

有限体積法による高粘性ニュートン流体の 容器充填の数値計算

九鬼 愛夢¹・鳥生 大祐²・牛島 省³

¹学生員 京都大学大学院 工学研究科 修士課程 (〒 615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)

E-mail: atomu.kuki.47s@st.kyoto-u.ac.jp (Corresponding Author)

²正会員 博 (工) 京都大学 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: toriu.daisuke.8v@kyoto-u.ac.jp

³正会員 工博 京都大学 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: ushijima.satoru.3c@kyoto-u.ac.jp

ニュートン流体である高粘性液体を鉛直下方に流入させて、上面に開口部を有する 2 次元矩形容器内に充填する数値計算を行った。周囲の低粘性気体を同時に計算するため、密度と粘性の異なる 2 つの非圧縮性流体に対する相平均モデルを利用し、これをコロケート格子有限体積法で離散化した。特に、計算セル境界における粘性係数、密度および流速の平均化手法に考察を加え、ダムブレイク問題を通じてその有効性を確認した。提案された計算手法を用いて、高さ H の矩形容器に幅 d の上部流入口から高粘性液体を充填する問題を計算した結果、高粘性液体のレイノルズ数 Re と H/d の条件により発生する, steady filling, spreading, splashing, buckling という異なるフローパターンが既往研究と同様に再現されることを示した。

Key Words: highly viscous Newtonian fluids, finite volume method, collocated grid system, container filling

1. 緒言

高粘性ニュートン流体の流動特性を解明することは、工学分野における重要な研究課題の一つである。既往の研究では、高粘性の液体を上方から容器に流し込むと、液体の積み重なり方が様々に変化すると報告されており、Tome ら¹⁾ は, steady filling, spreading, splashing, buckling などの名称を用いてこれらを分類している。その中で、例えば buckling は流入過程で高粘性の液体が左右に振動し、気泡を巻き込みながら層状に積み重なる現象である。このような液体の積み重なり方がどのような条件に依存して変化するかを把握することは、高粘性の液体を隙間なく容器に充填する上で重要となる。

高粘性流体の容器充填に対する数値計算は、これまでに有限差分法¹⁾、有限要素法²⁾、粒子法³⁾ 等の様々な手法に基づいて行われている。一方で、このような問題をコロケート格子を用いる有限体積法に基づいて計算する場合、セル境界上での密度や粘性係数、流速を評価する必要があるが、その方法に関する検討は、著者の知る限り十分行われていたとはいえない。そこで、本研究では、運動方程式の粘性項や圧力ポアソン方程式をコロケート格子上で離散化した際に現れる、セル境界上での密度や粘性係数、流速の評価方法について検討する。また、上記の評価方法が計算時間や計算結果に及ぼす影響を確認するために、液体の粘性係数を

様々に変化させた条件でダムブレイク問題を計算する。さらに、高粘性の液体を矩形容器へ充填させる問題を計算し、液体のレイノルズ数や流入幅、容器の高さが液体の積み重なり方に与える影響について、既往の実験結果や計算結果と比較する。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

本研究では、密度と粘性の異なる混ざり合わない非圧縮性流体である、2 流体 A と B の挙動を空間に固定されたコロケート格子上で取り扱う。2 流体の界面が計算セル中に含まれる場合があるため、以下の相平均された質量保存則、非圧縮条件、運動方程式を利用する⁴⁾。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + f_i \quad (3)$$

ここで、 t は時間、 x_i は 2 次元直交座標系の座標成分、 f_i は外力の x_i 方向成分である。また、 ρ, p, μ は 2 流体

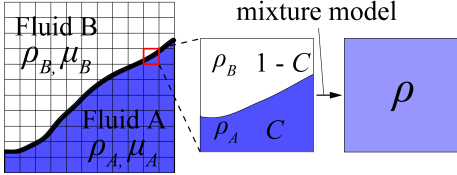
の体積平均密度、圧力および粘性係数、 u_i は2流体の質量平均流速の x_i 方向成分であり、それぞれ以下のように入えられる。

$$\rho = C\rho_A + (1 - C)\rho_B \quad (4)$$

$$p = C\rho_A + (1 - C)p_B \quad (5)$$

$$\mu = C\mu_A + (1 - C)\mu_B \quad (6)$$

$$u_i = \frac{C\rho_A u_{i,A} + (1 - C)\rho_B u_{i,B}}{C\rho_A + (1 - C)\rho_B} \quad (7)$$

ここで、下添字 A, B はそれぞれ流体 A, B の変数であることを表す。また、 C は、-1 に示すように、計算セル中に占める流体 A の体積割合を表す ($0 \leq C \leq 1$)。なお、式 (1) に示したように、変数の平均化操作を表す式 (4), (5), (6), (7) が質量保存則に与える影響はなく、また、式 (2), (3) に示される非圧縮条件と運動方程式は、文献⁴⁾ に示されているような条件を満足していれば、十分に満足される。

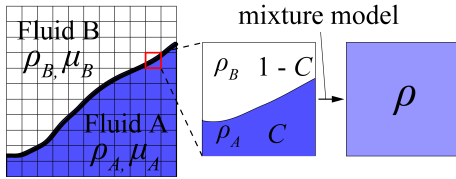


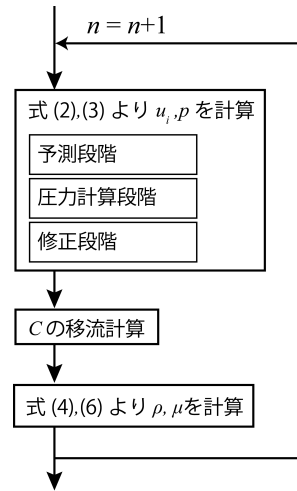
図-1 2 流体 A, B と相平均モデル

式 (2), (4) を用いると、式 (1) は、次の C の保存形の移流方程式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (Cu_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

本研究では、基礎式として、式 (1) の代わりに式 (8) を解くこととした。

(2) 計算手順

本研究で用いた計算手法の手順を-2 に示す。本研究の計算手法では、まず相平均された基礎方程式 (2), (3) をコロケート格子上で有限体積法に基づき離散化し、非圧縮性流体の解法である MAC 系解法⁵⁾ を用いて、予測段階、圧力計算段階、修正段階の計算により体積平均圧力と質量平均流速を求める。予測段階では、セル中心における流速の推定値の x_i 方向成分 u_i^* をオイラー陽解法により求める。運動方程式の移流項には5次の TVD スキーム⁶⁾ を使用している。

圧力計算段階では、圧力の計算と流速の更新を反復的に行うことで非圧縮条件の誤差を制御可能な C-HSMAC

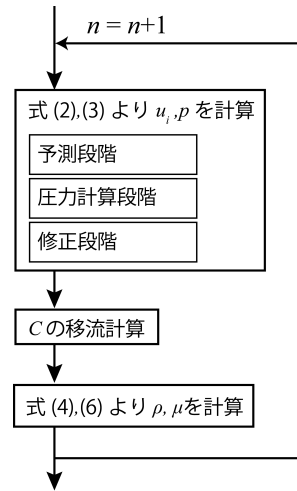


図-2 計算手順のフローチャート

法⁷⁾ を用いる。以下の圧力ポアソン方程式を離散化し、Bi-CGSTAB 法⁸⁾ を用いて ϕ を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (9)$$

ここで、 ϕ は圧力の時間変化であり、 p と時間ステップ n を用いて $\phi = p^{n+1} - p^n$ と表される。また、 Δt は計算時間刻み幅である。修正段階では圧力計算段階で得られた圧力を使って、流速の修正が行われるが、修正された流速が式 (2) の非圧縮条件を高精度に満足することは、非物理的な計算誤差 (例えば移流計算で生じるオーバーシュートやアンダーシュート) を防ぐ意味で重要である⁹⁾。

上記の計算後に、THINC/WLIC 法¹⁰⁾ を用いて C の移流計算を方向分離して行う。このとき、ある時間ステップ n では以下に示される式 (10), (11) を解く。

$$\frac{C^* - C^n}{\Delta t} + \frac{\partial (C^n u_1^n)}{\partial x_1} - C^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{C^{n+1} - C^*}{\Delta t} + \frac{\partial (C^* u_2^n)}{\partial x_2} - C^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} = 0 \quad (11)$$

その次の $n+1$ ステップでは以下に示される式 (12), (13) を解く。

$$\begin{aligned} \frac{C^{**} - C^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial (C^{n+1} u_2^{n+1})}{\partial x_2} \\ - C^{n+1} \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{C^{n+2} - C^{**}}{\Delta t} + \frac{\partial (C^{**} u_1^{n+1})}{\partial x_1} \\ - C^{n+1} \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

以降のステップでは同様に式 (10), (11) と式 (12), (13) の計算を交互に行う。最後に、移流計算で得られた C を用いて式 (4), (6) から密度と粘性係数を更新する。以上が計算手順の概要である。

(3) 粘性項および圧力ポアソン方程式の離散化

本節では、運動方程式 (3) における粘性項 (右辺第 2 項) および圧力ポアソン方程式 (9) の離散化手法について、その詳細を述べる。前節で述べたように、本研究において基礎方程式はコロケート格子上で有限体積法に基づいて離散化され、各変数は図-3 のように配置される。なお、以降は計算領域を 2 次元と仮定し、 x_1, x_2 をそれぞれ x, y とし、 u_1, u_2 をそれぞれ u, v と表記する。また、図-3 において、下添字 I, J は計算セルの x, y 方向のセル番号を表し、 E, W, N, S はセル境界における変数を表す。

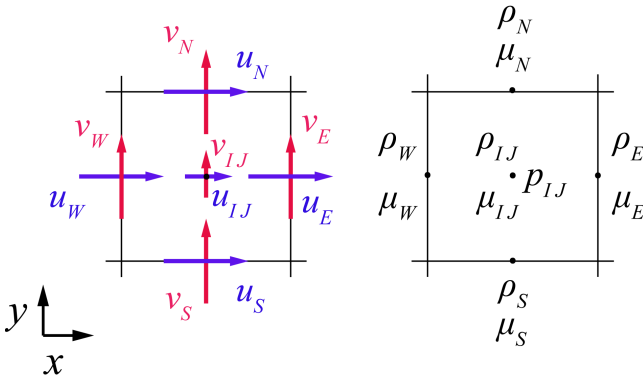


図-3 各変数の定義位置

以降では簡単のため運動方程式 (3) の x 方向成分のみを考える。まず、離散化を行う前に式 (2) の非圧縮条件を用いて運動方程式 (3) の粘性項 (右辺第 2 項) を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

本研究ではコロケート格子上で式 (14) の右辺第 1 項、第 2 項および圧力ポアソン方程式 (9) の左辺を離散化する必要がある。以下では、簡単のため x 方向の離散化のみを示すが、 y 方向の離散化についても同様である。式 (14) の右辺第 1 項および圧力ポアソン方程式 (9) の左辺の x 方向成分は、 $\partial/\partial x (A \partial B / \partial x)$ のように表され

る。なお、 A は μ および $1/\rho$ 、 B は u および ϕ に対応し、図-4 のように配置される。また、図-3 と同様の下添字を用いており、 Δx は x 方向の計算セル幅を表す。

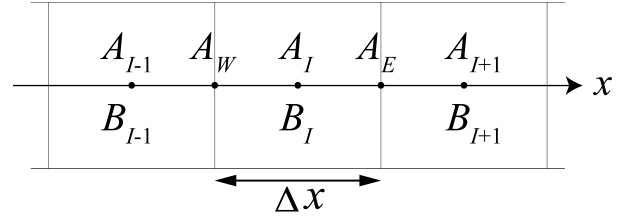


図-4 1次元の場合のコロケート格子配置

本研究では、隣接したセルの値を用いるために、セル中心の値だけでなく、 A_E および A_W のようなセル境界の値も用いて、以下のように $\partial/\partial x (A \partial B / \partial x)$ を離散化する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right)_E - \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right)_W}{\Delta x} \\ &= \frac{A_E (B_{I+1} - B_I) - A_W (B_I - B_{I-1})}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (15)$$

このような離散化方法を用いて、式 (14) の右辺第 1 項および圧力ポアソン方程式 (9) の左辺の x 方向成分を以下のように離散化する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\mu_E (u_{I+1} - u_I) - \mu_W (u_I - u_{I-1})}{\rho_I \Delta x^2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{\rho_E} (\phi_{I+1} - \phi_I) - \frac{1}{\rho_W} (\phi_I - \phi_{I-1})}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (17)$$

また、式 (14) の右辺第 3 項については、セル中心およびセル境界の値を用いて以下のように離散化する。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho_I} \frac{\mu_E - \mu_W}{\Delta x} \frac{u_E - u_W}{\Delta x} \quad (18)$$

(4) セル境界における物性値と流速の評価手法

前節の式 (16), (17), (18) で示したように, 運動方程式 (3) の右辺第 2 項および圧力ポアソン方程式 (9) の計算にはセル境界における粘性係数, 密度, 流速を用いるため, 隣接するセル中心の値を内挿してこれらを計算する必要がある. このような内挿計算手法に関しては様々な検討がなされており^{11),12)}, 以下では, 上記のような先行研究を参考にし, 粘性係数, 密度, 流速の内挿手法について考察を行う.

a) 流速と粘性係数の内挿

図-5 に示すような同方向に異なる速度で動く無限平行平板間における物性値の異なる 2 流体の定常流れを考える. U_A , U_B はそれぞれ上の板, 下の板が x 方向に動く速度である. 図-5 のように配置された 2 つの計算セルを考え, u_A , u_B はそれぞれ流体 A 側, 流体 B 側のセル中心における x 方向の流速, μ_b , u_b はそれぞれセル境界における粘性係数, x 方向の流速を表す. μ_A , μ_B はそれぞれ流体 A, 流体 B の粘性係数である.

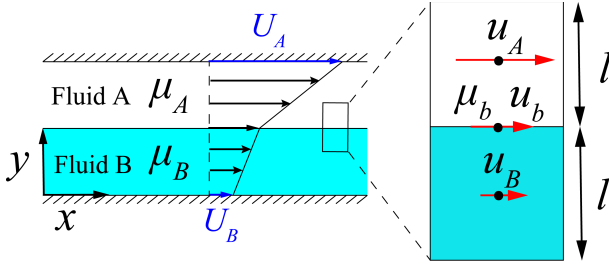


図-5 平行平板間における物性値の異なる 2 流体の定常流れ

流れが定常で x 方向に一様であり, y 方向の流速 V が 0 および x 方向の圧力勾配がない場合を考えると, 運動方程式は次のように変形できる.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad (19)$$

ここで, U は x 方向の流速である. 図-5 と式 (19) より, 次のように一次近似する.

$$\mu_b \frac{u_A - u_B}{l} = \mu_A \frac{u_A - u_b}{\frac{l}{2}} = \mu_B \frac{u_b - u_B}{\frac{l}{2}} \quad (20)$$

式 (20) を整理すると, 以下のように u_b は粘性係数の重み付き平均, μ_b は調和平均の式で与えられる.

$$u_b = \frac{\mu_A u_A + \mu_B u_B}{\mu_A + \mu_B} \quad (21)$$

$$\mu_b = \frac{2}{\mu_A^{-1} + \mu_B^{-1}} \quad (22)$$

なお, 本研究では, セル境界に垂直な方向の流速 v_b の内挿方法についても, 式 (21) と同様の手法を用いた.

b) 密度の内挿

図-6 に示すように, 低密度の流体 A と高密度の流体 B が x 方向に無限に広がって存在し, 各流体が静止している状態を考える. 先程と同様に図-6 のように配置された 2 つの計算セルを考え, p_A , p_B はそれぞれ流体 A 側, 流体 B 側のセル中心における圧力, ρ_b , p_b はそれぞれセル境界における密度, 圧力を表す. ρ_A , ρ_B はそれぞれ流体 A, 流体 B の密度, g は重力加速度である. また, $\rho_A < \rho_B$ である.

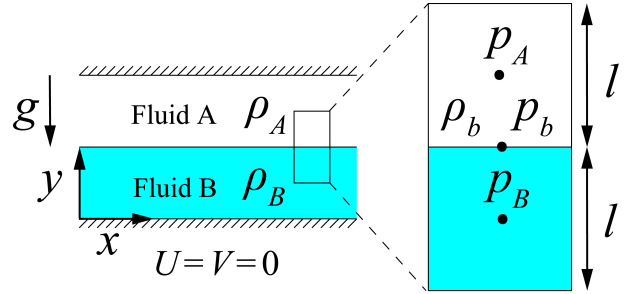


図-6 静止した低密度および高密度流体

流体は静止している, すなわち $U = V = 0$ であるため, 運動方程式は次のように変形できる.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = -g \quad (23)$$

ここで, P は圧力であり, 運動方程式において $f_2 = -g$ とした. 図-6 において重力は空間に一様に働くことから, 式 (23) より次のように一次近似する.

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{p_A - p_B}{l} = \frac{1}{\rho_A} \frac{p_A - p_b}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\rho_B} \frac{p_b - p_B}{\frac{l}{2}} \quad (24)$$

式 (24) を整理すると, 以下のように ρ_b は相加平均で与えられる.

$$\rho_b = \frac{\rho_A + \rho_B}{2} \quad (25)$$

3. ダムブレイク問題

(1) 計算条件

計算領域は図-7 に示すような正方形領域である. 初期状態において流体は全て静止しており, 液体領域の幅 L は 0.146 [m], 高さ $2L$ は 0.292 [m] であり, 重力加速度 g は 9.80 [m/s²] である. 気体の物性値は空気を仮定

し、密度 ρ_g は $1.00 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 、粘性係数 μ_g は $2.00 \times 10^{-5} \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$ とした。

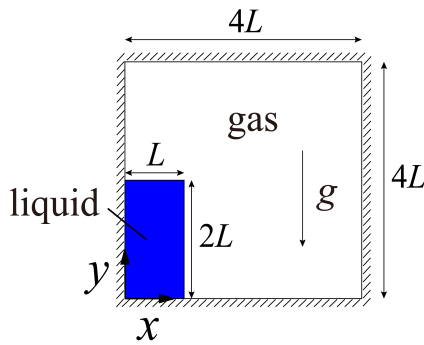


図-7 2次元ダムブレイク問題の計算領域

本数値実験では、表-1のように液体の粘性係数 μ_l を $\mu_l = 8.50 \times 10^{-4}$, 1.00×10^{-2} , 1.00×10^{-1} , 1.00 , 1.00×10^1 , $1.00 \times 10^2 \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$ と変えて計算を行った。以下では、これらを順に Case 1, 2, 3, 4, 5, 6 とする。密度 ρ_l は全てのケースにおいて $1.00 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ とした。なお、ケース1の計算条件は、越塚ら¹³⁾や Martin & Moyce¹⁴⁾ が水を用いて行ったダムブレイクの実験条件と一致する。さらに、これら6ケースについて、セル境界での粘性係数 μ_b を式(22)で導出したような調和平均で計算する場合と相加平均で計算する場合の合計12ケースについて計算を行った。以下では、表-1のように μ_b を調和平均で計算する場合を Case 1-a から 6-a、相加平均で計算する場合を Case 1-b から 6-b と表記する。なお、セル境界での流速 u_b , v_b とセル境界での密度 ρ_b については、式(21), (25)で示したように粘性係数による重み付き平均と相加平均を用いて計算する。

表-1 2次元ダムブレイク問題の計算ケース

	$\mu_l \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$	μ_b の内挿手法
Case 1-a	8.50×10^{-4}	調和平均
Case 1-b	8.50×10^{-4}	相加平均
Case 2-a	1.00×10^{-2}	調和平均
Case 2-b	1.00×10^{-2}	相加平均
Case 3-a	1.00×10^{-1}	調和平均
Case 3-b	1.00×10^{-1}	相加平均
Case 4-a	1.00	調和平均
Case 4-b	1.00	相加平均
Case 5-a	1.00×10^1	調和平均
Case 5-b	1.00×10^1	相加平均
Case 6-a	1.00×10^2	調和平均
Case 6-b	1.00×10^2	相加平均

計算セル数は 101×101 とした。計算時間刻み幅 Δt は各ケースで粘性係数や μ_b の計算手法に応じて異なる値を用いたが、詳細については後述する。流速の推定値の計算や圧力計算における空間方向の繰り返し演算を OpenMP¹⁵⁾ で並列化して、スレッド並列数は16とし、京都大学のスーパーコンピュータシステム (Cray CS400 2820XT, Intel Xeon Broadwell 2.1GHz 18×2/node) を用いて計算を行った。

(2) 液体のフロント位置の比較

Case 1-a ($\mu_l = 8.50 \times 10^{-4} \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$) と Case 5-a ($\mu_l = 10.0 \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$) における液体領域の時間変化の様子を図-8と図-9に C (液相の体積割合) のコンター図として示す。図-8と図-9において、青および緑の領域が液体を示す。また、 t^* は無次元時間であり、 $t^* = t\sqrt{2g/L}$ と定義される。図-8と図-9から、 μ_l が大きいほど液体フロントの移動速度が遅いことが分かる。

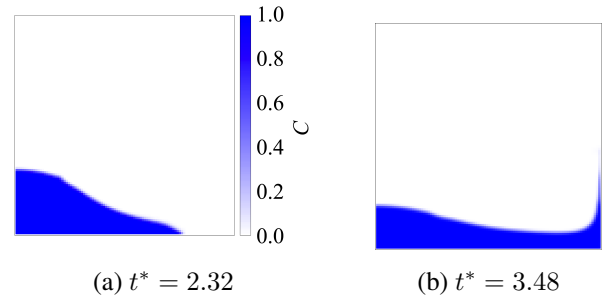


図-8 Case 1-a における液体領域の時間変化

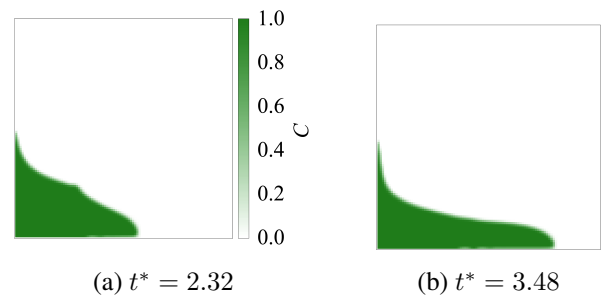


図-9 Case 5-a における液体領域の時間変化

次に、図-10に示されるように、液体フロントの x 座標を Z とし、各ケースにおける Z の時間変化を比較した。なお、本研究では $C = 0.5$ を気液界面と定義した。図-11に Case 1-a、実験結果^{13),14)}、既往の計算結果^{13),16)}の比較を、図-12に Case 1-a, 1-b と Case 5-a, 5-b の比較を示す。図-11から分かるように、本手法で得られた各時刻の液体フロント位置は実験結果とよく一致している。また、図-12から、本計算条件においては μ_b の計

算手法が液体フロント位置の時間変化に与える影響は十分小さいことが分かる。なお、先にも述べたように、液体フロントの移動速度は粘性係数が大きい Case 5-a, 5-b の方が粘性係数の小さい Case 1-a, 1-b よりも遅い結果となった。 ρ_b の計算手法を調和平均, u_b, v_b の計算手法を相加平均に変えた場合でも計算結果に顕著な差異は見られなかった。

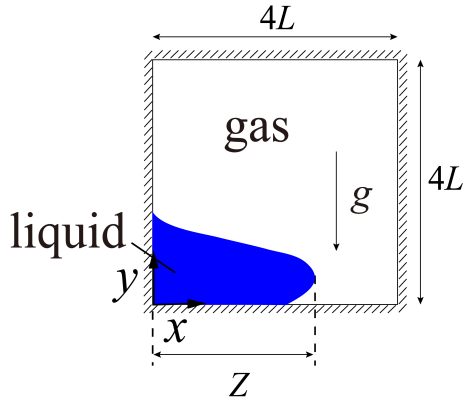


図-10 フロント位置の定義

(3) 粘性係数の計算手法が計算時間に与える影響

各ケースにおいて安定に計算可能な Δt の最大値 $\Delta t_{\max}$ を確認し、得られた液相と気相の粘性係数の比 r_μ と $\Delta t_{\max}$ の関係を図-13 に示す。ただし、 $r_\mu = \mu_l / \mu_g$ と定義される。図-13 において、黒線は μ_b を調和平均で計算する場合 (Case 1-a から 6-a), 赤線は μ_b を相加平均で計算する場合 (Case 1-b から 6-b) の結果である。なお、計算は液体のフロント位置が $x = 3.8L$ に到達するまで行った。

図-13 から、 r_μ が最も小さい 42.5 の場合 (Case 1-a, 1-b) では、 μ_b の計算手法の違いが $\Delta t_{\max}$ に与える影響は小さいが、 r_μ が大きくなるにつれ、 μ_b を調和平均で計算することで、 μ_b を相加平均で計算する場合よりも大きな Δt を設定して計算を行えることが分かる。具体的には、 r_μ が最も大きい 5.0×10^6 の場合 (Case 6-a, 6-b) では、 μ_b を調和平均で計算することで、 μ_b を相加平均で計算する場合よりも約 100 倍大きな Δt を設定できる。また、 μ_b を調和平均で計算する場合と相加平均で計算する場合とで計算時間を比較した結果を図-14 に示す。図-14 において、 r_t は相加平均による計算時間を調和平均による計算時間で除した値である。なお、各ケースにおいて、 $t^* = 2.32$ までの計算時間を計測した。図-14 より、 $r_\mu = 5.0 \times 10^4$ 以上 (Case 4 以降) では、 μ_b を調和平均で計算することで、相加平均で計算する場合よりも計算時間を短縮できており、その傾向は r_μ が大きくなるほどより顕著となった。なお、 ρ_b の計算手

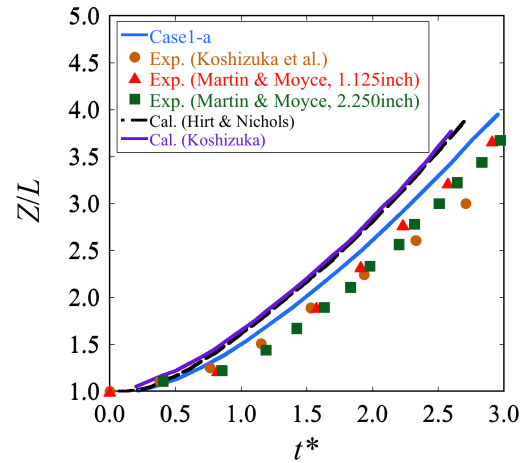


図-11 Case 1-a と先行研究^{13),14),16)} のフロント位置の比較

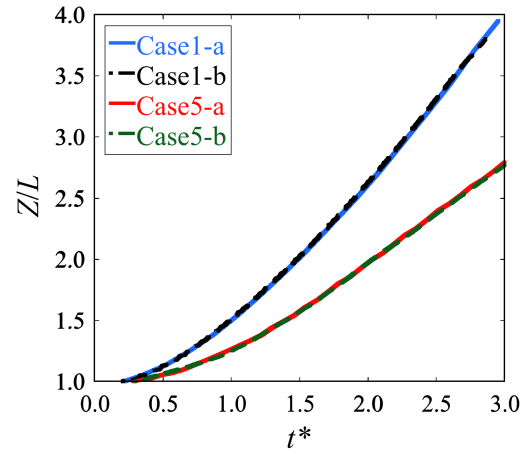


図-12 Case 1-a と Case 5-a, 5-b のフロント位置の比較

法を調和平均, u_b, v_b の計算手法を相加平均に変えた場合には、 $\Delta t_{\max}$ や計算時間に変化はなかった。

以下では、 μ_b の計算手法が $\Delta t_{\max}$ や計算時間に上記のような影響を与えた理由を考察する。図-13 から分かるように、 r_μ がある値以下では r_μ の増加に伴い $\Delta t_{\max}$ も増加するが、 r_μ がある値を超えると $\Delta t_{\max}$ は r_μ の増加に伴い減少する。これは、安定に計算可能な時間刻み幅がクーラン数か拡散数のどちらで制限されているかに対応している。2次元場のクーラン数 C_n と拡散数 D_n を以下のように定義する。

$$C_n = \Delta t \left(\frac{|u_{IJ}|}{\Delta x} + \frac{|v_{IJ}|}{\Delta y} \right) \quad (26)$$

$$D_n = \nu_{c,IJ} \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \quad (27)$$

ここで、 $\nu_{c,IJ}$ は IJ 番目の計算セルにおける動粘性係

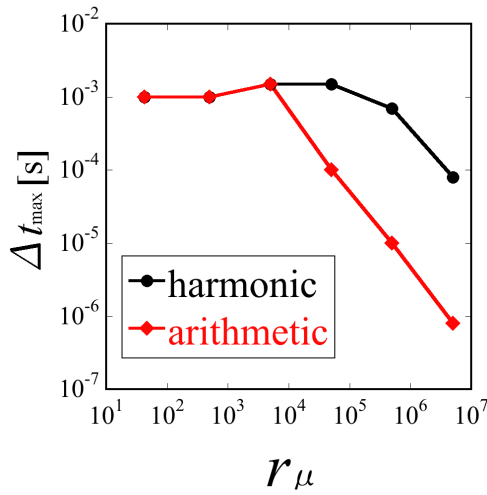


図-13 r_μ と $\Delta t_{\max}$ の関係

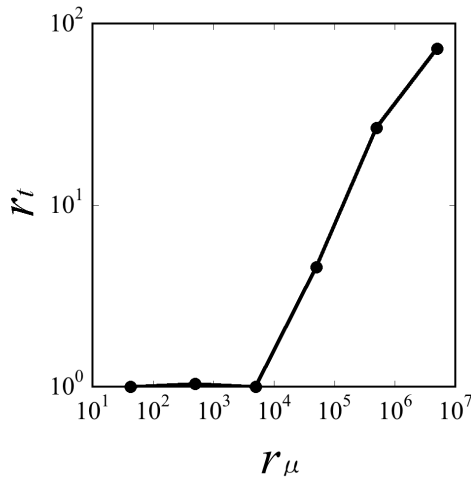


図-14 r_μ と r_t の関係

数であり、以下のように定義する。

$$\nu_{c,IJ} = \frac{1}{\rho_{IJ}} \max\{\mu_E, \mu_W, \mu_N, \mu_S, \mu_{IJ}\} \quad (28)$$

なお、計算領域内の C_n と D_n の最大値を C_{nm} および D_{nm} と表す。

図-12 から分かるように、液体フロントの移動速度は r_μ の増加に伴い遅くなる。したがって、上記の C_{nm} によって $\Delta t_{\max}$ が決まる場合、 r_μ が増加すれば流速の最大値に基づく時間刻み幅の制限が緩和され、 $\Delta t_{\max}$ は増加する。一方で、 r_μ がある値を超えて $\Delta t_{\max}$ が D_{nm} によって制限される場合、 r_μ が増加すれば D_{nm} も大きくなるため、それに応じて $\Delta t_{\max}$ は小さくなる。このように $\Delta t_{\max}$ が D_{nm} によって制限されるようになると、 μ_b を相加平均で計算する場合の $\Delta t_{\max}$ は調和平均

均で計算する場合のそれと比べて小さくなる。

上記のような μ_b の計算手法による $\Delta t_{\max}$ の違いが生じる理由を考察するため、図-15 に示すように、 IJ 番目の計算セルとそれに隣接する計算セルのうち、 $I-1J$ 番目の計算セルのみが液体で満たされ、それ以外は空気で満たされている状態を考える。気液相の物性値は Case 6 の場合 ($\mu_g = 2.00 \times 10^{-5}$ [Pa·s], $\mu_l = 100$ [Pa·s], $\rho_g = 1.00$ [kg/m³], $\rho_l = 1.00 \times 10^3$ [kg/m³]) とすると、 μ_W を μ_{IJ} と μ_{I-1J} の調和平均で計算する場合には $\mu_W = 4.00 \times 10^{-5}$ [Pa·s]、相加平均で計算する場合には $\mu_W = 50.0$ [Pa·s] となり、 μ_N , μ_E , μ_S はいずれも μ_g となる。この時、 IJ 番目の計算セル中心における密度は $\rho_{IJ} = \rho_g$ であるため、上記のようにして計算された μ_b を用いて式 (28) で定義される $\nu_{c,IJ}$ を計算すると、 μ_b を調和平均で計算する場合には $\nu_{c,IJ} = 4.00 \times 10^{-5}$ [m²/s]、相加平均で計算する場合には $\nu_{c,IJ} = 50.0$ [m²/s] となる。なお、気相および液相の動粘性係数はそれぞれ $\nu_g = 2.00 \times 10^{-5}$ [m²/s], $\nu_l = 0.10$ [m²/s] である。本研究のように $\mu_l \gg \mu_g$ かつ $\rho_l \gg \rho_g$ となる条件では、 μ_b を相加平均で計算すると上記のように ν_c が ν_g や ν_l よりも非常に大きな値を取る場合がある。これが原因となり、 μ_b を相加平均で計算する場合では μ_b を調和平均で計算する場合に比べて小さい Δt を設定する必要があると推察される。

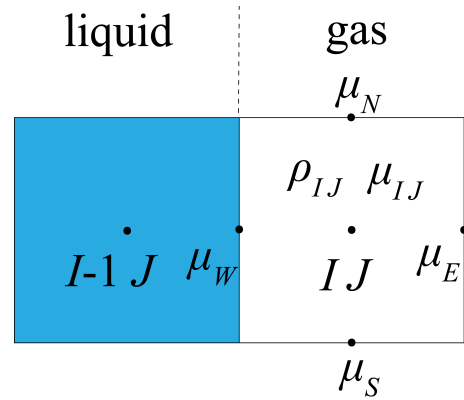


図-15 $I-1J$ 番目の計算セルのみが液体で満たされている状態

4. 高粘性の液体を矩形容器へ充填させる問題

(1) 計算条件

計算領域は図-16 に示すように 2 次元の正方形領域とし、縦の長さは H 、横の長さは W とする。上記のような計算領域の上面に幅 d の流入領域を設定し、高粘性の液体を一定流速 V_{in} で鉛直下向きに流入させた。上面のうち、流入領域には $\partial p / \partial y = \rho g$ および $\partial u / \partial y = 0$, $v = -V_{in}$ という条件を設定し、流入領域以外には $p = 0$ および $\partial u / \partial y = 0$, $\partial v / \partial y = 0$ の開放条件を設定し、

上面以外には no-slip 壁面条件を設定した。気体の物性値は空気を仮定し、密度 ρ_g は $1.00 \text{ [kg/m}^3]$ 、粘性係数 μ_g は $2.00 \times 10^{-5} \text{ [Pa}\cdot\text{s}]$ とした。

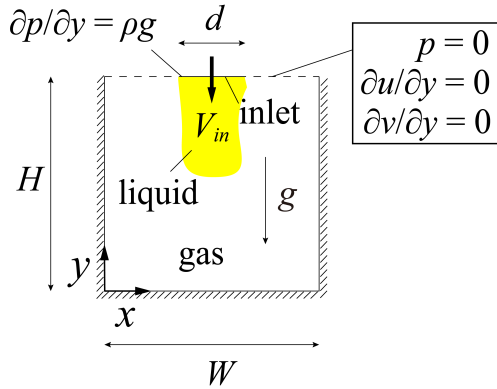


図-16 高粘性の液体を矩形容器へ充填させる問題の計算領域

本数値実験では、既往研究¹⁾に合わせた液体の粘性係数 μ_l が $\mu_l = 1.0, 5.0, 10.0 \text{ [Pa}\cdot\text{s}]$ の条件下で、流入幅 d を $2.00 \times 10^{-3} \text{ [m]}$ から $6.25 \times 10^{-3} \text{ [m]}$ 、流入流速 V_{in} を 0.24 [m/s] から 2.50 [m/s] の範囲で変化させて複数ケースの計算を行った。なお、液体の密度 ρ_l は全てのケースにおいて $1.00 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3]$ とした。また、レイノルズ数 Re を以下のように定義する。

$$Re = \frac{V_{in}d}{\nu_l} = \frac{V_{in}d\rho_l}{\mu_l} \quad (29)$$

本計算条件における Re の範囲は、 $0.15 \leq Re \leq 25$ である。

計算セル数は全てのケースにおいて 200×200 とした。また、計算セル数については、セル数を変化させて検討を行い、現象を再現するのに 200×200 で十分であることを確認した。なお、質量保存則が満足されていることも確認した。計算時間刻み幅 Δt については、各ケースで安定に計算できる最大値を設定した。流速の推定値の計算や圧力計算における空間方向の繰り返し演算を OpenMP¹⁵⁾ で並列化して、スレッド並列数は 16 または 36 とし、京都大学のスーパーコンピュータシステム (Cray CS400 2820XT, Intel Xeon Broadwell 2.1GHz 18×2/node) を用いて計算を行った。

(2) 既往研究との比較

本節では、式 (21), (22), (25) で示したように、隣接するセル中心の値から μ_b を調和平均、 ρ_b を相加重平均、 u_b , v_b を粘性係数の重み付き平均でそれぞれ計算した場合の結果を示す。Tome ら¹⁾は、高粘性の液体を矩形容器に充填する際、 H/d や Re に応じて液体の積み重なり方が変化することを実験と計算の両方で確認しており、steady filling, spreading, splashing, buckling な

どの名称を用いてこれらを分類している。本研究でも、Tome ら¹⁾が用いた H/d および Re を設定することで、液体の積み重なり方の変化について同様の傾向を確認した。表-2 は、本研究で得られた μ_l および H/d , Re と液体の積み重なり方の関係を表す。また、表-2 に示した各条件における計算結果を図-17 から図-20 に C のコンター図として示す。なお、 μ_l の大きさに応じて液体の色を変えている。また、以降では全て H と W はどちらも $5.00 \times 10^{-2} \text{ [m]}$ である。さらに、 t' は無次元時間であり、 $t' = tV_{in}/d$ と定義される。

表-2 μ_l および H/d , Re と液体の積み重なり方の関係

	$\mu_l \text{ [Pa}\cdot\text{s}]$	H/d	Re
steady filling	5.0	12.5	0.80
spreading	1.0	10.0	2.50
splashing	1.0	10.0	25.00
buckling	10.0	16.6	0.15

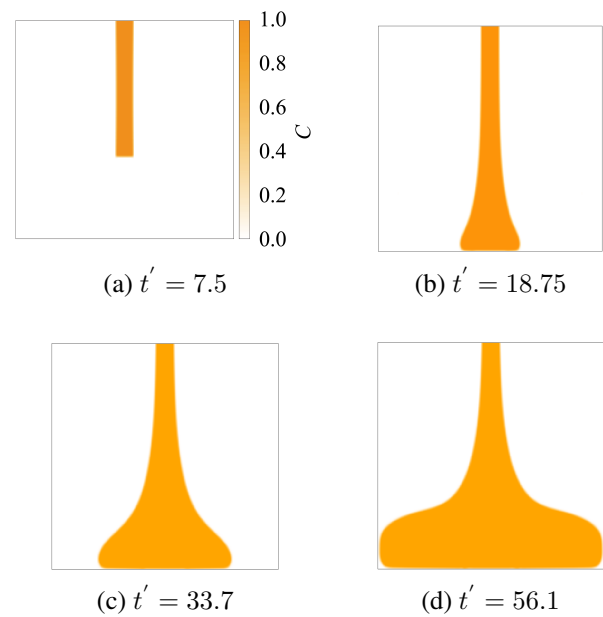


図-17 steady filling の計算結果 ($\mu_l = 5.0 \text{ [Pa}\cdot\text{s}]$, $H/d = 12.5$, $Re = 0.80$)

図-17 の steady filling では容器に隙間なく液体が充填されるため、効率よく充填を行う上で理想的な条件といえる。また、図-18 の spreading では、充填された液体表面の凹凸が steady filling に比べて大きくなっている。さらに、図-19 の splashing では、 Re が大きくなることで、液体が左右の壁面に衝突した後に壁に沿って這い上がるような挙動が確認された。steady filling, spreading, splashing では、高粘性の液体が容器内へ左右対称に充填されていくのに対し、図-20 の buckling では、流入口

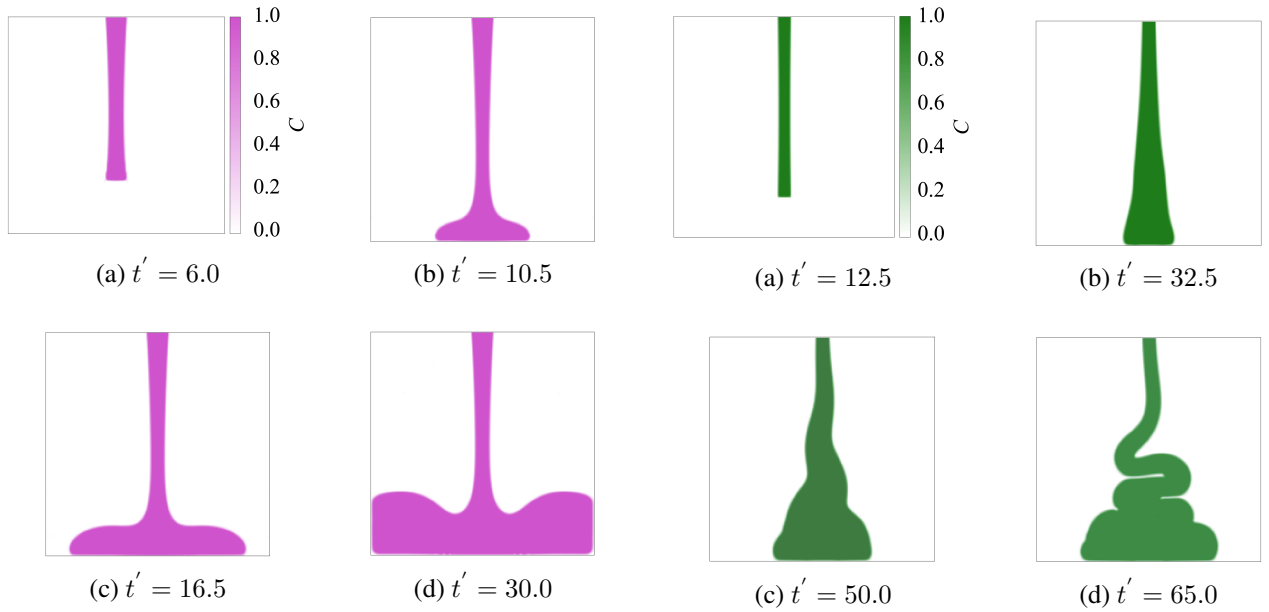


図-18 spreading の計算結果 ($\mu_l = 1.0$ [Pa·s], $H/d = 10.0$, $Re = 2.50$)

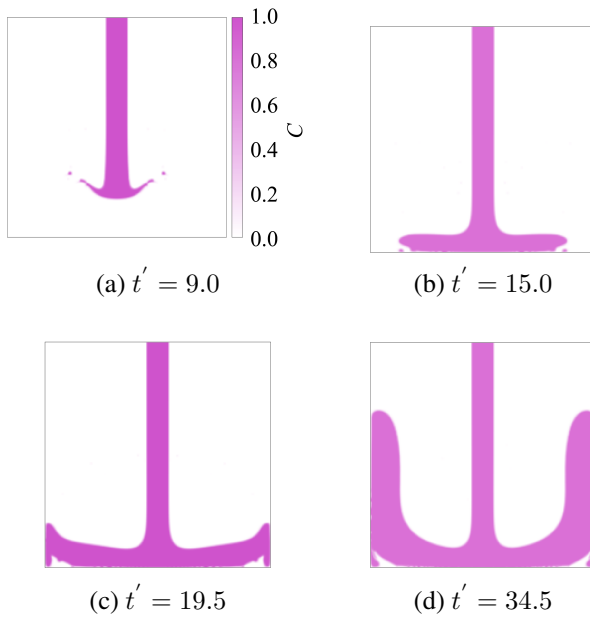


図-19 splashing の計算結果 ($\mu_l = 1.0$ [Pa·s], $H/d = 10.0$, $Re = 25.00$)

から流入した液体が左右に大きく振れながら容器底部に積み重なっていく様子が確認できる。

Cruikshank ら^{17),18)} は、流入した液体が側壁に接触しないような十分広い領域で実験し、buckling が発生するには、 $H/d > 10$ かつ $Re < 0.56$ という条件が必要であると報告している。そこで、 H/d および Re を変化した各条件で計算を行い、buckling 発生の有無をまとめた結果を図-21 に示す。図-21 において、Buckling

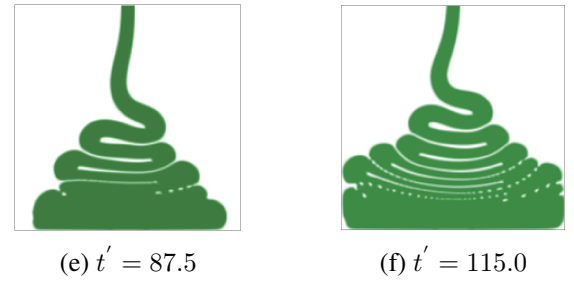


図-20 buckling の計算結果 ($\mu_l = 10.0$ [Pa·s], $H/d = 16.6$, $Re = 0.15$)

points は計算で buckling が発生した場合、Non-buckling points は buckling が発生しなかった場合を表す。また、図-21 の Exp.(Cruikshank), Cal.(Tome) はそれぞれ既往研究^{17),18),19)} の実験結果または 2 次元の計算結果に基づいて算出した buckling が発生するか否かの遷移境界を表す。図-21 から、buckling が発生する際の H/d および Re について、Tome ら¹⁹⁾ による報告と同様の傾向が本研究でも得られていることが分かる。

(3) セル境界における密度と流速の評価手法が計算結果に与える影響

前節では、隣接するセル中心の値から μ_b を調和平均、 ρ_b を相加平均、 u_b , v_b を粘性係数の重み付き平均でそれぞれ計算した場合の結果を示した。本節では、同様の数値実験を ρ_b および u_b , v_b の計算手法を変えて行い、それぞれが計算結果に与える影響を確認する。

図-22 に、 ρ_b を式 (25) で導出したような相加平均で計算した場合と調和平均で計算した場合の結果を示す。なお、本計算において μ_l は 10.0 [Pa·s]、 Re は 0.15 、 H/d は 16.6 であり、buckling が発生する条件を設定した。

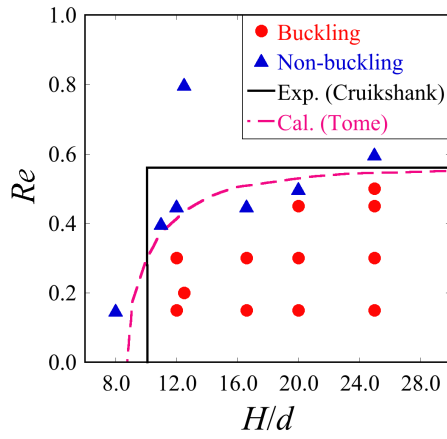
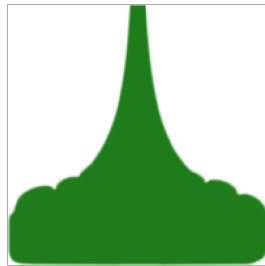


図-21 H/d および Re と buckling 発生の有無

図-22 より, ρ_b に相加平均を用いた場合には buckling が発生しているが, 調和平均を用いた場合には流入口から流入した液体が最初はある程度左右に振れるものの, 徐々に振れ幅が小さくなっていき, ある時刻からは左右対称に充填された。



(a) ρ_b を相加平均で内挿した場合

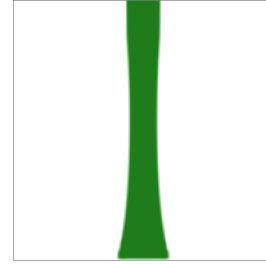


(b) ρ_b を調和平均で内挿した場合

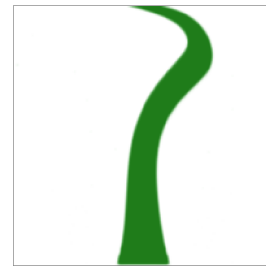
図-22 $t' = 115.0$ における計算結果 ($\mu_l = 10.0$ [Pa·s], $H/d = 16.6$, $Re = 0.15$)

図-23 に, u_b , v_b を式 (21) で導出したような粘性係数の重み付き平均で計算した場合と相加平均で計算した場合の結果を示す。なお, 本計算において μ_l は 10.0 [Pa·s], Re は 0.15 , H/d は 8.0 であり, steady filling が発生する条件を設定した。図-23 より, u_b , v_b を粘性係数の重み付き平均で計算した場合には時間が経つと, 図-17 と同様の steady filling が発生したが, u_b , v_b を相加平均で計算した場合には流入した液体がある時刻を

境に急激に折れ曲がり, 計算不能となった。以上, 前節と本節で得られた結果から, 高粘性ニュートン流体の流れを計算する際, μ_b に調和平均, ρ_b に相加平均, u_b , v_b に粘性係数の重み付き平均をそれぞれ用いることの有効性を確認した。



(a) u_b , v_b を粘性係数の重み付き平均で内挿した場合



(b) u_b , v_b を相加平均で内挿した場合

図-23 $t' = 7.7$ における計算結果 ($\mu_l = 10.0$ [Pa·s], $H/d = 8.0$, $Re = 0.15$)

5. 結言

本研究では, 高粘性ニュートン流体の容器充填を計算するための有限体積法について検討した。特に有限体積法に基づいて基礎方程式を離散化した際に現れるセル境界における粘性係数, 密度, 流速の評価方法について検討した。検討した手法を適用して, ダムブレイク問題と高粘性流体を矩形容器へ充填させる問題の数値計算を行って, 既往の計算結果や実験結果と比較した。得られた結論は以下の通りである。

- 定常の無限平行平板流れを対象に, μ_b を調和平均, ρ_b を相加平均, u_b を粘性係数の重み付き平均で計算することが妥当であると示された。
- 高粘性流体を用いる際, μ_b を相加平均ではなく, 調和平均で計算すると, より大きな Δt を設定可能で, 大幅に計算を高速化できることを確認した。
- 高粘性の液体を矩形容器へ充填させる問題を計算し, 液体のレイノルズ数や流入幅, 容器の高さが液体の積み重なり方に与える影響について, 適切な内挿手法を利用することで既往の実験結果または計算結果を再現できた。

参考文献

- 1) Tome, M. F., McKee, S., Barratt, L., Jarvis, D. and Patrick, A.: An experimental and numerical investigation of container filling with viscous liquids, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 31, pp. 1333–1353, 1999.
- 2) Ville, L., Silva, L. and Coupez, T.: Convected level set method for the numerical simulation of fluid buckling, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 66, No. 3, pp. 324–344, 2011.
- 3) Ren, J., Jiang, T., Lu, W. and Li, G.: An improved parallel SPH approach to solve 3D transient generalized Newtonian free surface flows, *Computer Physics Communications*, Vol. 205, pp. 87 – 105, 2016.
- 4) 牛島省, 山田修三, 藤岡奨, 瀬津家久: 3次元自由水面流れによる物体輸送の数値解法 (3D MICS) の提案と適用性の検討, 土木学会論文集B, Vol. 62, No. 1, p. 100–110, 2006.
- 5) 牛島省, 瀬津家久, 吉田圭介, 池田大輔: 自由水面流れの数値計算における内部流動の解析精度に関する考察, 水工学論文集, Vol. 46, pp. 409–414, 2002.
- 6) Yamamoto, S. and Daiguji, H.: Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, Vol. 22, No. 2-3, pp. 259 – 270, 1993.
- 7) Ushijima, S., Nezu, I. and Sanjou, M.: Computational method for Navier-Stokes equations accompanied by free-surface deformation, *International Society of Offshore and Polar Engineers*, pp. 233–239, 2002.
- 8) van der Vorst, H.: Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. STAT. COMPUT.*, Vol. 13, No. 2, pp. 631–644, 1992.
- 9) Ushijima, S., Tanaka, H. and Toriu, D.: Validity of pressure-velocity correction algorithm (C-HSMAC method) for incompressible fluids with passive scalar convection, *J. Adv. Simulat. Sci. Eng.*, Vol. 6, No. 1, pp. 260 – 272, 2019.
- 10) Yokoi, K.: Efficient implementation of THINC scheme: A simple and practical smoothed VOF algorithm, *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, p. 1985–2002, 2007.
- 11) Patankar, S.: *Numerical heat transfer and fluid flow*, pp. 41–47, Hemisphere publishing corporation, 1980.
- 12) Shakibaeinia, A. and Jin, Y.-C.: MPS mesh-free particle method for multiphase flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 229-232, pp. 13 – 26, 2012.
- 13) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, p. 421–434, 1996.
- 14) Martin, J. C. and Moyce, W. J.: Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, Vol. 244, p. 312–324, 1952.
- 15) Chapman, B., Jost, G. and van der Pas, R.: *Using OpenMP: portable shared memory parallel programming*, The MIT Press, 2007.
- 16) Hirt, C. W. and Nichols, B. D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal Of Computational Physics*, Vol. 39, p. 201–225, 1981.
- 17) Cruickshank, J. O. and Munson, B. R.: Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets, Vol. 113, pp. 221–239, 1981.
- 18) Cruickshank, J. O.: Low-Reynolds-number instabilities in stagnating jet flows, Vol. 193, pp. 111–127, 1988.
- 19) Tome, M. F. and McKee, S.: Numerical simulation of viscous flow: Buckling of planar jets, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 29, pp. 705–718, 1999.

(Received June 24, 2020)

(Accepted November 19, 2020)

COMPUTATIONS OF CONTAINER FILLING WITH HIGHLY VISCOUS NEWTONIAN FLUIDS BASED ON FINITE VOLUME METHOD

Atomu KUKI, Daisuke TORIU and Satoru USHIJIMA

Computations of the two dimensional rectangular container filling are conducted by injecting the highly viscous Newtonian fluids, vertically downward through an aperture on the top boundary. In order to simultaneously calculate the low-viscosity gas surrounding the highly viscous liquid, phase-averaged governing equations are used for two immiscible incompressible fluids with different densities and viscosities. The governing equations are discretized with the finite volume method in the collocated grid system. In particular, the estimation methods of viscosity, density and velocities on computational cell boundaries in the discretized governing equations are investigated and their effectiveness was confirmed through the application to the dam-break flows. As a result of the computations of the container filling with the highly viscous liquid, it was confirmed that the proposed method enables us to reasonably predict flow patterns of the highly viscous liquid, such as steady filling, spreading, splashing and buckling, which arise in the specific relationships between Reynolds number and the ratio H/d , where H is the height of the container and d is the inlet width, as reported in the preceding studies.