

直積空間上の H^p

東北大理 佐藤 秀一 (Shuichi Sato)

§1. $D = \mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$, $\mathbb{R}_+^{n_i+1} = \mathbb{R}^{n_i} \times (0, \infty)$, $i=1, 2$, とする. $n_1 = n_2 = 1$, または bi-disk における重調和関数に対する montangential maximal function と面積積分の L^p -同値性は Gundy-Stein [7] で示された. ここでは一般の D 上の重調和関数 u に対する montangential maximal function $N(u)$ と面積積分 $A(u)$ の L^p -同値性を §4 の定理 (4.1) の形で述べ, その一つの証明を与える.

次の記号を用いる. $\mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$ の元を $(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2)$ $= (x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, y_1; x_1^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)}, y_2)$, $(x^{(i)}, y_i) \in \mathbb{R}_+^{n_i+1}$, $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2$, とかく. また $(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2) = (x, y)$, ここで $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^N$ ($N = n_1 + n_2$), $y = (y_1, y_2)$ と書く. さらに $\mathbb{R}_+^{n_i+1} = \{ (x^{(i)}, y_i) \in \mathbb{R}_+^{n_i+1} : y_i > 0 \}$, $\mathbb{R}_-^{n_i+1} = \{ (x^{(i)}, y_i) \in \mathbb{R}_+^{n_i+1} : y_i < 0 \}$, $i=1, 2$, とする.

§2. Montangential maximal function と面積積分の定義.
 $u(x, y)$ を $\mathbb{D}$ 上の重調和関数とする. すなわち, u は 2
 回連続微分可能で, $\sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^2}{(\partial x_j^{(1)})^2} u + \frac{\partial^2}{(\partial y_2)^2} u = 0$, $i=1, 2$.
 u に対して montangential maximal function $N(u)$ と面積
 積分を定義する. まず, $a = (a_1, a_2)$, $a_1 > 0, a_2 > 0$,
 $x \in \mathbb{R}^N$ に対して product cone $P_a(x)$ を

$$P_a(x) = \{ (z, y) \in \mathbb{D} : |x^{(1)} - z^{(1)}| < a_1 y_1, |x^{(2)} - z^{(2)}| < a_2 y_2 \}$$

で定義する. ここで $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$, $z = (z^{(1)}, z^{(2)})$, $y = (y_1, y_2)$ である. $P_{(1,1)}(x) = P(x)$ とかく. ここで
 nontangential maximal function $N(u)$ を

$$N(u)(x) = \sup \{ |u(z, y)| : (z, y) \in P(x) \}$$

で定義する. また面積積分 $A_a(u)(x)$ を

$$A_a(u)(x) = \left(\int_{P_a(x)} |\nabla_1 \nabla_2 u|^2 y_1^{1-n_1} y_2^{1-n_2} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

で定義する. ここで $|\nabla_1 \nabla_2 u|^2 = \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^{(1)} \partial x_k^{(2)}} \right|^2$
 ただし $x_0^{(1)} = y_1$, $x_0^{(2)} = y_2$. $A_{(1,1)}(u) = A(u)$ とかく.

§3. 共役重調和関数からなる H^p 空間. $u_{s,t}(x, y)$,
 $s = 0, 1, \dots, n_1$; $t = 0, 1, \dots, n_2$ を $(n_1+1)(n_2+1)$ の
 $\mathbb{D}$ 上の重調和関数とする. $u_{s,t}$ は次の一般化された
 Cauchy-Riemann の方程式を満足するとする.

$$(3.1) \quad \sum_{i=0}^{n_1} \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_i^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial u_{j,t}}{\partial x_i^{(1)}} = \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_j^{(1)}}; \quad 0 \leq i, j \leq n_1,$$

$t = 0, 1, \dots, n_2$, さらに

$$\sum_{k=0}^{n_2} \frac{\partial u_{s,k}}{\partial x_k^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial u_{s,l}}{\partial x_k^{(2)}} = \frac{\partial u_{s,k}}{\partial x_l^{(2)}}; \quad 0 \leq k, l \leq n_2,$$

$s = 0, 1, \dots, n_1$, かつ $T^0(x_0^{(1)} = y_1, x_0^{(2)} = y_2$.

$F(x, y)$ を (j, k) -成分 $(1 \leq j \leq n_1+1, 1 \leq k \leq n_2+1)$

が $u_{j-1, k-1}(x, y)$ である $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 行列とする,

$F(x, y) = (u_{j-1, k-1}(x, y))$. F を 共役な重調和関数のシステムと呼ぶ. $|F| = (\sum_{s=0}^{n_1} \sum_{t=0}^{n_2} |u_{s,t}|^2)^{\frac{1}{2}}$, $p_0 = \max(\frac{n_1-1}{n_1}, \frac{n_2-1}{n_2})$ とする.

$H_A^p(\mathbb{D})$ の定義. F を 共役な重調和関数のシステムとする.

$p_0 < p < \infty$ に対し, $F \in H_A^p(\mathbb{D})$ とは

$$\sup_{y_1 > 0, y_2 > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|F\|_p < \infty$$

であることとする.

さらに, $\mathbb{D}_{+-} = \mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_-^{n_2+1}$, $\mathbb{D}_{-+} = \mathbb{R}_-^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$,

$\mathbb{D}_{--} = \mathbb{R}_-^{n_1+1} \times \mathbb{R}_-^{n_2+1}$ とし $H_A^p(\mathbb{D}_{+-})$, $H_A^p(\mathbb{D}_{-+})$, $H_A^p(\mathbb{D}_{--})$

を $H_A^p(\mathbb{D})$ に類似して定義する.

§4. 定理.

(4.1) 定理. $u(x, y)$ を $\mathbb{D}$ 上の重調和関数とする.

$U(x, y)$ を $(1, 1)$ -成分が $u(x, y)$ で, その他の成分がすべて

で 0 である $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 行列値関数とする. このとき
 $0 < p < \infty$ に対して次の 3 つの性質は同値である.

- (1) $N(u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
 (2) $u(x, y) \rightarrow 0$, as $y_1 + y_2 \rightarrow \infty$ かつ $A(u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
 (3) 4 つの行列値関数 $F_{++} \in H_A^p(\mathbb{D})$, $F_{+-} \in H_A^p(\mathbb{D}_{+-})$,
 $F_{-+} \in H_A^p(\mathbb{D}_{-+})$, $F_{--} \in H_A^p(\mathbb{D}_{--})$ が存在して

$$U(x, y) = F_{++}(x, y) + F_{+-}(x, y_1, -y_2) + F_{-+}(x, -y_1, y_2) \\ + F_{--}(x, -y_1, -y_2), \quad (x, y) \in \mathbb{D}$$

とかける.

さらに $\|N(u)\|_p \approx \|A(u)\|_p$.

注意. 上の定理は H_A^p の定義を適当にすることにより
 $0 < p < \infty$ で成り立つ. 特に $\|N(u)\|_p \approx \|A(u)\|_p$,
 $0 < p < \infty$, 以下で (1) $\Rightarrow$ (2) は $0 < p < 2$ について
 示す.

§5. (1) $\Rightarrow$ (2) の証明. $P_y(x) = P_1(x^{(1)}, y_1) P_2(x^{(2)}, y_2)$ と
 する. ここで $P_i(x^{(i)}, y_i) = c_{n_i} \frac{y_i}{(1 + |x^{(i)}|^2 + y_i^2)^{\frac{n_i+1}{2}}}$

は $\mathbb{R}_+^{n_i+1}$ に正しい Poisson 核である. $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$
 に対して $P(f)(x, y) = P_y * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-z) P_y(z) dz$

とする. $0 < p < 2$ に対して (1) $\Rightarrow$ (2) は次の定理からわかる. $p \geq 2$ については省略する.

(5.1) 定理. $u(x, y) = p_y * f(x)$ $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする.

このとき

$$(5.2) \quad |\{x \in \mathbb{R}^N : A(u)(x) > \alpha\}| \leq c \left(|\{x \in \mathbb{R}^N : N(u)(x) > \alpha\}| + \frac{1}{\alpha^2} \int_{N(u) \leq \alpha} N^2(u)(x) dx \right), \quad \forall \alpha > 0$$

が成り立つ.

注意. $m_1 = m_2 = 1$, または bidisk の時は [7] で示された. 以下では [7] よりかんたんな証明を与える.

定理 (5.1) の証明. $u(x, y) = p_y * f(x)$, f は実数値としてよい. $E = \{x \in \mathbb{R}^N : N(u)(x) \leq \alpha\}$ ($\alpha > 0$) とする. $0 < \delta < \frac{1}{2}$ とするとき次が成り立つ (cf. [7]).

(5.3) Lemma. E の部分集合 E^* が存在して

$$\inf_{z \in E^*} \inf_{(x, y) \in p(z)} I(x_E)(x, y) \geq 1 - \delta,$$

$$|CE^*| \leq c|CE|$$

が成り立つ. ここで CE^* は E^* の補集合である.

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\phi(t) = 1$, $t \geq 1 - \delta$; $\phi(t) = 0$,

$1-2\delta \geq t$; $|\phi\dot{w}(t)|^2 \leq c \phi(t)$ $t \in \mathbb{R}$, $j=1, 2$,
をみたすものとする (cf. [8]). Lemma (5.3) により

$$(5.4) \quad \int_{E^*} A^2(u)(z) dz \leq c \int y_1 y_2 \phi(v) |\nabla_1 \nabla_2 u|^2 dx dy \\ = c I ,$$

そこで $v = P(X_E)$. 次に

$$(5.5) \quad I_\varepsilon = \int y_1 y_2 \phi(v_\varepsilon) |\nabla_1 \nabla_2 u_\varepsilon|^2 dx dy$$

とおく. ここで $v_\varepsilon(x, y) = P(X_E)(x, y_1 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon)$,

$$u_\varepsilon(x, y) = u(x, y_1 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon).$$

グリーンの定理により (部分積分により)

$$(5.6) \quad \int y_1 y_2 \Delta_1 (\phi(v_\varepsilon) |\nabla_2 u_\varepsilon|^2) dx dy = \underbrace{\int y_2 \phi(v_\varepsilon) |\nabla_2 u_\varepsilon|^2}_{dx dy_2} \\ = J_\varepsilon$$

最後の積分で積分は $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$ でなされる. 以後, 上記
のような書き方をする. 一方.

$$(5.7) \quad \Delta_1 (\phi(v_\varepsilon) |\nabla_2 u_\varepsilon|^2) = \phi''(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |\nabla_2 u_\varepsilon|^2 \\ + 2\phi(v_\varepsilon) |\nabla_1 \nabla_2 u_\varepsilon|^2 + O(|\phi'(v_\varepsilon)| |\nabla_1 w_\varepsilon| |\nabla_1 \nabla_2 u_\varepsilon| |\nabla_2 u_\varepsilon|)$$

ここで $w_\varepsilon(x, y) = P(X_{cE})(x, y_1 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon)$, また

$$(5.6), (5.7) \text{ で一般に } \mathbb{D} \text{ 上の重調和関数 } u \text{ に対して } |\nabla_i u|^2 = \\ \sum_{j=1}^{n_i} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y_i} u \right|^2 \text{ である.}$$

次に δ' を δ より大きい正の数として, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$
を $\psi(t) = 0$, $t \leq 1-2\delta'$; $\psi(t) > 0$, $t > 1-2\delta'$;

$|\psi^{(j)}(t)|^2 \leq c \psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j=1, 2$; $\psi \leq 1$, を与えるようにとる. この時

$$|\phi^{(j)}(t)| > 0 \Rightarrow \psi(t) \geq c (> 0) \quad (j=1, 2)$$

となるような $c > 0$ が存在する. この事実を以後用いる.

$$K_\varepsilon = \int y_1 y_2 \psi(v_\varepsilon) |v_1 w_\varepsilon|^2 |v_2 u_\varepsilon|^2 dx dy \text{ とおく.}$$

(5.6) と (5.7) により Schwarz の不等式を用いると

$$(5.8) \quad I_\varepsilon \leq c (J_\varepsilon + K_\varepsilon + I_\varepsilon^{\frac{1}{2}} K_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

を得る. 次の2つの Lemma を仮定する.

(5.9) Lemma. $J_\varepsilon \leq c \left(\int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx + \alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx \right)$

(5.10) Lemma. $K_\varepsilon \leq c \alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx.$

(5.8) と Lemma (5.9), (5.10) により

$$(5.11) \quad I_\varepsilon \leq c \left(\int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx + \alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx \right)$$

を得る. かんたんに, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$\int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx \rightarrow \int_E f^2(x) dx, \quad \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx \rightarrow |CE|$$

がわかる. よって (5.11) において $\varepsilon \rightarrow 0$ として

$$(5.12) \quad I \leq c \left(\int_E N^2(u)(x) dx + \alpha^2 |CE| \right)$$

を得る. (5.2) と (5.12) と Lemma (5.3) からわかる

f.e.d.

次に Lemma (5.9) と (5.10) を証明する.

Lemma (5.9) の証明. グリーンの定理により

$$(5.13) \quad \int y_2 \Delta_2 (\phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2) dx dy_2 = \int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx$$

一方

$$(5.14) \quad \Delta_2 (\phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2) = \phi''(v_\varepsilon) |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2 + 2\phi(v_\varepsilon) |\nabla_2 u_\varepsilon|^2 + O(|\phi'(v_\varepsilon)| |\nabla_2 w_\varepsilon| |u_\varepsilon| |\nabla_2 u_\varepsilon|).$$

$$L_\varepsilon = \int y_2 \psi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 dx dy_2 \text{ とおく. } (5.13),$$

(5.14) と Schwarz の不等式 から

$$(5.15) \quad J_\varepsilon \leq c \left(\int \phi(v_\varepsilon) u_\varepsilon^2 dx + L_\varepsilon + J_\varepsilon^{\frac{1}{2}} L_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)$$

を得る. $\therefore$ ε' を十分小さくとると

$$\sup \{ |u_\varepsilon(x, y)| : \psi(v_\varepsilon(x, y)) \neq 0 \} \leq \alpha$$

がいえる. (したがって)

$$(5.16) \quad L_\varepsilon \leq \alpha^2 \int y_2 |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 dx dy_2 = c \alpha^2 \int w_\varepsilon^2(x, 0) dx.$$

(5.15) と (5.16) により Lemma の証明を終わる. *g.e.d.*

Lemma (5.10) の証明. グリーンの定理により

$$(5.17) \quad \begin{aligned} & \int y_1 y_2 \Delta_2 (\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2) dx dy \\ & \leq \alpha^2 \int y_1 \psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 dx dy_1 \\ & \leq c \alpha^2 \int w_\varepsilon^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

$\therefore$ 3 次 - 方.

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \Delta_2 (\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2) &= \psi''(v_\varepsilon) |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2 \\ &+ 2\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 \nabla_2 w_\varepsilon|^2 u_\varepsilon^2 + 2\psi(v_\varepsilon) |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |\nabla_2 u_\varepsilon|^2 + \end{aligned}$$

$$O(|\psi'(v_\varepsilon)| |\nabla_2 w_\varepsilon| |\nabla_1 w_\varepsilon| |\nabla_1 \nabla_2 w_\varepsilon| |u_\varepsilon|^2 + |\psi'(v_\varepsilon)| |\nabla_2 w_\varepsilon| \times |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |u_\varepsilon| |\nabla_2 u_\varepsilon| + |\psi| |\nabla_1 w_\varepsilon| |\nabla_1 \nabla_2 w_\varepsilon| |u_\varepsilon| |\nabla_2 u_\varepsilon|).$$

$$u \in C^\infty \quad M_\varepsilon = \int y_1 y_2 |\nabla_1 w_\varepsilon|^2 |\nabla_2 w_\varepsilon|^2 dx dy,$$

$$N_\varepsilon = \int y_1 y_2 |\nabla_1 \nabla_2 w_\varepsilon|^2 dx dy$$

とす。 (5.17) と (5.18) により Schwarz の不等式を
用ゐる

$$(5.17) \quad K_\varepsilon \leq c \left(\alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx + \alpha^2 M_\varepsilon + \alpha^2 N_\varepsilon + \alpha^2 M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} N_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha K_\varepsilon^{\frac{1}{2}} M_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha K_\varepsilon^{\frac{1}{2}} N_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$\text{よういに} \quad N_\varepsilon = c \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx, \quad M_\varepsilon \leq c \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx$$

がわかるので (5.19) により

$$K_\varepsilon \leq c \alpha^2 \int w_\varepsilon(x, 0)^2 dx \quad \text{が成り立つ。} \quad \text{f.e.d.}$$

§6. (3) $\Rightarrow$ (1).

(6.1) Lemma. $F \in H_A^1(D)$ ($p_0 < p < \infty$) とする。

$$N(|F|)(x) = \sup \{ |F(z, y)| : (z, y) \in P(x) \} \quad \text{とすると}$$

$$\|N(|F|)\|_p \approx \|F\|_p.$$

この Lemma は $|F|^{p_0}$ が bisubharmonic であることが
知られる。

(3) $\Rightarrow$ (1) は Lemma (6.1) からわかる。

$$\S 7. (2) \Rightarrow (3). \quad u(x, y) = p_y * f(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

とする. この形の u に対してだけ (2) $\Rightarrow$ (3) を示す.

$R_s^{(1)}$ を $\mathbb{R}^{n_1}$ 上の s -th Riesz 変換, $R_t^{(2)}$ を $\mathbb{R}^{n_2}$ 上の t -th Riesz 変換 ($s=1, 2, \dots, n_1$; $t=1, 2, \dots, n_2$) とする.

$$u_{s,t}(x,y) = p_y * R_s^{(1)} R_t^{(2)} f(x), \quad u_{s,0}(x,y) = p_y * R_s^{(1)} f(x),$$

$$u_{0,t}(x,y) = p_y * R_t^{(2)} f(x), \quad u_{0,0}(x,y) = u(x,y)$$

$s=1, 2, \dots, n_1$; $t=1, 2, \dots, n_2$ とする.

F を (j,k) -成分が $u_{j-1,k-1}(x,y)$ ($j=1, \dots, n_1+1$; $k=1, \dots, n_2+1$) である $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 行列値関数とする. $F \in H_A^p(\mathbb{D})$ を示す. F の定義から, F は共役な重調和関数のシステムでありことは明らかである.

次の Lemma を必要とする

(7.1) Lemma. $v(x,y) = p_y * g(x)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とする.

この時 $0 < p < \infty$ に対して

$$\sup_{y_1, y_2 > 0} \int_{\mathbb{R}^N} |v(x,y)|^p dx \leq c \|A_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(v)\|_p^p.$$

(7.2) Lemma. $A_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(u_{s,t})(x) \leq c A(u)(x)$,

$s=0, \dots, n_1$, $t=0, \dots, n_2$.

Lemma (7.1) は [10, p. 213], Lemma (7.2) は [7, Lemma 1] とそれぞれ同様に示すことができる.

Lemma (7.1), (7.2) により, $F \in H_A^p(\mathbb{D})$ であり, $\|F\|_p \leq C \|A(u)\|_p$. 次に $F_{++}, F_{+-}, F_{-+}, F_{--}$ を定義する. するために F をブロック形に書く.

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$$

ここで F_1, F_2, F_3, F_4 は 各々 $1 \times 1, 1 \times n_2, n_1 \times 1, n_2 \times n_2$ 行列である. ここで $F_{++}(x, y) = \frac{1}{4} F(x, y)$,

$$F_{+-}(x, y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_1(x, y_1, -y_2) & -F_2(x, y_1, -y_2) \\ F_3(x, y_1, -y_2) & -F_4(x, y_1, -y_2) \end{pmatrix},$$

$$F_{-+}(x, y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_1(x, -y_1, y_2) & F_2(x, -y_1, y_2) \\ -F_3(x, -y_1, y_2) & -F_4(x, -y_1, y_2) \end{pmatrix},$$

$$F_{--}(x, y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_1(x, -y_1, -y_2) & -F_2(x, -y_1, -y_2) \\ -F_3(x, -y_1, -y_2) & F_4(x, -y_1, -y_2) \end{pmatrix}$$

とあくと, $F_{++}, F_{+-}, F_{-+}, F_{--}$ は条件をみたす.

文献

1. A. P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution,

- Advances in Math. 16 (1975), 1-64.
2. S. Y. A. Chang, Carleson measure on the bi-disc, Ann. of Math. 109 (1979), 613-620.
 3. S. Y. A. Chang and R. Fefferman, A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc, Ann. of Math. 112 (1980), 179-201.
 4. C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 138-193.
 5. R. Fefferman, Bounded mean oscillation on the polydisk, Ann. of Math. 110 (1979), 395-406.
 6. R. F. Gundy, Inégalités pour martingales à un et deux indices: L'espace H^p , Lecture Notes in Math. 774, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1980.
 7. R. F. Gundy and E. M. Stein, H^p theory for the poly-disc, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76 (1979), 1026-1029.
 8. M. P. Malliavin and P. Malliavin, Intégrales de Lusin-Calderón pour les fonctions

biharmoniques , Bull. Sci. Math. 101 (1977),
357-384.

9. E. M. Stein, A variant of the area integral , Bull. Sci. Math. 103 (1979), 449-461.
10. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1971.
11. E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.
12. A. Zygmund, Trigonometric series, I and II, Cambridge Univ. Press, 1959.
13. S. Sato, Lusin functions and nontangential maximal functions in the H^p theory on the product of upper half-spaces.