P = D_t^\ell$, $Q = t^m D_t^n$ で確かめれば良い.

(i) $\ell \geq 0, n \geq 0$ ならば微分だから明らか.

(ii) $\ell \geq 0, n < 0$ の時, $(n \rightarrow -n$ とおく.)

$$D_t^\ell (t^m D_t^{-n} (t^\lambda)) = \frac{(\lambda+n+m) \cdots (\lambda+n+m-\ell+1)}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)} t^{\lambda+m+n-\ell}$$

一方,

$$D_t^\ell (t^m D_t^{-n}) = \sum_{0 \leq \alpha \leq m, \ell} \frac{1}{\alpha!} \frac{\ell!}{(\ell-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\alpha)!} t^{m-\alpha} D_t^{-n+\ell-\alpha}$$

簡単の爲 $l \leq n$ と仮定する. $D_t^{n+l-\alpha}$ は真巾のみと見る故

$$\begin{aligned} (D_t^l t^m D_t^n)(t^\lambda) &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{l!}{(l-\alpha)!} \frac{m!}{(m-\alpha)!} \frac{1}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n-l+\alpha)} t^{\lambda+m+n-l} \\ &= \sum_{\alpha} \binom{l}{\alpha} \frac{m!}{(m-\alpha)!} \frac{(\lambda+n-l+\alpha+1) \cdots (\lambda+n)}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)} t^{\lambda+m+n-l} \end{aligned}$$

結局 次の関係を示せば良い. ($x = \lambda+n$ とおく.)

$$(x+m) \cdots (x+m-l+1) = \sum_{\alpha} \binom{l}{\alpha} \frac{m!}{(m-\alpha)!} x(x-1) \cdots (x-l+\alpha+1)$$

l に関する帰納法を使えば 容易に証明できる. (略). 故に

この場合も $D_t^l (t^m D_t^n)(t^\lambda) = (D_t^l t^m D_t^n)(t^\lambda)$ を満たす.

(i) 他の場合も (ii) と同様に丁寧に計算すれば 互換性は示されるので略する. Q.E.D.

(2.3.4) の $\{F_j^\pm(t \times \gamma)\}_{1 \leq j \leq k}$ が $\lambda = \lambda_j(\alpha)$ に対応する基本解である. 実際 次の様にして 証明できる. [1] [2] で 次の完全列を示した.

$$0 \rightarrow B^P \xrightarrow{\lambda} B^P_+(t) \oplus B^P_-(t) \xrightarrow{\mu} B^{m-k} \rightarrow 0.$$

但し $B^P_\pm(t) = \{\pm t > 0 \text{ での } Pu = 0 \text{ の超函数解}\}$.

写像 μ は次で与えられる. $u_+ \oplus u_- \in B^P_+(t) \oplus B^P_-(t)$ に対し $\tilde{u}_\pm$ を

$$\begin{cases} \pm t > 0 \text{ では } \tilde{u}_\pm = u_\pm \\ \pm t < 0 \text{ では } \tilde{u}_\pm = 0 \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

なる様にとる. $P\tilde{u}_\pm = \varphi_0^\pm(\omega) \delta(t) + \cdots + \varphi_{m-k-1}^\pm(\omega) \delta^{(m-k-1)}(t)$.

この $\{\varphi_j^\pm\}$ は $\tilde{u}_\pm$ の取り方によらない. そこで 次の様に決

める. $\mu(u_+ \oplus u_-) = (\varphi_j^+ - \varphi_j^-)_{0 \leq j \leq m-k-1} \in B^{m-k}$

補題 (2.3.5) 上の完全列は分解している.

(証明) $u_+ = \gamma(t) \left(\sum \int E_i(t, x, y) v_i(y) dy \right) \in B^P(t)$ とおく.

$Pu_+ = \sum_{i=0}^{m-k-1} \varphi_i(x) \delta^{(i)}(t)$ とする. 計算より, 適当な可逆行列 $A(x, D_x)$ をとると $A\{v_j\} = \{\varphi_j\}$. $\gamma_+ : B^{m-k} \rightarrow B^P(t)$ を $\{\varphi_j\} \xrightarrow{A^{-1}} \{v_j\} \rightarrow \gamma(t) \left(\sum \int E_i v_i dy \right)$ と定めると $\mu \circ \gamma_+ = \text{id}$ は明らか. Q.E.D.

補題 (2.3.6) $t > 0$ での $Pu = 0$ の超函数解は, 次の形に一意的に書ける.

$$u(t, x) = \gamma(t) \sum_{i=0}^{m-k-1} \int E_i(t, x, y) v_i(y) dy + \sum_{j=1}^k \int F_j^+(t, x, y) \varphi_j(y) dy$$

$v_i(x), \varphi_j(x)$ は任意超函数.

(証明). $u \in B^P(t)$ を $t < 0$ で 0 とする様に延長したものを $\tilde{u}$ とする. $P(\tilde{u} - \gamma_+ \circ \mu(u)) = 0$ 故に $(0, \infty)$ で考えると

$$A_j \text{sp}_+ (\tilde{u} - \gamma_+ \circ \mu(u)) = t_+^{\lambda_j(\omega)} \varphi_j(x)$$

今 $w = \tilde{u} - \gamma_+ \circ \mu(u) - \sum_{j=1}^k \int F_j^+(t, x, y) \varphi_j(y) dy$ とおくと w は

次を満たす. $\begin{cases} (i) & \text{supp } w \subset \{t \geq 0\} \\ (ii) & A_j \text{sp}_+(w) = 0 \quad (1 \leq j \leq k) \end{cases}$

故に $\text{sp}_+(w) = 0$ を得て, $w = 0$ とする.

一意性は明らか
であろう

Q.E.D.

前頁の完全列より 次の定理を得る.

定理(2.3.7) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型. 特性根 $\lambda_j(\alpha)$ について $\lambda_i(0), \lambda_i(0) - \lambda_j(0) \notin \mathbb{Z}$ とする. この時 $Pu=0$ の超函数解は, 次の形に一意的に表わされる.

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \int E_i(txy) v_i(y) dy + \sum_{\pm, j=1}^k \int F_j^{\pm}(txy) \varphi_j^{\pm}(y) dy.$$

ここで $\{E_i\}$ は Cauchy 問題の基本解. $\{F_j^{\pm}\}$ は 補題(2.3.4) で構成した基本解.

(証明) 明らか.

Q.E.D.

$F_j^{\pm}$ は $\lambda = \lambda_j(\alpha)$ に対応する基本解で, 補題(2.3.4)により, 一意的に特徴づけられた. §0.(II) での基本解の幾つかの取り方と対比されたい.

以上によって, 田原[2]の予想は, すべて解決されたわけである. 即ち $aB^P \cong B^{m-k}$, $B_{(\pm)}^P \cong B^m$, $C_{(b, \pm F d t \alpha)}^P \cong B^k$,
 $a \pm B^P \cong B^m$

である.

§3. 定理(2.2.2)の証明のスケッチ.

§2 で残しておいた定理(2.2.2)の証明を行なう. 紙枚の都合上, 追跡可能な限り, 計算部分は略して書く. 定理の条件をもう一度列挙しておこう.

- (1) $A(t \times D_t D_x) = (A_{ij}(t \times D_t D_x))_{1 \leq i, j \leq l}$ は $(0, dt\infty)$ での $\mathfrak{A}D_t \mathcal{O}_p$.
- (2) matrix-order $\rho_A < 1$ (ρ_A の定義は §2.2 参照).
- (3) A は D_t に関し高々 0 階. (展開して $A = \sum_{\alpha, \beta} t^\alpha A_{\alpha\beta}(x D_x) \bar{D}_t^\beta$).
- (4) $A_{00}(x D_x) = A^0(x)$ 函数行列
- (5) $A^0(x)$ の固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ について, $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$.

定理 (2.2.2) $A(t \times D_t D_x)$ が (1) ~ (5) を満足する時, 可逆行列

$U(t \times D_t D_x) \in GL(l, \mathcal{P}_{(0, dt\infty)})$ が存在して次が成立する.

$$U^{-1}(tD_t - A(t \times D_t D_x))U = tD_t - A^0(x).$$

証明は次の 3 段階を実行する.

- (a) 形式的に U を構成する. (U を核函数表示して構成).
- (b) 形式解 U が実際無限階の $\mathfrak{A}D_t \mathcal{O}_p$ の増大条件を満たす事を確かめる.
- (c) U が可逆であることの証明.

(2.2.2) の形よりも $(tD_t - A)U = U(tD_t - A^0(x))$ の方程式を考える.

§§3.1. 形式解の構成.

行列 U として D_t に関し高々 0 階のものを考える. 展開すると

$$U = \sum t^\alpha U_{\alpha\beta}(x D_x) \bar{D}_t^\beta \quad \text{と表わされる.}$$

ここで、積分核表示を考える。(佐藤-河合-柏原 [8] 参照)

$$\begin{cases} U_{\alpha\beta}(xD_k) = U_{\alpha\beta}(x, y) dy, \\ D_t^{-\beta} = \delta^{(-\beta)}(t-s) ds \end{cases}$$

より、行列 U は、次の様に表示してもよい。

$$U = \sum t^\alpha U_{\alpha\beta}(x, y) dy \cdot D_t^{-\beta} = \sum t^\alpha U_{\alpha\beta}(x, y) \delta^{(-\beta)}(t-s) dy ds.$$

次の方程式が、一意的に解をもつ事を示してゆこう。

$$(E) \begin{cases} (tD_t - A(txD_t D_k)) U = U (tD_t - A^0(x)) \\ U_{00} = 1 \quad (= \delta(x-y) dy) \end{cases}$$

$A = \sum t^\alpha A_{\alpha\beta}(xD_k) D_t^{-\beta}$, $U = \sum t^\alpha U_{\alpha\beta}(x, y) dy \cdot D_t^{-\beta}$ とおいて代入する

と、 $t^\alpha D_t^{-\beta}$ 項の係数比較より次の漸化式を得る。

$$(\alpha+\beta) U_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta} A_{00} - A_{00} U_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{m+h-k=\alpha \\ i+j+h=\beta \\ 0 \leq h \leq m, (m,i) \neq (\alpha,\beta)}} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{(j+h-1)!}{(j-1)!} \frac{m!}{(m-\alpha)!} A_{kj} U_{mi}$$

田原 [1][2] の議論と同様、 ℓ^2 列ベクトル $R_{\alpha\beta}(x, y) dy$ を

$$R_{\alpha\beta}(x, y) = t (U_{\alpha\beta}^{(1,1)}, U_{\alpha\beta}^{(1,2)}, \dots, U_{\alpha\beta}^{(1,\ell)}, U_{\alpha\beta}^{(2,1)}, \dots, U_{\alpha\beta}^{(\ell,\ell)})$$

と置くと、上の漸化式は次の様に書き直す事ができる。

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta) R_{\alpha\beta} - A_{00}(x) \otimes I_\ell \cdot R_{\alpha\beta} + I_\ell \otimes {}^t A_{00}(y) \cdot R_{\alpha\beta} \\ = \sum_{\substack{m+h-k=\alpha \\ i+j+h=\beta \\ 0 \leq h \leq m, (m,i) \neq (\alpha,\beta)}} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{(j+h-1)!}{(j-1)!} \frac{m!}{(m-\alpha)!} A_{kj}(xD_k) \otimes I_\ell \cdot R_{\alpha m, i} \end{aligned}$$

$(\alpha, \beta) = (0, 0)$ の時 (E) $U_{00} = 1$ とおくと (E) を満たすので良い。

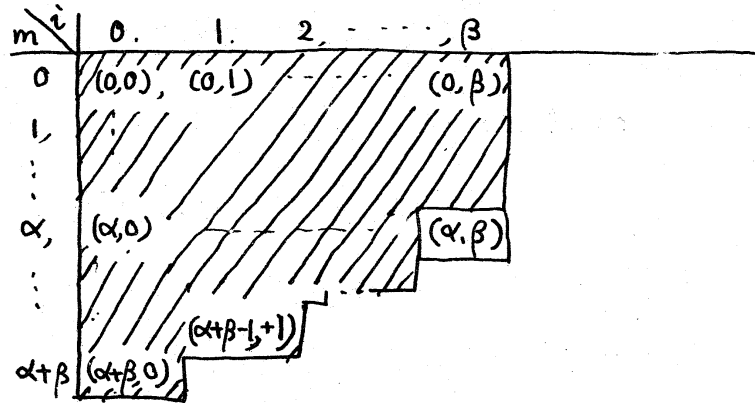
$\alpha+\beta \neq 0$ の時は $A^0(x) \otimes I_\ell - I_\ell \otimes {}^t A^0(y)$ の固有値が $\alpha_i - \alpha_j$ で (5)

の仮定より、 $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ に注意すると $(\alpha+\beta - A_{00}(x) \otimes I_\ell + I_\ell \otimes {}^t A(y))$

は原点の近傍で可逆行列である。故に、次の様に書ける。

$$R_{\alpha\beta} = \sum_{j,k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(j+k-1)!}{(j-1)!} \frac{m!}{(m-\alpha)!} (\alpha+\beta - A^0 \omega \otimes I_\ell + I_\ell \otimes {}^t A(\eta))^{-1} A_{kj} R_{mi}$$

ここで $\sum$ に表われる (m, i) は、次の斜線部となる。



故に方程式 (E) の解 $U_\eta = \sum t^\alpha U_{\alpha\beta}(x, y) dy D_t^\beta$ は形式的に一意的に存在する事がわかった。

§§ 3.2. 形式解の増大度の評価.

本節の評価は、田原 [1] [2] の Fuchs 系の Cauchy-Kowalevsky の定理を導く時の評価の方法と、佐藤-河合-柏原 [8] の Partial DeRham を導く評価法とを組み合わせで得られる。

$$\tilde{A} = A(t \times D_t D_x) \otimes I_\ell - I_\ell \otimes {}^t A(\eta)$$

とおく、展開して $\tilde{A} = \sum t^\alpha \tilde{A}_{\alpha\beta}(x, y D_x) \cdot D_t^\beta$ とおくと漸化式は、次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \sum_{j,k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(j+k-1)!}{(j-1)!} \frac{m!}{(m-\alpha)!} (\alpha+\beta - \tilde{A}_{00})^{-1} \tilde{A}_{kj} R_{m,i} \\ &= \sum_{\substack{i+j \leq \beta \\ k \leq \alpha \\ (i,j,k) \neq (\beta,0,0)}} A_{k,j}^{(i)}(\alpha, \beta) R_{\alpha+\beta-i-j-k, i} \end{aligned}$$

但し $A_{kj}^{(i)}(\alpha, \beta) = (-1)^{\beta-l-j} \frac{(\beta-l-j)!}{(\beta-l-j)!(j-l)!} \frac{(\alpha+\beta-l-j-k)!}{(\alpha-k)!} ((\alpha+\beta)-\tilde{A}_{00})^l \tilde{A}_{kj}$
 とおく.

補題 (3.2.1). $R_{\alpha\beta}$ は次の級数で表現できる.

$$\begin{cases} R_{00}(\alpha, \gamma) = t(R_{00}^{(i,j)}(\alpha, \gamma)), & R_{00}^{(i,j)} = \delta_{ij} \delta(\alpha - \gamma) \\ R_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = \sum_{\mathbb{G}} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p, \beta_p) R_{00} \end{cases}$$

但し $\mathbb{G}$ は次の様な和を考える. $(\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1)$

(i) $m_1 = \alpha + \beta$, $0 \leq k_1 \leq \alpha$, $0 \leq l_1 + j_1 \leq \beta$ ($(l_1, j_1, k_1) \neq (\beta, 0, 0)$) を取る.

もし $m_2 = m_1 - k_1 - j_1 = 0$ ならば、ここでストップ° ($p=1$). もし m_2

> 0 ならば $m_2 = m_1 - k_1 - j_1$, $\beta_2 = l_1$ とおいて

(ii) $m_2 = \alpha_2 + \beta_2$, $0 \leq k_2 \leq \alpha_2$, $0 \leq l_2 + j_2 \leq \beta_2$ ($(l_2, j_2, k_2) \neq (\beta_2, 0, 0)$) を

取る. もし $m_3 = m_2 - k_2 - j_2 = 0$ ならば、ここでストップ° ($p=2$).

もし $m_3 > 0$ ならば $\beta_3 = l_2$ とおいて

(iii) (i) (ii) と同様のプロセスを繰り返す. 以下同様.

上の補題より $R (= \cup)$ は次の和で表わされる.

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\alpha, \beta} t^\alpha \bar{D}_t^\beta \cdot \sum_{\mathbb{G}_{\alpha, \beta}} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1, \beta_1) \cdots A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p, \beta_p) \cdot R_{00}(\alpha, \gamma) d\gamma \\ &= \left[\sum_{\alpha, \beta} \sum_{\mathbb{G}_{\alpha, \beta}} t^\alpha \bar{D}_t^\beta A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1, \beta_1) \cdots A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p, \beta_p) \right] \delta(t-s) R_{00}(\alpha, \gamma) ds d\gamma \end{aligned}$$

従って R は $\mathcal{E}, D, Q_p$ の増大条件を満たす

$\Leftrightarrow R$ は holomorphic microfunction として意味をもつ

$\Leftrightarrow$ [] 内が $\mathbb{D}, \mathbb{Q}_p$ の増大条件を満たす.

従って結局, $\sum_{\alpha\beta} t^\alpha D_t^\beta \sum_{G_{\alpha\beta}} A_{k_{ij}}^{(i)}(\alpha, \beta) \cdots A_{r_{jp}}^{(p)}(\alpha, \beta)$ の評価に帰着された.

補題 (3.2.2) $\tilde{A} = A \otimes I_\ell - I_\ell \otimes {}^t A$ の matrix-order $\rho_{\tilde{A}}$ について

(1) $\rho_A \leq 1$ ならば $\rho_{\tilde{A}} \leq 1$.

(2) $\rho_A < 1$ ならば $\rho_{\tilde{A}} < 1$ を得る.

従って, $\tilde{A}$ も §3 の最初に述べた条件 (1) ~ (4) を満足していることに注意しよう. 以下, 使う条件は (1) ~ (4) のみだから $\tilde{A}$ も A と表やす. $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$. ($\ell = \text{matrix size}$)

補題 (3.2.3) (1) $\rho_A \leq 1$ の時, 適当な $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ が存在して, $\text{ord } A_{ij} \leq n_i - n_j + 1$ が成り立つ.

(2) $(\lambda - A^0 w)$ の (i, j) 余因子を $\Delta_{ij}(\lambda, x)$, $\deg_\lambda \Delta_{ij}(\lambda, x)$ を λ に関する次数とする時, $\ell - \deg_\lambda \Delta_{ij} \geq n_i - n_j + 1$.

(3) 今, 行列 G を $\begin{cases} g_{ij} = 1 & (\text{if } \ell - \deg_\lambda \Delta_{ij} = n_i - n_j + 1) \\ g_{ij} = 0 & (\text{if } \ell - \deg_\lambda \Delta_{ij} > n_i - n_j + 1) \end{cases}$

とおく. もし $\rho_A < 1$ ならば, G は巾零行列である.

$\rho_A \leq 1$ の時は上の (1) (2) を使って [1][2] で類似の無限和につ

いて、評価を実行している。 $\rho_A < 1$ の時 $G = 0$ がどう影響して来るか。しらべてみよう。次の評価は易しい。

$$A(txD_t D_x) = \sum t^\alpha A_{\alpha\beta}(xD_x) D_t^{-\beta}.$$

$$N_\ell^\omega(P;\lambda) = \sum_{k,\alpha,\beta} \frac{(2n)^k \cdot k!}{(k+\alpha)! (k+\beta)!} |D_t^\alpha D_x^\beta P_k(x\xi)| T^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

とおく。 Monvel-Kree [9] の形式的ノルムである。

補題 (3.2.4) $A_{\alpha\beta}(x, D_x)$ について、次が成り立つ

$$(1) \quad A_{\alpha\beta}(x, D_x) \text{ の } (i,j) \text{ 成分の order } \leq n_i - n_j + 1 + \beta,$$

$$(2) \quad N_{n_i - n_j + 1 + \beta}^{\beta}((i,j) \text{ 成分 of } A_{\alpha\beta}; \lambda) \leq N \cdot A^{\alpha+\beta}.$$

(Ω, λ, N, A は α, β, i, j に無関係な定数 or 定領域である.)

補題 (3.2.5) $(m - A^0 \omega)^{-1} A_{\alpha\beta}(x, D_x)$ は、次の様な分解をもつ。

$$(m - A^0 \omega)^{-1} A_{\alpha\beta}(x, D_x) = A_{\alpha\beta}^{(1)}(m) + A_{\alpha\beta}^{(2)}(m) + \cdots + A_{\alpha\beta}^{(p)}(m)$$

但し、次の条件をみたす。

$$(1) \quad A_{\alpha\beta}^{(i)}(m) \text{ の } (j,k) \text{ 成分の order } \leq n_j - n_k + i + \beta$$

$$(2) \quad N_{n_j - n_k + i + \beta}^{\beta}((j,k) \text{ of } A_{\alpha\beta}^{(i)}(m)) \leq \frac{N A^{\alpha+\beta}}{m^i} \quad (\text{if } N, A \text{ is a constant})$$

(3) もし $\rho_A < 1$ ならば、定数 ℓ が存在して、 $A_{\alpha\beta}^{(i)}(m)$ の積を ℓ 個とる毎に、order が 1 階下がる。つまり、

$$A_{\alpha_1 \beta_1}^{(i_1)}(m_1) \times \cdots \times A_{\alpha_\ell \beta_\ell}^{(i_\ell)}(m_\ell) \text{ の } (j,k) \text{ 成分の order} \\ \leq n_j - n_k + \sum_{k=1}^{\ell} (i_k + \beta_k) - 1.$$

補題(3.2.2)～(3.2.5)を、もとの問題に適用しよう。問題は、

$$\tilde{R} = \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\mathbb{C}_{\alpha, \beta}} t^{\alpha} D_t^{-\beta} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p, \beta_p)$$

$$A_{k, j}^{(i)}(\alpha, \beta) = (-1)^{\beta-i-j} \frac{(\beta-i-1)!}{(\beta-i-j)!(j+1)!} \frac{(\alpha+\beta-i-j-k)!}{(\alpha-k)!} (\alpha+\beta-\tilde{A}_{00})^{-1} \tilde{A}_{k, j}$$

とおく時、 $\tilde{R}$ の増大条件を評価することである。ここで、

$(\alpha+\beta-\tilde{A}_{00})^{-1} \tilde{A}_{k, j}$ に補題(3.2.5)を適用すると、

$$(\alpha+\beta-\tilde{A}_{00})^{-1} \tilde{A}_{k, j} = A_{k, j}^{(1)}(\alpha+\beta) + \cdots + A_{k, j}^{(p)}(\alpha+\beta)$$

と表わされ、各 $A_{k, j}^{(i)}(\alpha+\beta)$ は補題(3.2.5)の条件(1)(2)(3)を満足する。特に条件(3)に注意すると

$$N_{n_1-n_1+i_1+\cdots+i_l+j_1+\cdots+j_l-1} ((p, q) \text{成分 of } A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(m_1) \times \cdots \times A_{k_l j_l}^{(i_l)}(m_l) : \lambda)$$

$$\leq \frac{N A_{k_1+\cdots+k_l+j_1+\cdots+j_l}}{m_1^{i_1} m_2^{i_2} \times \cdots \times m_l^{i_l}}$$

を得る。これで大体 田原 [1][2] での Fuchs 系の評価の方法と同じルールの上に乗ったわけである。後は、[1][2]を充分よく参照しながら、和を取る順序をうまくとれば、次の最終的な評価を得る。ここで 上の注意の様に $\rho_A < 1$ の為、 $A_{k, j}^{(i)}(m)$ は l 個の積をひとつの単位として評価する。

(評価)

$$\tilde{R}(t \times \chi_{\lambda}^{\tau} \xi) = \sum_j \tilde{R}_j(t \times \chi_{\lambda}^{\tau} \xi). \quad (\tilde{R}_j \text{ は } \xi \text{ に関し } j \text{ 次斉次})$$

この時

$$|\tilde{R}_j| \leq \sum_{\substack{h \geq 1 \\ i \leq h - [\frac{h}{2\rho}]}} \frac{(h - [\frac{h}{2\rho}] - i)!}{h!} C^h \varepsilon^i$$

但し, $[]$ は Gauss 記号. C, ε は定数. 領域を小さくする事により C は幾らでも小さく出来る.

この評価より $|R_j|$ が無限階の $\mathcal{D}, \mathcal{Q}_p$ になる事を示すには, 佐藤-河合-柏原 [8] の Chapter II, §5 と同様に Störing の公式を使って評価すればよい. 結局, (E) の形式解は本当の解となる.

まとめると

$$(E) \begin{cases} (tD_t - A(t) \times D_t D_x) U = U (tD_t - A^0 \omega) \\ U_{00} = 1 \quad (D_t \text{ に関し } 0 \text{ 階}) \end{cases}$$

は, $U =$ 無限階 $\mathcal{D}, \mathcal{Q}_p$ として, 一意的に解をもつ.

§§3.3. 可逆性の証明.

§3 の最初の条件 (1) ~ (5) は, formal adjoint で閉じている. 故に A^* について同様に考える事により, 次の方程式 (E^*) も $V =$ 無限階 $\mathcal{D}, \mathcal{Q}_p$ として 一意的な解をもつ.

$$(E^*) \begin{cases} V (tD_t - A(t) \times D_t D_x) = (tD_t - A^0 \omega) V \\ V_{00} = 1 \quad (V \text{ は } D_t \text{ に関し } 0 \text{ 階}) \end{cases}$$

この時 $UV = VU = 1$ を示せばよい. $W = UV - 1$ とおくと W も D_t に関し 0 階故 $W = \sum_{\alpha, \beta} t^\alpha W_{\alpha\beta} \cdot D_t^\beta$ と展開され $W_{00} = 0$. (E) (E^{*}) より W は, 次を満たす.

$$(\hat{E}). \quad (tD_t - A)W = W(tD_t - A), \quad W_{00} = 0.$$

§§3-1 と同様に $\gamma_{\alpha\beta}$ の係数比較を行なうと漸化的に $W_{\alpha\beta} = 0$ を得る. 故に $UV=1$, $VU=1$ も同様である.

以上によって, 定理 (2.2.2) の証明は完了した. (紙数の都合上, 計算部分をかなり略したが, 基本的な方法はすべて [1][2] に表われているので, それを参考にされたい.)

参 考 文 献

- [1] 田原 Fuchs 双曲型方程式の研究 東京大学修士論文
- [2] 田原 Fuchs 双曲型方程式 数理研講究録 (研究集会 '超函数と線型微分方程式 IV' 報告集) 近刊
- [3] Baouendi-Goulaouic Cauchy Problems with characteristic initial hypersurface Comm. Pure. Appl. Math 26 1973.
- [4] 津野 On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equation III, equations of the Fuchsian type, to appear
- [5] Boney-Schapira Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy Springer Lecture Note No. 287 1973
- [6] 柏原-河合 On microhyperbolic pseudo-differential operators I. to appear

- [7] 柏原-大島 Boundary value problem for the system of differential equations with regular singularity : in preparation
- [8] 佐藤-河合-柏原 Microfunctions and pseudo-differential equations Springer Lecture Note No. 287
- [9] Monvel-Kree Pseudo-differential operators and Gevrey classes Ann. Inst. Fourier, 17-1 1967

その他, C^∞ , D' , L^2 等で同様なタイプの方程式に対し 解構造を明らかにしようという試み(?) に関しては, 上の [3] 以外に, 次が散見される.

- [10] Serge ALINHAC Problemes de Cauchy pour des operateurs singuliers Bull. Soc. math. France 102 1974.
(Bu. 5027 の reference 参照).