

特異性のある非整数階微分方程式に関する初期値問題の解の存在

Existence of solutions of initial value problems for singular fractional differential equations

川崎敏治 豊田昌史

Toshiharu Kawasaki Masashi Toyoda

玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科
194-8610 東京都町田市玉川学園 6-1-1

Department of Management Science, College of Engineering, Tamagawa University, 6-1-1
Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194-8610.

1 はじめに

$[a, b]$ でルベーグ積分可能な関数全体からなる Banach 空間を $L[a, b] = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\| < \infty\}$ とする. ここで $\|u\| = \int_a^b |u(t)| dt$ である. 次が成り立つ.

命題 1. $\nu > 0$ とする. $n = [\nu] + 1$ とする. u を $u \in L[0, b]$ および $D_{0+}^\nu u \in L[0, b]$ をみたすものとする. このとき, ある $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$I_{0+}^\nu D_{0+}^\nu u(t) = u(t) + C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \dots + C_n t^{\nu-n}$$

が成り立つ.

ここで I_{0+}^ν および D_{0+}^ν は, それぞれ, ν 階 Riemann-Liouville 積分および ν 階 Riemann-Liouville 微分である. I_{0+}^ν および D_{0+}^ν の定義は, 後に記す.

命題 1 は, 非整数階微分方程式の解の存在を示す際に重要である. 実際, [2] では $0 < \nu < 1$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示す際, 命題 1 にあたる Proposition 2.4 を用いる. [8] では, [2] の Proposition 2.4 を引用して $0 < \nu < 1$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示している. [1] では $1 < \nu \leq 2$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示す際, 命題 1 にあたる Lemma 2.2 を用いる. [4] では, [1] の Lemma 2.2 を引用して $1 < \nu \leq 2$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示している.

[2] の Proposition 2.4 にしても [1] の Lemma 2.2 にしても, 詳細な計算は読者に委ねられている. そこで, 本論文では読者の便宜を図るため, 命題 1 の証明を記す. さらに, 命題 1 を使うと得られる定理の例を示す. 命題 1 を使って, 初期値問題と同値な積分方程式を導く. 解の存在の詳細な証明は, 例えば [4] を参照されたい. 本論文では, 命題 1 を使う部分 (定理 1) のみを記す.

2 Riemann-Liouville 積分と微分

本節では Riemann-Liouville 積分と微分を扱う。まずは $\nu > 0$ とするときの ν 階 Riemann-Liouville 積分 I_{0+}^{ν} と ν 階 Riemann-Liouville 微分 D_{0+}^{ν} の定義を記す。

u を $[a, b]$ 上の関数とする。 $\nu > 0$ とする。 u の ν 階 Riemann-Liouville 積分 I_{a+}^{ν} を

$$I_{a+}^{\nu} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-s)^{\nu-1} u(s) ds$$

で定める。自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $I_{a+}^n u(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} u(s) ds$ である。実際

$$\int_a^t \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} \cdots \left(\int_a^{s_{n-1}} u(s_n) ds_n \right) \cdots ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} u(s) ds$$

である。 $u \in L[a, b]$ のとき $I_{a+}^{\nu} u$ は存在する。これを次の補題 1 で示す。

$1 \leq p \leq \infty$ とする。 $L_p[a, b]$ は $L_p[a, b] = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\|_p < \infty\}$ で定める。ここで $\|u\|_p = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < \infty$)、 $\|u\|_{\infty} = \text{esssup}_{x \in [a, b]} |u(x)|$ である。 $L_1[a, b] = L[a, b]$ である。次が成り立つ ([5, Lemma 2.1(a)], [6, Theorem 2.6])。

補題 1. $\nu > 0$ とする。 $u \in L[a, b]$ とする。このとき

$$\|I_{a+}^{\nu} u\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu \Gamma(\nu)} \|u\|_1$$

が成り立つ。すなわち $I_{0+}^{\nu} u \in L[a, b]$ である。

証明. Fubini の定理 (例えば [7, p.126]) より、積分順序を交換すると

$$\begin{aligned} \|I_{a+}^{\nu} u\|_1 &= \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-s)^{\nu-1} |u(s)| ds \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_s^b (t-s)^{\nu-1} |u(s)| dt \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^b |u(s)| \left(\int_s^b (t-s)^{\nu-1} dt \right) ds \end{aligned}$$

を得る。ここで $\int_s^b (t-s)^{\nu-1} dt = \frac{1}{\nu} (b-s)^{\nu} \leq \frac{1}{\nu} (b-a)^{\nu}$ より

$$\|I_{a+}^{\nu} u\|_1 \leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^b |u(s)| \left(\frac{1}{\nu} (b-a)^{\nu} \right) ds = \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu \Gamma(\nu)} \int_a^b |u(s)| ds = \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu \Gamma(\nu)} \|u\|_1$$

を得る。 □

$1 < p \leq \infty$ の場合も、補題 1 が成り立つ。すなわち、次が成り立つ ([5, Lemma 2.1(a)], [6, Theorem 2.6]): $1 \leq p \leq \infty$ とする。 $\nu > 0$ とする。 $u \in L_p[a, b]$ とする。このとき

$$\|I_{a+}^{\nu} u\|_p \leq \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu \Gamma(\nu)} \|u\|_p$$

が成り立つ.

関数 u の ν 階 Riemann-Liouville 微分 D_{a+}^{ν} を

$$D_{a+}^{\nu} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds$$

で定める. ここで $n = [\nu] + 1$ であり $[\nu]$ は ν を越えない最大の自然数である. すなわち, n は $n-1 \leq \nu < n$ をみたす自然数である. Γ はガンマ関数である. 以下 $a=0$ を考える. $\nu > 0, \beta > 0$ のとき

$$I_{0+}^{\nu} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\nu+1)} t^{\beta+\nu}, \quad D_{0+}^{\nu} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)} t^{\beta-\nu}$$

である. これらは, 補題 2 の証明で用いる. $u \in L[0, b]$ のとき, ほとんどすべての点 t で $D_{0+}^{\nu} I_{0+}^{\nu} u(t) = u(t)$ である (補題 3).

$\nu > 0, m = 1, 2, \dots, [\nu] + 1$ とする. $u(t) = t^{\nu-m}$ に対して $D_{0+}^{\nu} u = 0$ である ([6, p.37]). 実際, $n = [\nu] + 1$ とする. $m = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\nu} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} s^{\nu-m} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \frac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(n-m+1)} t^{n-m} \\ &= \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-m} = 0 \end{aligned}$$

となる. 2 つめの等号は, $p, q > 0$ に対する積分の式

$$\int_a^t (t-s)^{p-1} (s-a)^{q-1} ds = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (t-a)^{p+q-1}$$

を用いた. この積分の式は, 補題 2 や 補題 3 の証明で用いる.

$[a, b]$ から $\mathbb{R}$ への関数 u が絶対連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ および互いに共通部分をもたないある有限個の $[a, b]$ の部分区間 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ が存在して

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon$$

をみたすときをいう. $u \in L[0, b]$ に対して, $I_{0+}^1 u$ は絶対連続であり, ほとんどすべての点 t で $D_{0+}^1 I_{0+}^1 u(t) = u(t)$ である (例えば, [7, p.189, 定理 4]). 特に, 任意の自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対してほとんどすべての点 t で $D_{0+}^n I_{0+}^n u(t) = u(t)$ である. これは, 補題 2 や 補題 3 の証明で用いる.

3 命題 1 の証明

本節では, 命題 1 を証明をする.

まず, 次が成り立つ ([5, Corollary 2.1]).

補題 2. $\nu > 0$ とする. ほとんどいたるところ $D_{0+}^\nu u = 0$ とする. このとき, ある $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ が存在して, ほとんどすべての点 t で

$$u(t) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \dots + C_n t^{\nu-n}$$

である. ここで $n = [\nu] + 1$ である.

証明. $D_{0+}^\nu u(t) = 0$ とする. すなわち $\frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = 0$ である. このとき $\frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = 0$ である. これより $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1$ である. また $\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1 t + C_2$ である. 同様に $\frac{d^{n-3}}{dt^{n-3}} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$ である. ただし $\frac{C_1}{2}$ をあらためて C_1 とした. 以下, 適宜, 定数を置き換える. 繰り返すと

$$\int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} + \dots + C_n$$

である. ところで

$$\begin{aligned} I_{0+}^\nu \int_a^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} \left(\int_a^s (s-\tau)^{n-\nu-1} u(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t u(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\nu-1} (s-\tau)^{n-\nu-1} ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t u(\tau) \left(\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n)} (t-\tau)^{n-1} \right) d\tau \\ &= \frac{\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) d\tau \\ &= \Gamma(n-\nu) I_{0+}^n u(t) \end{aligned}$$

である. また

$$I_{0+}^\nu (C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} + \dots + C_n) = C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \dots + C_n t^\nu$$

である. よって

$$\Gamma(n-\nu) I_{0+}^n u(t) = C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \dots + C_n t^\nu$$

すなわち, 定数を置き換えて

$$I_{0+}^n u(t) = C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \dots + C_n t^\nu$$

を得る. また, ほとんどすべての点 t で $D_{0+}^n I_{0+}^n u(t) = u(t)$ である. よって

$$D_{0+}^n (C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \dots + C_n t^\nu) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \dots + C_n t^{\nu-n}$$

であるから, ほとんどすべての点 t で

$$u(t) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \dots + C_n t^{\nu-n}$$

が成り立つ.

□

また、次が成り立つ ([5, Lemma 2.4], [6, Theorem 2.4]).

補題 3. $\nu > 0$, $u \in L[0, b]$ とする. $n = [\nu] + 1$ とする. このときほとんどいたるところで

$$D_{0+}^\nu I_{0+}^\nu u = u$$

である.

証明. 補題 1 より $I_{0+}u$ は存在する. D_{0+}^ν , I_{0+}^ν の定義および積分順序の交換から

$$\begin{aligned} D_{0+}^\nu I_{0+}^\nu u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^s (s-\tau)^{\nu-1} u(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \left(\int_\tau^t (t-s)^{n-\nu-1} (s-\tau)^{\nu-1} u(\tau) ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t u(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{n-\nu-1} (s-\tau)^{\nu-1} ds \right) d\tau \end{aligned}$$

を得る. また $\int_\tau^t (t-s)^{n-\nu-1} (s-\tau)^{\nu-1} ds = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n)} (t-\tau)^{n-1}$ であるから

$$\begin{aligned} D_{0+}^\nu I_{0+}^\nu u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I_{0+}^n u(t) \\ &= u(t) \end{aligned}$$

がほとんどすべての点 t で成り立つ. □

以上より, 命題 1 を証明できる.

命題 1 の証明. 補題 1 より, $I_{0+}^\nu u \in L[0, b]$ である. よって $I_{0+}^\nu D_{0+}^\nu u - u \in L[0, b]$ である. このとき, 補題 3 より, ほとんどいたるところで

$$\begin{aligned} D_{0+}^\nu (I_{0+}^\nu D_{0+}^\nu u - u) &= D_{0+}^\nu I_{0+}^\nu D_{0+}^\nu u - D_{0+}^\nu u \\ &= D_{0+}^\nu u - D_{0+}^\nu u \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. 補題 2 より, ある $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ が存在して, ほとんどすべての点 t で

$$I_{0+}^\nu D_{0+}^\nu u(t) - u(t) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \dots + C_n t^{\nu-n}$$

が成り立つ. これより与式を得る. □

4 命題 1 の適用例

命題 1 を使うと得られる定理の例を示そう. f を $[0, 1] \times (0, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数とする. $\lambda > 0$ とする. $1 < \nu \leq 2$ とする. ν 階微分方程式に関する初期値問題

$$\begin{cases} D_{0+}^\nu u(t) = f(t, u(t)) \quad (\text{a.a. } t), \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u'(t) t^{2-\nu} = (\nu-1)\lambda \end{cases} \quad (1)$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

定理 1. $1 < \nu \leq 2$ とする. $\lambda > 0$ とする. $[0, 1] \times (0, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数 f が Carathéodory 条件をみたし, さらに次をみたすとする.

- (a) ほとんどすべての点 $t \in [0, 1]$ および $u_1 \leq u_2$ をみたす任意の $u_1, u_2 \in (0, \infty)$ に対して

$$|f(t, u_1)| \geq |f(t, u_2)|$$

をみたす.

- (b) $0 < \alpha < \lambda$ をみたすある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds = 0$$

をみたす.

このとき, u が初期値問題 (1) の解であるための必要十分条件は u が積分方程式

$$u(t) = \lambda t^{\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s)) ds. \quad (2)$$

をみたすことである. ただし, u は, 任意の $t \in (0, 1]$ に対して $\alpha t^{\nu-1} \leq u(t)$ をみたすものとする.

ここで, u が初期値問題 (1) の解であるとは, ある $0 < h \leq 1$ が存在して $u \in C[0, h]$ が (1) をみたすときをいう. f が Carathéodory 条件をみたすとは, 任意の $u \in (0, \infty)$ に対して $t \mapsto f(t, u)$ がルベグ可測であり, また, ほとんどいたるところの $t \in [0, 1]$ に対して, $u \mapsto f(t, u)$ が連続であるときをいう.

$[0, 1]$ 上の関数 a は $(0, 1]$ で連続で $\int_0^1 |a(t)| t^\sigma dt < \infty$ をみたすとする. また $\sigma < 0$, $\lambda > 0$ とする. このとき, [3] で扱った初期値問題

$$\begin{cases} u''(t) = a(t)u(t)^\sigma, \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u'(t) = \lambda \end{cases} \quad (3)$$

は (1) の例である. 実際, $f(t, u) = a(t)u^\sigma$ ($(t, u) \in [0, 1] \times (0, \infty)$) とする. このとき f は (a) をみたす. $t \in [0, 1]$ および $u_1, u_2 > 0$, $u_2 \leq u_1$ とする. $u_1^\sigma \geq u_2^\sigma$ であるから

$$|a(t)u_1^\sigma| \geq |a(t)u_2^\sigma|$$

を得る. すなわち (a) をみたす. また f は (b) をみたす. 実際, $\int_0^1 |a(t)| t^\sigma dt < \infty$ より

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t |a(s)| s^\sigma ds = 0$$

である. したがって

$$\int_0^t |a(s)| s^\sigma ds = \int_0^1 |a(ts)|(ts)^\sigma t ds = t^{\sigma+1} \int_0^1 |a(ts)| s^\sigma ds \rightarrow 0$$

が $t \rightarrow 0+$ のとき成り立つ. これより

$$t \int_0^1 |a(st)| (\alpha st)^\sigma ds = \alpha^\sigma t^{\sigma+1} \int_0^1 |a(st)| s^\sigma ds \rightarrow 0$$

が $t \rightarrow 0+$ のとき成り立つ.

定理 1 を証明する.

定理 1 の証明. u を初期値問題 (1) の解とする. また, 任意の $t \in (0, 1]$ に対して $\alpha t^{\nu-1} \leq u(t)$ をみたすものとする. このとき, ある $0 < h \leq 1$ が存在して $u \in C[0, h]$ である. したがって $u \in L[0, h]$ である. また, (b) より, ある $h_0 \leq h$ が存在して

$$h_0 \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(sh_0, \alpha(sh_0)^{\nu-1})| ds < \infty$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} |f(s, u(s))| ds &\leq \int_0^{h_0} \left(1 - \frac{s}{h_0}\right)^{\nu-2} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \int_0^{h_0} \left(1 - \frac{s}{h_0}\right)^{\nu-2} |f(s, \alpha s^{\nu-1})| ds \\ &= h_0 \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(sh_0, \alpha(sh_0)^{\nu-1})| ds < \infty \end{aligned}$$

である. したがって $D_{0+}^\nu u(t) = f(t, u(t))$ より $D_{0+}^\nu u \in L[0, h_0]$ である. $D_{0+}^\nu u(t) = f(t, u(t))$ より, $I_{0+}^\nu D_{0+}^\nu u(t) = I_{0+}^\nu f(t, u(t))$ である. 命題 1 より, ある C_1, C_2 が存在して

$$u(t) = I_{0+}^\nu f(t, u(t)) + C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2}$$

である. Riemann-Liouville 積分 I_{0+}^ν の定義より

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s)) ds + C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2}$$

である. 条件 $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = 0$ より $C_2 = 0$ である. 実際, 条件 (a) と (b) より

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s)) ds \right| &\leq \int_0^t (t-s)^{\nu-1} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\nu-1} |f(s, \alpha s^{\nu-1})| ds \\ &= t^\nu \int_0^1 (1-s)^{\nu-1} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds \\ &\leq t \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が $t \rightarrow 0+$ のとき成り立つ. よって

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s)) ds + C_1 t^{\nu-1}$$

である。このとき

$$u'(t) = (\nu - 1)C_1 t^{\nu-2} + \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^t (t-s)^{\nu-2} f(s, u(s)) ds$$

である。条件 (a) より

$$\begin{aligned} |u'(t)t^{2-\nu} - (\nu-1)C_1| &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\nu-2} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\nu-2} |f(s, \alpha s^{\nu-1})| ds \\ &= \frac{t}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds \end{aligned}$$

が成り立つ。また、条件 (b) より

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u'(t)t^{2-\nu} = (\nu-1)C_1$$

である。このとき $C_1 = \lambda$ である。ゆえに u は積分方程式 (2) をみたす。

u は積分方程式 (2) をみたすとする。任意の $t \in (0, 1]$ に対して $\alpha t^{\nu-1} \leq u(t)$ とする。 $D_{0+}^\nu u(t) = f(t, u(t))$ である。条件 (a) より

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \lambda t^{\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \lambda t^{\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} |f(s, \alpha s^{\nu-1})| ds \\ &= \lambda t^{\nu-1} + \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-s)^{\nu-1} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds \\ &\leq \lambda t^{\nu-1} + \frac{t}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds \end{aligned}$$

が成り立つ。また、条件 (b) より $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = 0$ である。このとき

$$u'(t) = (\nu-1)\lambda t^{\nu-2} + \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^t (t-s)^{\nu-2} f(s, u(s)) ds$$

である。条件 (a) より

$$\begin{aligned} |u'(t)t^{2-\nu} - (\nu-1)\lambda| &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\nu-2} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\nu-2} |f(s, \alpha s^{\nu-1})| ds \\ &= \frac{t}{\Gamma(\nu-1)} \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds \end{aligned}$$

である。条件 (b) より $\lim_{t \rightarrow 0+} u'(t)t^{2-\nu} = (\nu-1)\lambda$ である。 u は初期値問題 (1) の解である。 $\square$

参考文献

- [1] Z. Bai and H. Lü, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311 (2005), 495–505.
- [2] D. Delbosco and L. Rodino, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 204 (1996), 609–625.
- [3] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Existence of positive solution for the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, Nonlinear Mathematics for Uncertainty and its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, 100, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2011, 435–441.
- [4] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Note on Knežević-Miljanović's theorem in a class of fractional differential equations*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 16 (2015), 2235–2241.
- [5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [6] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Translated from the 1987 Russian original, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
- [7] 洲之内治男, ルベーク積分入門, 第3版, 内田老鶴園新社, 1981.
- [8] S. Zhang, *The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252 (2000), 804–812.