

重さ 1 の Hilbert modular 形式と Galois 群の表現

東海大 理 太田雅己 (Masami Ohta)

§ 0. Introduction

Deligne と Serre [D-S] は重さ 1 の primitive な積の cusp 形式に付随する L -函数を或る 2 次の Galois 群の表現の Artin L -函数になる事を示した。以下ではこの結果の、(奇数次) 総実代数体 K の Hilbert cusp 形式への拡張について述べる。

証明の方法は基本的に [D-S] と同様であるが、有理数体の代りに一般の総実体を扱うために生じる困難が 2 点ある：

(1). 重さ > 1 の primitive な Hilbert cusp 形式に付随する Galois 群の L -函数表現の系の存在；

(2). Hilbert modular 形式の間の“合同”。

本論では言葉の準備 (§ 1) の後、主結果を述べ (§ 2)、証明の要点 (1), (2) について説明する (§ 3)。

尚筆者が本論の結果を得た後、同じ主題を扱った

Rogawski と Tunnell の論文 [R-T] が出版された事を付記しておく。

§ 1. Hilbert modular 形式に関する準備.

以下 F を有限次総実代数体、 $[F:\mathbb{Q}] = g$ とし、 $\mathbb{Z}_F$ は F 上の F の整数環、 $\mathfrak{f}$ で $F/\mathbb{Q}$ の different を表わす、 F の整 ideal $\mathfrak{r}$ とし、

$$\begin{cases} S_1(\mathfrak{r}) = GL_2^+(F_\infty) \times \prod_{\mathfrak{f}} S_{1,\mathfrak{f}} < GL_2(F_A) \\ S_{1,\mathfrak{f}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(F_{\mathfrak{f}}) \mid \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{f}}, b \in \mathfrak{f}^{-1}, c \in \mathfrak{f} \mathfrak{r}_{\mathfrak{f}} \\ d-1 \in \mathfrak{r}_{\mathfrak{f}}, ad-bc \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{f}}^{\times} \end{array} \right\} \end{cases}$$

と置く。ここで添字 A (resp. $\mathfrak{f}$) は adèle 化 (resp. $\mathfrak{f}$ -適完備化) を示し、 $GL_2^+(F_\infty)$ は $GL_2(F_A)$ の無限成分の 1 の連結成分とした。技術的理由から次の群も考える：

$$\begin{cases} S_2(\mathfrak{r}) = GL_2^+(F_\infty) \times \prod_{\mathfrak{f}} S_{2,\mathfrak{f}} < GL_2(F_A) \\ S_{2,\mathfrak{f}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S_{1,\mathfrak{f}} \mid a-1 \in \mathfrak{r}_{\mathfrak{f}} \right\} \end{cases}$$

$S_\varepsilon(\mathfrak{r})$ ($\varepsilon = 1$ or 2) の λ を固定し、暫く $\mathfrak{f} + \varepsilon \mathfrak{r}$ と置く。

$$F_A^\times = \prod_{i=1}^g \det(S) F^\times t_i$$

と分解し、以下 $t_i \in F_A^\times$ の無限成分は全て 1 にとって置く。

$$x_i = \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(F_A) \text{ とおけば}$$

$$GL_2(F_A) = \prod_{i=1}^k S_i \alpha_i GL_2(F)$$

となる。各 i に對して

$$S_i = \alpha_i^{-1} S \alpha_i, \quad \Gamma_{S_i} = S_i \cap GL_2(F)$$

と置く。 Γ_{S_i} は複素上半平面 H の g 個の面積 H^g の Γ に自然に作用する。

定義. 正の整数 k に對して

$$M_k(S) = \bigoplus_{i=1}^k M_k(\Gamma_{S_i})$$

$$G_k(S) = \bigoplus_{i=1}^k G_k(\Gamma_{S_i})$$

とする。ここで右辺の $M_k(\Gamma)$ (resp. $G_k(\Gamma)$) は通常、

Γ に關する重さ k の Hilbert modular 形式 (resp. cusp 形式)

を表わす。

$\mathfrak{t}_i$ を $\mathfrak{t}_i$ に対応する F の ideal とすると、よく知ら

れているように、 $f_i(z) \in M_k(\Gamma_{S_i})$ は次の形の Fourier

展開を持つ：

$$f_i(z) = \sum_{\mathfrak{z}} a_i(\mathfrak{z}) e^{2\pi i \operatorname{tr}(\mathfrak{z}z)} \quad (z \in H^g)$$

ここで $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{z} \in \mathfrak{t}_i$ かつ $\mathfrak{z} \gg 0$ (証明) 又は $\mathfrak{z} = 0$ を取す。

通常のように $M_k(S)$, $G_k(S)$ には Hecke 作用素

$T(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は F の有限素点)、 $T(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は π と素な F の

有限素点) を作用する。又 $G_k(S_1(\pi))$ の new form といい

概念を自然に定義される。特に $f \in G_k(S_1(\pi))$ を new

form であることは Hecke 作用素の同時固有函数である：

$$\begin{cases} I(\mathfrak{p})f = a_f(\mathfrak{p})f & (\forall \mathfrak{p}) \\ I(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})f = a_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})f & (\forall \mathfrak{p} + \pi) \end{cases}$$

この時

$$D(\lambda, f) = \prod_{\mathfrak{p} + \pi} (1 - a_f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-\lambda} + a_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{1-2\lambda})^{-1} \\ \times \prod_{\mathfrak{p} | \pi} (1 - a_f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-\lambda})^{-1}$$

と置く。

§ 2. 主結果.

§ 1 の記号を踏襲する。

定理 1. $g = [F : \mathbb{Q}]$ を奇数とする。 $f \in \mathcal{G}_1(\mathcal{O}_1(\pi))$

が重さ 1 の new form の時、連続な表現

$$\rho : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

が、2 次をみたす：

i). ρ は π 以外の F の有限素点で不変；

ii). $\mathfrak{p}$ を π と素な F の有限素点、 $\sigma_{\mathfrak{p}} \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ を

$\mathfrak{p}$ の Frobenius 元とすると

$$\det(1 - \rho(\sigma_{\mathfrak{p}}^{-1})T)$$

$$= 1 - a_f(\mathfrak{p})T + N(\mathfrak{p})a_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})T^2.$$

この定理の証明の要点は次節に述べる。これから次の

系が導かれる：

系 1. 同記号の下で

$$\begin{cases} D(s, f) = p \text{ の Artin } L\text{-函数} \\ \kappa = p \text{ の Artin conductor} \end{cases}$$

保型表現の言葉で、これはもう少し強い次の形で言える:

3:

系 2. π_f を f に付随する unitarizable な $GL(2)$ の

保型表現とすると $\pi_f = \pi(p)$ (右辺の意味は例えば、

Langlands [L] p.23 参照)。

系 1, 2 の応用として次の事を言える:

系 3. F の任意の有限素点 s について

$$|a_f(s)| \leq 2$$

即ち $(g: \text{奇数の時})$ $G_1(S_1(\kappa))$ について Ramanujan-Petersson 予想が成立する。

系 4. E と同じ F に対し、

$$\varphi: \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

を連続な表現、 $\bar{\varphi}$ を φ と $GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ の合成とし、

次を仮定する:

i) $\text{Im}(\bar{\varphi}) \cong G_4$ (4 次初等群);

ii) E の同型で G_4 に対応する F の 2 次拡大は総体;

iii) F の任意の無限素点 v に対し、“ v の Frobenius”

の φ に与える像は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と共役。

この時 φ について Artin 予想が成立する。

§ 3. 証明の要点.

§ 0 で述べた 2 点のうち (1) については次が成立する

定理 2 ([01]) F を $\mathbb{Q}$ 上奇数次の総定代数体.

$f \in \mathbb{Q}_\ell(S_1(n))$ ($\ell \geq 2$) を new form とする. この時全
ての $a_f(\beta)$, $a_f(\beta, \beta)$ を含む或る有限次代数体 k があり, k
の任意の有限素点 ℓ に対して次が成立する:

$$\exists \rho_\ell: \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_2(k_\ell) \quad (\text{連続準同型}) \text{ s.t.}$$

i). ρ_ℓ は $\ell \nmid N(\ell)$ 以外で不分岐;

ii). $\beta \nmid \ell \nmid N(\ell)$ の時

$$\begin{aligned} \det(1 - \rho_\ell(\sigma_\beta^{-1}) T) \\ = 1 - a_f(\beta) T + N(\beta) a_f(\beta, \beta) T^2 \end{aligned}$$

この定理は、はじめに (一般の) F 上の四元数体 M を
得る M の変数保型形式に付随する ℓ -進表現を構成し、そ
れに Eichler - 清水 - Jacquet - Langlands の対応を用いる事
によって得られる。[F: $\mathbb{Q}$] が奇数という条件が必要なのは
そのためである。これより後の議論では F は任意の総定代数
体でよい。

(2) について説明するため言葉の準備をする。一般
に R を有限次代数体の素 ideal ℓ の付随環とする。以下、
§ 1 で選んだ代表元 t_i ($1 \leq i \leq g$) は $N(t_i) \in R^\times$ になるよ
うにと、しておく。

$$W_{\ell}(\Gamma_{S_i})(R) = \left\{ f_i(z) = \sum_{\xi} a_i(\xi) e^{2\pi i \xi z} \in W_{\ell}(\Gamma_{S_i}) \mid \right.$$

$$a_i(\xi) \in R \text{ for all } \xi \in \mathbb{Z}_i \text{ s.t. } \xi \gg 0 \text{ or } \xi = 0 \}$$

$$W_{\ell}(S)(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} W_{\ell}(\Gamma_{S_i})(R)$$

とある。 $f = (f_i) \in W_{\ell}(S)(R)$, $g = (g_i) \in W_{\ell}(S)(R)$ に

対し, " $f_i \equiv g_i \pmod{1}$ ", " $f \equiv g \pmod{1}$ " 2つ, 各 i

の Fourier 係数が全て $\pmod{1}$ で合同である事を示す。

命題. $W_{\ell}(S)(R)$, $G_{\ell}(S)(R)$ は $I(\beta)$, $I(\beta, \beta)$ ($\forall \beta$

$\nmid N(1)$) 2つ stable.

定理 3. $N_0 \in \mathbb{Z}$, ≥ 4 を固定するとき, $\exists m \in \mathbb{Z}$, ≥ 0

と $N_0 m$ に依存する素数の有限集合 $P(N_0 m)$ があり, 任意

の素数 $\ell \notin P(N_0 m)$ に対して次が成立する:

$$\exists h = (h_i) \in W_{\ell}(S_2(N_0 m))(\mathbb{Z}_{\ell} \cap \mathbb{Q})$$

$$\text{with } \exists h \equiv 0 \pmod{(\ell-1)} \text{ s.t.}$$

$$i) \quad h \equiv 1 \pmod{\ell};$$

$$ii) \quad \beta \in N_0 m N(1) \text{ と素な } F \text{ の有限素点, } \varpi \in F_{\beta}$$

$$\text{を素元とすると } GL_2(F_{\beta}) \ni (1, \dots, 1, \begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{bmatrix}, 1, \dots, 1)$$

$$(\beta\text{-成分のみ } \begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{bmatrix} \text{ 他は } 1) \in \rho_i \alpha_i \quad (\alpha_i \in \mathfrak{p}_i, \alpha_i \in GL_2(F))$$

$$\text{と書く。すると } h_i | \alpha_i \equiv 1 \pmod{\ell} \quad (1 \leq i \leq \ell).$$

更に m は与えられた整数と素にとれる。

注意. $F = \mathbb{Q}$ の時には h としつて適当な Eisenstein 級

数をとればよい (cf. [D.-S] 6.9). $F \neq \mathbb{Q}$ と abelian なる

るばやほり適当な Eisenstein 級数 γ 階に合うが、一般には未解決の予想を仮定しないと Eisenstein 級数 γ i), ii) をみえた事が証明できる。このことは Rapoport, Katz, Deligne - Ribet にある Hilbert modular 形式の代数的理論を用いて (Eisenstein 級数とは別に) 構成する。

定理 1 の証明は定理 2, 定理 3, Shimura の結果 ([S] Prop. 4.13 ; これより [D-S] Prop. 5.1 の一般化が容易に従う) を用いれば, [D-S] と同様に行く。

文献

[D-S] P. Deligne, J.-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. sci. éc. norm. sup. 4^e série, t. 7, 507-530 (1974).

[L] R. P. Langlands, Base change for $GL(2)$, Ann. Math. Studies 96, Princeton Univ. Press (1980).

[O1] M. Ohta, On ℓ -adic representations attached to automorphic forms, Japanese J. Math. 8, 1-47 (1982); part II, to appear.

[O2] " , Hilbert modular forms of weight one and Galois representations, to appear.

[R.-T] J. D. Rogawski, J. B. Tunnell, On Artin

L -functions associated to Hilbert modular forms
of weight one, Invent Math. 74, 1-42 (1983).

[S] G. Shimura, The special values of the zeta
functions associated with Hilbert modular forms,
Duke Math. J. 45, 637-679 (1978).