

60

1 階偏微分方程式の global holomorphic solution について

東京教育大 理 鈴木文夫

§ 0. X を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし, 1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u = f$$

の global holomorphic solution の存在の問題を考察する.
 X が正則領域, 或は Range domain という仮定だけでは,
一般に大域解が存在しないことは, 若林氏の反例により示さ
れた (Proc. Japan Acad. 44 (1968) 820-822).

ここでは問題を x_1 方向と $(x_2, \dots, x_n)$ 方向との 2 つの方
向に分けて考察することにより, X が正則領域のときに,
大域解の存在のための必要かつ十分な条件を求める. X の正
則包を $\tilde{X}$ とすれば, X で大域解が存在するためには, $\tilde{X}$ で大
域解が存在することが必要かつ十分であるから, X が正則領
域であると仮定することは強い制限ではない.

§ 1. 定義と主定理.

$\mathbb{C}^n$ の点を $x = (x_1, \dots, x_n)$ と表わす. X を $\mathbb{C}^n$ の開集合と

する. X の上の holomorphic function の層を $\mathcal{O}_X$ (或は簡単に $\mathcal{O}$), 開集合 U で定義された holomorphic function の空間を $\mathcal{O}(U)$ と書く.

$P = \partial/\partial x_1$ とし, $Pu = 0$ の local holomorphic solution の層を $\mathcal{O}^P$ とする. 方程式 $Pu = f$ は局所的には解を持つから,

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}^P \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

は exact である. X が正則領域のときは, $H^p(X, \mathcal{O}) = 0$, $p \geq 1$, であるから

$$(1.2) \quad \begin{aligned} P\mathcal{O}(X) &= \mathcal{O}(X) \Leftrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^P) = 0, \\ H^p(X, \mathcal{O}^P) &= 0, \quad p \geq 2. \end{aligned}$$

$x \in X$ に対して, $X \cap \{y \in \mathbb{C}^n \mid y_i = x_i, i=2, \dots, n\}$ の連結成分で x を含むものを L_x とする. 同値関係 " $L_x = L_y$ " ($x, y \in X$) に関する X の商空間を X/P , 写像 $x \mapsto L_x: X \rightarrow X/P$ を π と書くことにする. X/P には π が submersion となるような複素多様体の構造が存在する. このような構造は一意的に定まる. 但し X/P の位相は一般には Hausdorff ではない. さらに $\varphi: X/P \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ を $\varphi(L_x) = (x_2, \dots, x_n)$ と定義する. φ は local isomorphism で, $\varphi(\pi(x)) = (x_2, \dots, x_n)$, $x \in X$, である.

主定理 X は正則領域とする.

$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ となるための必要かつ十分な条件は

- a) すべての $\mathcal{L}_x$ は単連結である;
- b) X/P の位相は Hausdorff である;
- c) X/P は正則領域である.

§ 2. 必要性の証明.

先ず, $\mathcal{L}_x$ に関する条件として

Prop. 2.1 (若林) X は正則領域, Y は X の閉部分多様体, P は Y に接するとする.

$P\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$ ならば, $P\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ である.

Coro. X は正則領域とする. $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば, すべての $\mathcal{L}_x$ は単連結である.

さて, 写像 $\pi: X \rightarrow X/P$ と X 上の層 $\mathcal{O}^P$ に関する

Leray spectral sequence は

$$(2.1) \quad E_2^{p,q} = H^p(X/P, \mathcal{H}_\pi^q(\mathcal{O}^P)) \Rightarrow H^k(X, \mathcal{O}^P).$$

ここで $p < 0$ 或は $q < 0$ のとき $E_2^{p,q} = 0$ であるから, $E_2^{1,0} \subset H^1$ である. また

$$\mathcal{O}^P = \pi^{-1}\mathcal{O}_{X/P},$$

かつ π のファイバーは連結だから,

$$(2.2) \quad \mathcal{H}_\pi^0(\mathcal{O}^P) = \mathcal{O}_{X/P}.$$

従って, $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) \subset H^1(X, \mathcal{O}^P)$. (1.2) より

Prop. 2.2 X が正則領域のとき,

$P \otimes (X) = \mathcal{O}(X)$ ならば, $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$.

次に X/P の位相が Hausdorff であることを証明するために, 準備として

Lemma 2.3 Z は 1 次元複素多様体とする.

$H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ ならば, Z の位相は Hausdorff である.

(この Lemma は $\dim Z \geq 2$ のときは成り立たない.)

証明. U, V は Z の開集合, $U \cup V = Z$ とする.

$H^1(Z, \mathcal{O}) = 0$ ならば, Mayer-Vietoris の定理により,

$(f, g) \mapsto f - g : \mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U \cap V)$ は surjective である. Z の位相が Hausdorff でないと仮定して, 上の写像が surjective にならないような U, V を作ろう.

Z の点列 $\{z_j\}$ で異なる 2 点 a, b に収束するものが存在する. a を中心とする局所座標, U をその座標近傍とする.

$V = Z - \{a\}$ は開集合で, $b \in V$, $U \cap V = U - \{a\}$, $U \cup V = Z$ である. $h = 1/t$ は $\mathcal{O}(U \cap V)$ に属する.

$f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ が存在して, $U \cap V$ で $f - g = h$

とする. 十分大きい j について, $z_j \in U \cap V$ だから,

$f(z_j) \rightarrow f(a)$, $g(z_j) \rightarrow g(b)$. 従って, $h(z_j) = f(z_j) - g(z_j) \rightarrow f(a) - g(b)$.ところが $h(z_j) \rightarrow \infty$ であるから, 矛盾.

Prop. 2.4. X は正則領域とする.

$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば, X/P の位相は Hausdorff である.

証明. X/P の異なる 2 点 a, b は開近傍 U, V により分離されることを示す. $\mathcal{G}: X/P \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ は local isomorphism であるから, $\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(b)$ のときだけを考えればよい. $\mathcal{G}$ の U, V への制限が $\mathbb{C}^{n-1}$ の開球 B の上への isomorphism になるようにできる. $U \cap V$ に属する点 c が存在したと仮定しよう. $\mathcal{G}(c)$ と $\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(b)$ を結ぶ $\mathbb{C}^{n-1}$ の複素直線を T とする. $Z = \mathcal{G}^{-1}(T)$, $Y = \pi^{-1}(Z)$ とすれば, Y は X の閉部分多様体で, P は Y に接する. 従って, Prop. 2.1 により, $P\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ である. Y は正則領域, $Y/P = Z$ であるから, Prop. 2.2 により, $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$. $\dim Z = 1$ であるから, Lemma 2.3 により, Z の位相は Hausdorff である. 従って, $U \cap Z$ と $V \cap Z$ は共通点を持たない. 矛盾.

S を P に transversal な, X の $n-1$ 次元部分多様体とする. $U = \pi(S)$ は X/P の開集合で, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in S} L_x$ である. L_x がすべて単連結のとき, $f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ を S から出発して L_x に沿って積分して得られる関数を u とすれば, $u \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ かつ $Pu = f$ である. 従って, X/P の十分小さい開集合 U については, $\pi(S) = U$ となる S が存在

するから,

$$(2.3) \quad P\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)).$$

Lemma 2.5 X は Stein manifold, Z は complex manifold (Hausdorff), $\pi: X \rightarrow Z$ は analytic map とする. Z の 開集合 U が Stein ならば, $\pi^{-1}(U)$ も Stein である.

(Hörmander: An introduction to complex analysis in several variables, Th. 2.5.14).

この Lemma と Prop 2.4, (1.2), (2.3) より, 十分小さい Stein 開集合 $U \subset X/P$ について,

$$H^j(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}^P) = 0, \quad j \geq 1.$$

従って, inductive limit を取れば,

$$H^j_{\pi}(\mathcal{O}^P) = 0, \quad j \geq 1.$$

Leray spectral sequence (2.1) と (2.2) より,

$$H^p(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = H^p(X, \mathcal{O}^P), \quad \forall p \geq 0.$$

以上をまとめて,

Theorem 2.6 X は正則領域とする. $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$

ならば,

- a) すべての L_x は単連結である;
- b) X/P の位相は Hausdorff である;
- c) X/P は正則領域である.

§ 3. 十分性の証明.

Theorem 3.1. X は $\mathbb{C}^n$ の開集合とする.

a) すべての $\mathcal{L}_x$ は単連結,

c') $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$

ならば, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である.

証明. 仮定 a) より, X/P の十分小さい開集合 U に対して,

$$(2.3) \quad P\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$$

であるから, (1.1) の direct image

$$0 \rightarrow \pi_* \mathcal{O}^P \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\pi_* P} \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

は exact である. 従って, (2.2) と c') より, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$.

Remark. $\dim X = 2$ のときは, X/P の位相が Hausdorff ならば, $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$. 従って,

a) すべての $\mathcal{L}_x$ は単連結,

b) X/P の位相は Hausdorff

ならば, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である.

§ 4. 主定理の条件をみたさない正則領域の例.

1) 条件 a) をみたさない正則領域.

$$P = \partial/\partial x_1, \quad X = (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-1}.$$

若林氏は $\mathbb{C}^3$ の中に polydisc と解析的に同型な正則領域で

a) をみたさない例を作った.

2) 条件 a) はみたすが b) をみたさない Runge domain.

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} + i x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X = \{ \operatorname{Im} x_2 > 0 \}.$$

P の 1 つの積分 $\frac{1}{2} x_1^2 + i x_2$ をとり, 変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + i x_2 \end{cases}$$

を行なう. この変換で $X = \{ \operatorname{Im} x_2 > 0 \}$ に対応する領域は

$$Y = \{ \operatorname{Im} i \left(\frac{1}{2} y_1^2 - y_2 \right) > 0 \}, \quad P \text{ に対応する微分作用素は}$$

$\partial/\partial y_1$ である. y_2 を一定にして, Y の切れ目を調べると,

$\operatorname{Re} y_2 < 0$ のとき, 連結成分は 1 つ, $\operatorname{Re} y_2 \geq 0$ のとき, 連結成分は 2 つである. 従って, X/P の位相は Hausdorff ではない.

若林氏も大域解の存在しない Runge domain の例を示した.

3) 条件 a), b) はみたすが, c) をみたさない Runge domain.

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1 + i x_2) \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X = \{ \operatorname{Im} x_3 > 0 \}.$$

P の 2 つの独立な積分 $-i(x_1 + i x_2)$, $2i x_1(x_1 + i x_2) + x_3$

をとり, 変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -i(x_1 + ix_2) \\ y_3 = 2ix_1(x_1 + ix_2) + x_3 \end{cases}$$

を行なう. この変換で $X = \{\operatorname{Im} x_3 > 0\}$ に対応する領域は $Y = \{\operatorname{Im}(2y_1y_2 + y_3) > 0\}$, P に対応する微分作用素は $\partial/\partial y_1$ である. y_2, y_3 を一定にして, Y の切口を調べると,

$y_2 \neq 0$ のとき, 半平面,

$y_2 = 0, \operatorname{Im} y_3 > 0$ のとき, 全平面,

$y_2 = 0, \operatorname{Im} y_3 \leq 0$ のとき, 空集合,

Y の切口の連結成分が 1 つであるから, $Y/(\partial/\partial y_1) \subset \mathbb{C}^2$.

$$Y/(\partial/\partial y_1) = \mathbb{C}^2 - \{(y_2, y_3); y_2 = 0, \operatorname{Im} y_3 \leq 0\}.$$

Hartogs の連続性定理により, $Y/(\partial/\partial y_1)$ で holomorphic な関数は $\mathbb{C}^2$ 全体に拡張できるから, $X/P \cong Y/(\partial/\partial y_1)$ は正則領域ではない.

§ 5. 0 階の項の影響.

斉次 1 階微分作用素 P について, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば, 任意の $a \in \mathcal{O}(X)$ に対して, $(P+a)\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である. 逆は一般には成り立たない. 例へば, $X = \mathbb{C} - \{0\}$, $P = d/dx$, $a(x) = c/x$, c は定数, $c \notin \mathbb{Z}$. 方程式 $(P+a)u = f$ において, u, f のローラン展開を $u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k x^k$,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k x^k \text{ とすれば,}$$

$$(P+a)u = \sum_k (k+c) u_k x^{k-1} = \sum_k f_k x^k.$$

$$\text{従って, } u_k = \frac{1}{k+1} f_{k-1} \text{ とおけば, } f \in \mathcal{O}(X) \text{ のとき}$$

$$u \in \mathcal{O}(X) \text{ で } (P+a)u = f \text{ となる.}$$